# Equacions Diferencials

**Codi: 22701** **A**

Temps: 1 hora | **Avaluació Continuada** | 6 d'Abril de 2001

**NOM:** ......................................
**COGNOMS:** ......................................
**DNI:** ......................................
**GRUP:** ......................................

**NOTA:**

1. Sabent que $y_1(x) = x^2$ és una solució de l'equació diferencial ordinària
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \qquad x > 0,$$
useu el mètode de reducció de l'ordre per calcular una segona solució $y_2(x)$ linealment independent amb $y_1(x)$.

2. Apliqueu el mètode de variació de paràmetres per calcular una solució particular de l'equació diferencial ordinària no homogènia
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = x.$$

3. Trobeu la solució del problema de valor inicial
$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 6y = x \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Solució:

1. L'equació normalitzada és $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ amb $P(x) = 2/x$ i $Q(x) = -6/x^2$. Apliquem el mètode de reducció d'ordre:
$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1(x)^2}\,\mathrm{d}x = x^2 \int \frac{\mathrm{e}^{-2\ln x}}{x^4}\,\mathrm{d}x = x^2 \int \frac{x^{-2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = x^2 \int x^{-6}\,\mathrm{d}x = -x^{-3}/5.$$
Per simplificar càlculs posteriors, podem agafar $y_2(x) = x^{-3}$.

2. Busquem una solució particular de la forma
$$y_\mathrm{p}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = x^2u_1(x) + x^{-3}u_2(x).$$
El Wronskià del conjunt fonamental $\{y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-3}\}$ és
$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-3} \\ 2x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -5\,x^{-2}.$$
El terme no homogeni de la equació normalitzada és $f(x) = 1/x$. Sabem que
$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{5x^2} = -1/5x, \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{5} = -x^4/20. \end{aligned}$$
Per tant, una solució particular és $y_\mathrm{p}(x) = -x/5 - x/20 = -x/4$.

3. La solució general de l'equació és
$$y_\mathrm{g}(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_\mathrm{p}(x) = c_1x^2 + c_2/x^3 - x/4.$$
Finalment, imposem les condicions inicials
$$0 = y(1) = c_1 + c_2 - 1/4, \qquad 0 = y'(1) = 2c_1 - 3c_2 - 1/4,$$
i trobem que $c_1 = 1/5$ i $c_2 = 1/20$.
Per tant, la solució de problema de valor inicial és $y(x) = x^2/5 + x^{-3}/20 - x/4$.

**Equacions Diferencials** **Codi: 22701** **B**

Temps: 1 hora **Avaluació Continuada** 6 d'Abril de 2001

**NOM:** ....................................
**COGNOMS:** ....................................
**DNI:** ....................................
**GRUP:** .................................... **NOTA:**

1. Sabent que $y_1(x) = x^2$ és una solució de l'equació diferencial ordinària
$$x^2y'' + 3xy' - 8y = 0, \qquad x > 0,$$
useu el mètode de reducció de l'ordre per calcular una segona solució $y_2(x)$ linealment independent amb $y_1(x)$.

2. Apliqueu el mètode de variació de paràmetres per calcular una solució particular de l'equació diferencial ordinària no homogènia
$$x^2y'' + 3xy' - 8y = x.$$

3. Trobeu la solució del problema de valor inicial
$$\begin{cases} x^2y'' + 3xy' - 8y = x \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Solució:

1. L'equació normalitzada és $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ amb $P(x) = 3/x$ i $Q(x) = -8/x^2$. Apliquem el mètode de reducció d'ordre:
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1(x)^2}\,\mathrm{d}x = x^2\int \frac{\mathrm{e}^{-3\ln x}}{x^4}\,\mathrm{d}x = x^2\int \frac{x^{-3}}{x^4}\,\mathrm{d}x = x^2\int x^{-7}\,\mathrm{d}x = -x^{-4}/6.$$
Per simplificar càlculs posteriors, podem agafar $y_2(x) = x^{-4}$.

2. Busquem una solució particular de la forma
$$y_\mathrm{p}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = x^2u_1(x) + x^{-4}u_2(x).$$
El Wronskià del conjunt fonamental $\{y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-4}\}$ és
$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-4} \\ 2x & -4x^{-5} \end{vmatrix} = -6\,x^{-3}.$$
El terme no homogeni de la equació normalitzada és $f(x) = 1/x$. Sabem que
$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{6x^2} = -1/6x, \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{6} = -x^5/30. \end{aligned}$$
Per tant, una solució particular és $y_\mathrm{p}(x) = -x/6 - x/30 = -x/5$.

3. La solució general de l'equació és
$$y_\mathrm{g}(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_\mathrm{p}(x) = c_1x^2 + c_2/x^4 - x/5.$$
Finalment, imposem les condicions inicials
$$0 = y(1) = c_1 + c_2 - 1/5, \qquad 0 = y'(1) = 2c_1 - 4c_2 - 1/5,$$
i trobem que $c_1 = 1/6$ i $c_2 = 1/30$.
Per tant, la solució de problema de valor inicial és $y(x) = x^2/6 + x^{-4}/30 - x/5$.