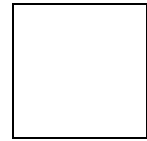


NOM:
 COGNOMS:
 DNI:
 GRUP:

NOTA:



1. Sabent que $y_1(x) = x^2$ és una solució de l'equació diferencial ordinària

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0, \quad x > 0,$$

useu el mètode de reducció de l'ordre per calcular una segona solució $y_2(x)$ linealment independent amb $y_1(x)$.

2. Apliqueu el mètode de variació de paràmetres per calcular una solució particular de l'equació diferencial ordinària no homogènia

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = x.$$

3. Trobeu la solució del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' - 6y = x \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Solució:

1. L'equació normalitzada és $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ amb $P(x) = 2/x$ i $Q(x) = -6/x^2$. Apliquem el mètode de reducció d'ordre:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1(x)^2} dx = x^2 \int \frac{e^{-2 \ln x}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{x^{-2}}{x^4} dx = x^2 \int x^{-6} dx = -x^{-3}/5.$$

Per simplificar càlculs posteriors, podem agafar $y_2(x) = x^{-3}$.

2. Busquem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = x^2 u_1(x) + x^{-3} u_2(x).$$

El Wronskià del conjunt fonamental $\{y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-3}\}$ és

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-3} \\ 2x & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -5x^{-2}.$$

El terme no homogeni de la equació normalitzada és $f(x) = 1/x$. Sabem que

$$\begin{aligned} u_1(x) &= - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx = \int \frac{dx}{5x^2} = -1/5x, \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx = - \int \frac{x^3 dx}{5} = -x^4/20. \end{aligned}$$

Per tant, una solució particular és $y_p(x) = -x/5 - x/20 = -x/4$.

3. La solució general de l'equació és

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = c_1 x^2 + c_2/x^3 - x/4.$$

Finalment, imposen les condicions inicials

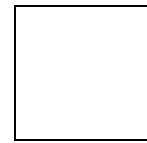
$$0 = y(1) = c_1 + c_2 - 1/4, \quad 0 = y'(1) = 2c_1 - 3c_2 - 1/4,$$

i trobem que $c_1 = 1/5$ i $c_2 = 1/20$.

Per tant, la solució de problema de valor inicial és $y(x) = x^2/5 + x^{-3}/20 - x/4$.

NOM:
COGNOMS:
DNI:
GRUP:

NOTA:



1. Sabent que $y_1(x) = x^2$ és una solució de l'equació diferencial ordinària

$$x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0, \quad x > 0,$$

useu el mètode de reducció de l'ordre per calcular una segona solució $y_2(x)$ linealment independent amb $y_1(x)$.

2. Apliqueu el mètode de variació de paràmetres per calcular una solució particular de l'equació diferencial ordinària no homogènia

$$x^2 y'' + 3xy' - 8y = x.$$

3. Trobeu la solució del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' - 8y = x \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

Solució:

1. L'equació normalitzada és $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ amb $P(x) = 3/x$ i $Q(x) = -8/x^2$. Apliquem el mètode de reducció d'ordre:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1(x)^2} dx = x^2 \int \frac{e^{-3 \ln x}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{x^{-3}}{x^4} dx = x^2 \int x^{-7} dx = -x^{-4}/6.$$

Per simplificar càlculs posteriors, podem agafar $y_2(x) = x^{-4}$.

2. Busquem una solució particular de la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = x^2 u_1(x) + x^{-4} u_2(x).$$

El Wronskià del conjunt fonamental $\{y_1(x) = x^2, y_2(x) = x^{-4}\}$ és

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-4} \\ 2x & -4x^{-5} \end{vmatrix} = -6x^{-3}.$$

El terme no homogeni de la equació normalitzada és $f(x) = 1/x$. Sabem que

$$\begin{aligned} u_1(x) &= - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx = \int \frac{dx}{6x^2} = -1/6x, \\ u_2(x) &= \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx = - \int \frac{x^4 dx}{6} = -x^5/30. \end{aligned}$$

Per tant, una solució particular és $y_p(x) = -x/6 - x/30 = -x/5$.

3. La solució general de l'equació és

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) = c_1 x^2 + c_2/x^4 - x/5.$$

Finalment, imposarem les condicions inicials

$$0 = y(1) = c_1 + c_2 - 1/5, \quad 0 = y'(1) = 2c_1 - 4c_2 - 1/5,$$

i trobem que $c_1 = 1/6$ i $c_2 = 1/30$.

Per tant, la solució de problema de valor inicial és $y(x) = x^2/6 + x^{-4}/30 - x/5$.