

NOM:
COGNOMS:
DNI:
GRUP:

NOTA:

1. Calculeu $x_k(t)$ l'única solució periòdica de l'oscil·lació forçada

$$x'' + 2x' + 2x = \cos kt, \quad k > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Proveu que $x_k(t) + x_\ell(t)$ és una solució de l'equació diferencial ordinària

$$x'' + 2x' + 2x = \cos kt + \cos \ell t.$$

3. És periòdica $x_k(t) + x_\ell(t)$?

Solució:

1. Aplicant el mètode dels coeficients indeterminats, sabem que l'equació té una solució periòdica particular de la forma

$$x_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

per a alguns $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Imposant que $x_k(t)$ compleix l'equació, s'obté la igualtat

$$\cos kt = ((2 - k^2)a_k + 2kb_k) \cos kt + ((2 - k^2)b_k - 2ka_k) \sin kt.$$

Per tant,

$$a_k = \frac{2 - k^2}{(2 - k^2)^2 + 4k^2} \quad b_k = \frac{2k}{(2 - k^2)^2 + 4k^2}.$$

Així doncs, la solució és

$$x_k(t) = \frac{1}{(2 - k^2)^2 + 4k^2} ((2 - k^2) \cos kt + 2k \sin kt).$$

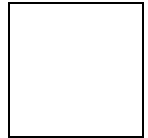
2. Només cal comprovar que la funció $x(t) = x_k(t) + x_\ell(t)$ compleix l'equació:

$$x'' + 2x' + 2x = (x_k'' + 2x_k' + 2x_k) + (x_\ell'' + 2x_\ell' + 2x_\ell) = \cos kt + \cos \ell t.$$

3. Els períodes de $x_k(t)$ i $x_\ell(t)$ són $\rho_k = \frac{2\pi}{k}$ i $\rho_\ell = \frac{2\pi}{\ell}$, respectivament. Per tant, la funció $x_k(t) + x_\ell(t)$ és periòdica si, i només si, el quocient ρ_k/ρ_ℓ és una quantitat racional. És a dir si, i només si, $\ell/k \in \mathbb{Q}$.

NOM:
COGNOMS:
DNI:
GRUP:

NOTA:



1. Calculeu $x_k(t)$ l'única solució periòdica de l'oscil·lació forçada

$$x'' + 2x' + 2x = \sin kt, \quad k > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Proveu que $x_k(t) + x_\ell(t)$ és una solució de l'equació diferencial ordinària

$$x'' + 2x' + 2x = \sin kt + \sin \ell t.$$

3. És periòdica $x_k(t) + x_\ell(t)$?

Solució:

1. Aplicant el mètode dels coeficients indeterminats, sabem que l'equació té una solució periòdica particular de la forma

$$x_k(t) = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

per a alguns $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Imposant que $x_k(t)$ compleix l'equació, s'obté la igualtat

$$\sin kt = ((2 - k^2)a_k + 2kb_k) \cos kt + ((2 - k^2)b_k - 2ka_k) \sin kt.$$

Per tant,

$$a_k = \frac{-2k}{(2 - k^2)^2 + 4k^2} \quad b_k = \frac{2 - k^2}{(2 - k^2)^2 + 4k^2}.$$

Així doncs, la solució és

$$x_k(t) = \frac{1}{(2 - k^2)^2 + 4k^2} (-2k \cos kt + (2 - k^2) \sin kt).$$

2. Només cal comprovar que la funció $x(t) = x_k(t) + x_\ell(t)$ compleix l'equació:

$$x'' + 2x' + 2x = (x_k'' + 2x_k' + 2x_k) + (x_\ell'' + 2x_\ell' + 2x_\ell) = \sin kt + \sin \ell t.$$

3. Els períodes de $x_k(t)$ i $x_\ell(t)$ són $\rho_k = \frac{2\pi}{k}$ i $\rho_\ell = \frac{2\pi}{\ell}$, respectivament. Per tant, la funció $x_k(t) + x_\ell(t)$ és periòdica si, i només si, el quocient ρ_k/ρ_ℓ és una quantitat racional. És a dir si, i només si, $\ell/k \in \mathbb{Q}$.