Equacions Diferencials **Codi: 22701** **B**

Temps: 30 minuts 2 d'Abril de 2004

Avaluació Continuada

- Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària

$$xy'' - (x+1)y' + y = -x^2\,, \quad x > 0 \tag{$*$}$$

sabent que $y_1 = e^x$ és una solució de l'equació diferencial ordinària <u>homogènia</u> associada a (*).

Solució:

1. Busquem una segona solució de l'equació diferencial ordinària homogènia associada, linealment independent amb $y_1(x)$:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x)\int \frac{e^{\int \frac{x+1}{x}dx}}{y_1^2(x)}dx \\ &= e^x \int xe^{-x}dx \\ &= e^x\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = -(x+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1e^x - c_2(x+1)$.

2. Busquem ara una solució particular de (*) per variació de paràmetres:
$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x) &= \int \frac{-y_2 f}{W}dx \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1 f}{W}dx \end{aligned}\right. \qquad \text{amb} \quad f = -x$$

Calculem $W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^x & -(x+1) \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = xe^x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int e^{-x}(x+1)dx = e^{-x}(x+2) \\ u_2(x) &= -\int 1dx = -x \end{aligned} \qquad \Rightarrow y_p(x) = (x+2) + x(x+1) = x^2 + 2x + 2\,.$$

Per tant, la solució general és

$$y_G(x) = c_1e^x + c_2(x+1) + (x^2 + 2x + 2)\,.$$