Introducción

EDOs. Las primeras ecuaciones que un estudiante aprende a resolver tienen soluciones escalares (por ejemplo, una ecuación bicuadrada) o vectoriales (por ejemplo, un sistema lineal). Por contra, en esta asignatura vamos a estudiar ecuaciones cuyas soluciones son funciones (*ecuaciones funcionales*) y en las cuales aparecen la función incógnita y algunas de sus derivadas (*ecuaciones diferenciales*).

En general, son expresiones del tipo

$$g\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

donde

- t es el *tiempo* o *variable independiente*,
- x es la *variable dependiente*,
- n es el *orden* de la ecuación, y
- $g = g\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big)$ es una función que depende de $n + 2$ argumentos.

Estas expresiones se denominan *ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).* Diremos que la EDO es *autónoma* si la variable independiente no aparece explícitamente en la expresión que define la EDO.

Ejemplo 1. La EDO $x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$ es de primer orden y autónoma, con $g(t, x, x') = x^2 + x'^2 - 1$.

Ejemplo 2. La EDO $x''(t) = \sin x(t)$ es de segundo orden y autónoma, con $g(t, x, x', x'') = x'' - \sin x$.

Ejemplo 3. La EDO $x'(t) = x(t)/t$ es de primer orden, con $g(t, x, x') = x' - x/t$.

Preferimos la notación $x = x(t)$ a la notación $y = y(x)$, pero debe quedar claro que, detalles estéticos aparte, las expresiones $x' = x/t$ y $y' = y/x$ representan la <u>misma</u> EDO. La notación $x = x(t)$ se suele emplear en problemas mecánicos o dinámicos (se busca la posición de un "cuerpo" x en función de un "tiempo" t), mientras que la notación $y = y(x)$ es más común en problemas estáticos o geométricos.

También es importante retener que la función $g = g\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big)$ está destinada a ser evaluada sobre funciones derivables $x = x(t)$. Las *soluciones* de la EDO son todas aquellas funciones

$$x : I \to \mathbb{R}, \qquad x = x(t),$$

cuyas derivadas cumplen la relación dada. En particular, eso implica que

- La función $x = x(t)$ se puede derivar al menos n veces, y
- La función $g = g\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big)$ se puede evaluar en los puntos $\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big)$ para todo $t \in I$.

Ejemplo 4. La función $x(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución de la EDO del primer ejemplo.

Ejemplo 5. La función constante $x(t) = \pi$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución de la EDO del segundo ejemplo.

Ejemplo 6. La función $x(t) = 3t$, $t > 0$, es una solución de la EDO del tercer ejemplo.

A partir de ahora, escribiremos las EDOs poniendo x en lugar de $x(t)$, x' en lugar de $x'(t)$, etc.

Ejemplo 7. Consideramos la EDO de segundo orden

$$tx'' - 2(1 + t)x' + (t + 2)x = t + t^2.$$

Podemos comprobar que la función $x_{\mathrm{p}}(t) = 1 + t$ es <u>una</u> solución (particular) de la EDO, pues

$$tx''_{\mathrm{p}} - 2(1 + t)x'_{\mathrm{p}} + (t + 2)x_{\mathrm{p}} = 0 - 2(1 + t) + (t + 2)(1 + t) = -2 - 2t + t^2 + 3t + 2 = t + t^2.$$

Esta solución está definida en toda la recta real: $I = \mathbb{R}$. Sin embargo, la EDO tiene infinitas soluciones. Concretamente, veremos en el tema *Ecuaciones Lineales* que todas las funciones de la forma

$$x_{\mathrm{g}}(t) = (c_1 + c_2 t^3)\mathrm{e}^t + 1 + t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

son soluciones de la EDO, donde los coeficientes c_1 y c_2 son libres; es decir, pueden tomar cualquier valor. Comprobadlo. Además, no existe ninguna solución que no encaje en la forma anterior, aunque no es inmediato probarlo. La solución particular anterior se recupera tomando $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Otras elecciones del valor de los coeficientes c_1 y c_2 dan lugar a otras soluciones particulares.

La *solución general* de una EDO es el conjunto de todas sus soluciones. Usualmente es una expresión que contiene un cierto número de coeficientes (o parámetros) libres, que suele coincidir con el orden de la EDO. La solución general de la EDO del ejemplo anterior es $x_{\mathrm{g}}(t)$.

En esta asignatura, nos vamos a centrar en EDOs escritas en *forma normal*, lo cual significa que la derivada de orden más alto aparece despejada. Es decir, son expresiones del tipo

$$x^{(n)} = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big).$$

¿Cuáles de los ejemplos anteriores estaban en forma normal? ¿Es posible despejar la derivada de orden más alto en los ejemplos que no estaban en forma normal?

Sistemas de EDOs. Cuando tengamos un conjunto de ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, diremos que tenemos un *sistema de EDOs.*

En esta asignatura, sólo estudiaremos sistemas de EDOs de primer orden escritos en forma normal, lo cual significa que: 1) tenemos tantas ecuaciones como funciones incógnitas, y 2) en cada ecuación una derivada primera aparece despejada en función de una expresión que no contiene derivadas. Es decir, son expresiones del tipo

$$X' = F(t, X)$$

donde

- t es el *tiempo* o *variable independiente*,
- $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ es la *variable dependiente*, y
- $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = F(t, X)$, es una función que depende de un argumento escalar t y un argumento vectorial X.

A partir de ahora reservaremos las minúsculas para las magnitudes escalares y las mayúsculas para las magnitudes vectoriales o matriciales.

Es interesante observar que cualquier EDO en forma normal de orden n se puede transformar en un sistema de EDOs de primer orden en forma normal con n ecuaciones. Concretamente, al introducir las funciones incógnita $x_1 = x$, $x_2 = x'$, …, $x_n = x^{(n-1)}$, vemos que la EDO $x^{(n)} = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big)$ se convierte en el sistema

$$x_1' = x_2, x_2' = x_3, \ldots, x_{n-1}' = x_n, x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ejemplo 8. La EDO de segundo orden $tx'' - 2(1+t)x' + (t+2)x = t + t^2$ se puede escribir en forma normal como $x'' = 1 + t - (1 + 2/t)x + 2(1 + 1/t)x'$. A continuación, si notamos $x_1 = x$ y $x_2 = x'$, obtenemos el sistema lineal 2D no autónomo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & 1 + t - (1 + 2/t)x_1 + 2(1 + 1/t)x_2 \end{array} \right. .$$

Si $x_{\mathrm{g}}(t)$ es la solución general de la EDO dada en el ejemplo 7, entonces

$$X_{\mathrm{g}}(t) = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{g}}(t) \\ x_{\mathrm{g}}'(t) \end{pmatrix}$$

es la solución general del sistema asociado.

Campos de direcciones y campos de vectores. Para simplificar, supongamos que tenemos una EDO de primer orden en forma normal

$$x' = f(t, x)$$

para alguna función continua $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Asociamos a la EDO un *campo de direcciones* mediante la siguiente regla. A cada punto $(t, x) \in D$ le asignamos la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $m = f(t, x)$. Podeis visualizar mentalmente un campo de direcciones como unas virutas de hierro imantadas afectadas por un imán o como un campo de trigo cuando sopla el viento.

Ejemplo 9. Dibujar el campo de direcciones de la EDO $x' = f(t, x) = x/t$.

A continuación, recordamos que dada una función $x = x(t)$, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(t, x(t))$ tiene pendiente $x'(t)$. Por tanto, vemos que $x(t)$ es solución de la EDO $x' = f(t, x)$ si y sólo si la gráfica de la función $x(t)$ es tangente en todos sus puntos al campo de direcciones.

Ejemplo 10. Dibujar las gráficas de la soluciones de la EDO $x' = x/t$. ¿Cuántas de estas soluciones cumplen la condición $x(0) = 0$? (Respuesta sorprendente: ninguna, pues la EDO es singular en $t = 0$.)

Hemos relacionado un problema analítico (resolver EDOs) con un problema geométrico (encontrar gráficas tangentes a un campo de direcciones). Como consecuencia, las gráficas de soluciones diferentes de una EDO en forma normal de primer orden no puede cruzarse de forma transversal. ¿Por qué?

Ejercicio. Conectarse al enlace http://www-math.mit.edu/daimp/ y entender los applets de JAVA sobre *Isoclines* y *Solution Targets*.

El concepto de campo de direcciones se puede adaptar al caso de sistemas de EDOs. Para simplificar, supongamos que tenemos el sistema 2D de primer orden autónomo en forma normal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & f(x, y) \\ y' & = & g(x, y) \end{array} \right.$$

para algunas funciones continuas $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El término 2D significa que tenemos un sistema plano, con dos funciones incógnita: x e y, mientras que el carácter autónomo nos permite representar las soluciones como curvas contenidas en un plano de coordenadas (x, y) sin necesitar la coordenada temporal t. Hemos notado las coordenadas (x, y), en vez de (x_1, x_2), por tradición.

Asociamos al sistema un *campo de vectores* mediante la siguiente regla. A cada punto $(x, y) \in D$ le asignamos el vector con origen en dicho punto y dirección $\big(f(x, y), g(x, y)\big)$. Las visualizaciones anteriores se mantienen, aunque como el sistema es autónomo en el caso del campo de trigo el viento debe ser constante en el tiempo.

Ejemplo 11. Dibujar el campo de vectores del siguiente sistema de EDOs: $x' = -y$, $y' = x$.

A continuación, recordamos que dada una curva $(x(t), y(t))$, el vector tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$ viene dado por $(x'(t), y'(t))$. Por tanto, vemos que la curva $(x(t), y(t))$ es solución del sistema de EDOs si y sólo si la curva es tangente en todos sus puntos al campo de vectores.

Ejemplo 12. Dibujar las soluciones del sistema de EDOs dado en el ejemplo anterior.

Ejercicio. Generalizar el concepto de campo de vectores a cualquier dimensión. Es decir, a sistemas de primer orden autónomos en forma normal: $X' = F(X)$ para alguna función $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Hemos relacionado otra vez un problema analítico (resolver sistemas de EDOs autónomos de primer orden en forma normal) con un problema geométrico (encontrar curvas tangentes a un campo de vectores). En consecuencia, las curvas de dos soluciones diferentes de uno de estos sistemas no pueden cruzarse de forma transversal. ¿Por qué?

Y ahora surge una pregunta natural: ¿Pueden cruzarse de forma tangencial? Daremos, bajo unas hipotésis bastante generales, una respuesta negativa a esta pregunta en la última sección.

Problemas de Valor Inicial (PVIs). Típicamente, una EDO de orden n (o un sistema de n EDOs de primer orden) tiene infinitas soluciones. De hecho, su solución general suele tener n parámetros libres. Para capturar una solución concreta añadiremos al problema un número adecuado de *condiciones iniciales* (¿adivinais cuántas?), lo cual da lugar a un *problema de valores iniciales (PVI)*.

Los PVIs en el caso de EDOs en forma normal de orden n tienen la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(n)} = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{n-1}(t_0) = x_{n-1} \end{array} \right. \tag{1}$$

donde el instante inicial t_0 y las condiciones iniciales $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ son magnitudes dadas, escogidas de modo que la función f sea, al menos, continua en el punto $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Es importante notar que todas las condiciones iniciales se dan en el mismo instante y sólo afectan a las derivadas de orden menor que n. La derivada n-ésima se determina evaluando la EDO y las derivadas superiores se pueden determinar derivando la EDO (si la función f es suficientemente regular, claro).

Ejemplo 13. Consideramos el PVI de segundo orden

$$tx'' - 2(1+t)x' + (t+2)x = t + t^2, \quad x(1) = 2 + \mathrm{e}, \quad x'(1) = 1 + \mathrm{e}$$

cuya EDO estudiamos en el ejemplo 7. ¿Cuánto vale $x''(1)$? (Respuesta: $x''(1) = \mathrm{e}$.)

Advertencia: Esta EDO es *singular* en $t = 0$, pues su forma normal tiene términos de la forma $1/t$. Por eso damos las c.i. en otro instante: $t = 1$.

Para resolver el PVI, buscamos para que valores de los parámetros libres c_1 y c_2 se cumplen ambas condiciones iniciales. Resulta que la única posibilidad es $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Por tanto, hemos probado que nuestro PVI tiene una única solución: $x(t) = 1 + t + \mathrm{e}^t$.

Ejemplo 14. El estudio de estos PVIs se inició con el nacimiento de la mecánica. En la segunda ley de Newton se afirma que la posición $x = x(t)$ de un cuerpo satisface una EDO de segundo orden. Por tanto, para determinar una trayectoria debemos fijar la posición y velocidad iniciales.

Los PVIs en el caso de sistemas de EDOs de primer orden tienen la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & F(t,X) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

donde el instante inicial t_0 y la condición inicial X_0 son datos dados, escogidos de modo que la función F sea, al menos, continua en el punto (t_0, X_0).

Ejemplo 15. Consideramos el PVI plano

$$\left\{ \begin{array}{ll} x' = -y, & x(0) = 1 \\ y' = x, & y(0) = 0 \end{array} \right. .$$

Comprobar que $x(t) = \cos t$ y $y(t) = \sin t$ es una solución. Os hareis famosos si encontrais otra :-)

Dos teoremas de existencia y unicidad. Cuando las expresiones que definen las EDOs (o sistemas de EDOs) son suficientemente regulares, los PVIs asociados siempre tienen (existencia) exactamente una (unicidad) *solución local*. El término local significa que sólo podemos garantizar que la solución está definida en algún intervalo abierto, el cual puede ser muy pequeño, que rodea al instante inicial.

Teorema. *Si* $f = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\big)$ *es una función de clase* C^1 *en un abierto* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *y* $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D$*, entonces el PVI (1) tiene exactamente una solución local.*

Ejemplo 16. La solución del PVI $x' = x^2$, $x(0) = 1$, es $x(t) = \frac{1}{1-t}$, y está definida en $I = (-\infty, 1)$.

Pregunta. Todas las funciones $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $x(t) = ct$, con $c \in \mathbb{R}$, son soluciones del PVI $tx' = x$, $x(0) = 0$. Por contra, el PVI $tx' = x$, $x(0) = 1$, no tiene ninguna solución local, pues si la tuviera se cumpliría que $1 = x(0) = \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t \to 0} tx'(t) = 0$. Por tanto, en estos ejemplos no tenemos ni unicidad ni existencia de soluciones. ¿Qué falla?

Teorema. *Si* $F = F(t, X)$ *es una función de clase* C^1 *en un abierto* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *y* $(t_0, X_0) \in D$*, entonces el PVI (2) tiene exactamente una solución local.*

El primer teorema es un caso particular del segundo (pero no al revés) pues cualquier EDO en forma normal se puede transformar en un sistema de EDOs en forma normal de primer orden.

Finalmente, usando el primer teorema podemos deducir que las gráficas de dos soluciones diferentes de una EDO en forma normal de primer orden suficientemente regular nunca se cruzan, ni transversal ni tangencialmente. Y con el segundo teorema vemos que tampoco pueden cruzarse las curvas de soluciones diferentes de un sistema de EDOs en forma normal de primer orden autónomo.

Observación. Las gráficas de dos soluciones diferentes de una EDO en forma normal de orden <u>mayor</u> que uno pueden cruzarse. Y también las curvas de soluciones diferentes de un sistema de EDOs en forma normal de primer orden <u>no</u> autónomo.