Equacions Diferencials

Codi: 22701 **A**

Temps: 30 minuts **Avaluació Continuada** 12 d'Abril de 2002

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....
GRUP: .... **NOTA:**

1. Considereu el problema de valors inicials $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

   (a) Expresseu-lo mitjançant un sistema diferencial de primer ordre.

   (b) Prenent Ω tal que $\overline{B}_1(0, 1, -1) \subset \Omega$, doneu un interval d'existència de la solució d'aquest sistema, calculeu la segona iteració, $Y_2(x)$, de la successió de Picard associada, i acoteu l'error comès.

   (c) Calculeu $\lim_{n\to\infty} Y_n(x)$.

(a) Definint $z = y'$ i $Y = (y, z)$, obtenim el problema de Cauchy

$$Y' = F(x, Y) = \begin{pmatrix} z \\ -y + 2z \end{pmatrix} \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Comencem per calcular les quantitats necessàries per trobar un interval d'existència. El radi de la bola $B = \overline{B}_1(0, 1, -1)$ és $r = 1$. Acotem la norma de la funció $F(x, Y)$ en la bola B:

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{\sqrt{z^2 + (2z - y)^2} : (x, Y) \in B\right\} \\ &= \max\left\{\sqrt{y^2 + 5z^2 - 4yz} : (x, Y) \in B\right\} \\ &\le \sqrt{4 + 20 + 16} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Llavors, $a = \min\left(\frac{r}{2M}, \frac{r}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{40}$ i, per tant, un interval d'existència és

$$[x_0 - a, x_0 + a] = \left[-\sqrt{10}/40, \sqrt{10}/40\right].$$

Ara calculem la segona iteració $Y_2(x)$ del mètode de Picard:

$$Y_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 - \ x \\ -1 - 3x \end{pmatrix} \qquad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 1 - \ x - (3/2)x^2 \\ -1 - 3x - (5/2)x^2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, per a trobar una cota de l'error comès, necessitem acotar les derivades parcials de la funció $F(x, Y) = (f_1(x, Y), f_2(x, Y))$ respecte les variables y i z en la bola B. Com

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, Y) = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, Y) = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, Y) = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, Y) = 2$$

obtenim que $L' = 2 \cdot \max\{0, 1, 2\} = 4$ i, llavors, una cota de l'error és

$$\epsilon_2(x) = ||Y(x) - Y_2(x)|| \le M(L')^2 \frac{(2a)^3}{3!} \le \frac{1}{15}.$$

(c) Sabem que $\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, essent $y(x)$ la solució del problema de Cauchy.

El polinomi característic $P(m) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$ té una arrel doble: $m_1 = m_2 = 1$. Llavors, la solució general de l'edo és $y(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^x$. Imposant les condicions inicials $y(0) = 1$ i $y'(0) = -1$, veiem que $c_1 = 1$ i $c_2 = -2$. Així doncs, $y(x) = e^x - 2xe^x$ és la solució buscada, $y'(x) = -e^x - 2xe^x$ i

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x \\ -e^x - 2xe^x \end{pmatrix}.$$