Equacions Diferencials **Codi: 22701** **A**

Temps: 30 minuts 14 d'Abril de 2005

Avaluació Continuada

- Per a quins valors $\alpha \in \mathbb{R}$ podem dir que l'equació diferencial ordinària $x'' + \pi^2 x = \cos^2(\alpha t)$ no té solucions periòdiques?

Resolució: Es tracta d'una oscil·lació forçada sense fregament, per tant, calculant:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ p_0 = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2 \\ \bullet\ p = \text{període de } \cos^2(\alpha t) = \dfrac{\pi}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Perquè l'equació diferencial ordinària no tingui solucions periòdiques s'ha de complir que:

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\quad \dfrac{\pi}{2\alpha} = n \in \mathbb{Z} \\[2ex] 2)\displaystyle\int_0^{2n} \cos^2(\alpha t)\sin \pi t dt \neq 0 \quad \text{o} \quad \int_0^{2n} \cos^2(\alpha t)\cos(\pi t) dt \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1)\quad \alpha = \dfrac{\pi}{2n},\ n \in \mathbb{Z} \\[2ex] 2)\displaystyle\int_0^{2n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}t\right)\sin \pi t dt = \int_0^{2n}\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{n}t\right)\right)\sin \pi t\, dt = 0\,,\ \forall n \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}t\right)\cos \pi t\, dt = \int_0^{2n}\left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{n}t\right)\right)\cos \pi t\, dt \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{n} = \pm\pi \Leftrightarrow \\[2ex] \hfill \Leftrightarrow n = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$