Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 14 de junio de 2011 *Tiempo total: 3 horas*

Problema 1 [2 puntos]. *Problema computacional. Es importante no cometer errores. Todas las soluciones de la EDO no homogénea son polinomios de grado cuatro. No podeis usar esta información para resolver el problema, sólo podeis usarla para comprobar vuestros cálculos.* ◇

[0.8 p.] a) Resolver la EDO lineal homogénea de segundo orden a coeficientes variables
$$t(t-2)x'' - 2(t-1)x' + 2x = 0$$
usando que $x_1(t) = t^2$ es una solución.

Indicación:
$$\frac{2(t-1)}{t(t-2)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}.$$

[0.4 p.] b) Calcular las infinitas soluciones del PVI correspondiente a la EDO anterior con las condiciones iniciales
$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$$
La existencia de infinitas soluciones no contradice al teorema de existencia y unicidad de soluciones. ¿Por qué?

[0.8 p.] c) Resolver la EDO lineal no homogénea de segundo orden a coeficientes variables
$$t(t-2)x'' - 2(t-1)x' + 2x = t^2(t-2)^2.$$

Solución:

a) Calculamos una segunda solución $x_2(t)$ mediante la fórmula de reducción de orden
$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{\mathrm{e}^{-\int a_1(t)\mathrm{d}t}}{(x_1(t))^2}\mathrm{d}t,$$
siendo $a_1(t)$ el coeficiente que multiplica a la primera derivada en la EDO normalizada. Es decir,
$$a_1(t) = -\frac{2(t-1)}{t(t-2)}.$$
Por tanto,
$$-\int a_1(t)\mathrm{d}t = \int \frac{2(t-1)}{t(t-2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-2} = \log|t| + \log|t-2|.$$
Si, por ejemplo, calculamos la segunda solución en el intervalo $(2,+\infty)$, entonces $\log|t-2| = \log(t-2)$ y $\log|t| = \log t$, con lo cual
$$x_2(t) = t^2\int \frac{\mathrm{e}^{\log|t|+\log|t-2|}}{t^4}\mathrm{d}t = t^2\int \frac{t(t-2)}{t^4}\mathrm{d}t = t^2\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = 1-t.$$
Así pues, la solución general de la EDO homogénea en el intervalo $(2,+\infty)$ viene dada por la combinación lineal
$$x_\mathrm{h}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1t^2 + c_2(1-t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
De hecho, esta expresión es válida en toda la recta real, pues $x_\mathrm{h}(t)$ es un polinomio en la variable t.

b) Al imponer que la solución general cumpla las condiciones iniciales
$$0 = x(0) = c_2, \qquad 0 = x'(0) = -c_2$$
obtenemos que $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ queda libre. Por tanto, la soluciones del PVI son todos los múltiplos de $x_1(t) = t^2$. No existe tal contradicción porque la EDO es singular en $t = 0$, ya que el coeficiente $t(t-2)$ que multiplica a la segunda derivada se anula en $t = 0$.

c) Calculamos una solución particular $x_\mathrm{p}(t)$ aplicando la fórmula de variación de parámetros
$$x_\mathrm{p}(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t), \qquad u_1(t) = -\int \frac{x_2(t)b(t)}{W(t)}\mathrm{d}t, \qquad u_2(t) = \int \frac{x_1(t)b(t)}{W(t)}\mathrm{d}t,$$
siendo $W(t) = W[t^2, 1-t] = t(t-2)$ el Wronskiano del conjunto fundamental $\{x_1(t) = t^2, x_2(t) = 1-t\}$ y $b(t) = t(t-2)$ el término no homogéneo de la EDO normalizada. Operando, se obtiene que
$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{(1-t)t(t-2)}{t(t-2)}\mathrm{d}t = \int (t-1)\mathrm{d}t = t^2/2 - t, \\ u_2(t) &= \int \frac{t^3(t-2)}{t(t-2)}\mathrm{d}t = \int t^2\mathrm{d}t = t^3/3. \end{aligned}$$
Por tanto, $x_\mathrm{p}(t) = t^4/2 - t^3 + t^3/3 - t^4/3 = t^4/6 - 2t^3/3$ y la solución general de la EDO es
$$x_\mathrm{g}(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1t^2 + c_2(1-t) + t^4/6 - 2t^3/3, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Durante estos cálculos se ha supuesto tacitamente que $t \in (2,+\infty)$, pero como $x_\mathrm{g}(t)$ es un polinomio en la variable t, la expresión obtenida es válida en toda la recta real.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**
Fecha: 14 de junio de 2011 *Tiempo total: 3 horas*

Problema 2 [2 puntos]. *Queremos dibujar las elipses que aparecen en el croquis de un sistema lineal 2D con total precisión.* $\diamond$

Consideramos el sistema lineal 2D a coeficientes constantes

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+3 & -5 \\ 5 & \alpha-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

[0.6 p.] a) Estudiar su estabilidad y clasificarlo en función del parámetro α.

[0.4 p.] b) Sabiendo que las trayectorias del sistema recorren elipses cuando $\alpha = 0$, ¿en qué sentido las recorren? ¿y qué periodo tienen?

[1 p.] c) Fijamos el valor $\alpha = 0$. Calcular la solución $(x(t), y(t))$ del PVI correspondiente al sistema con las condiciones iniciales

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = 2.$$

A continuación, encontrar los instantes t en los que la función

$$h(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$$

alcanza su máximo global y su mínimo global. Finalmente, usar el resultado obtenido para dibujar un croquis del sistema, representando de forma precisa los ejes de las elipses.

Solución:

a) Aplicamos el criterio traza-determinante. Notamos que $T = \operatorname{traza} A \equiv 0$, $D = \det A = \alpha^2 + 16 > 0$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\Delta = T^2 - 4D \equiv -64 < 0$. Por tanto, obtenemos que el sistema es un foco asintóticamente estable cuando $\alpha < 0$, un centro (E, no AE) cuando $\alpha = 0$ y un foco inestable cuando $\alpha > 0$.

b) En la posición $(x, y) = (1, 0)$ el sistema tiene velocidad $(x', y') = (3, 5)$, luego el sentido de giro es antihorario. Recordamos que si $\alpha = 0$, entonces $T = 0$ y $D = 16$, luego el polinomio característico es $Q(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 16$ y los VAPs son $\lambda_{1,2} = \pm 4\mathrm{i}$. Por tanto, como el sistema es un centro, sabemos que todas las trayectorias son periódicas de periodo $2\pi/\Im\lambda_1 = 2\pi/4 = \pi/2$.

c) Si $\alpha = 0$, el sistema es un centro con VAPs $\lambda_{1,2} = \pm 4\mathrm{i}$ y VEPs

$$\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \mp 4\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Usando la fórmula de Euler $\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{4t\mathrm{i}} = \cos 4t + \mathrm{i}\sin 4t$ sabemos que

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 = (\cos 4t + \mathrm{i}\sin 4t) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 - 4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 4t + \mathrm{i}5\sin 4t \\ (3\cos 4t + 4\sin 4t) + \mathrm{i}(3\sin 4t - 4\cos 4t) \end{pmatrix}$$

es una solución compleja del sistema. Separando sus partes real e imaginaria obtenemos dos soluciones reales linealmente independientes y así construimos la matriz fundamental real

$$\Phi_{\mathbb{R}}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos 4t & 5\sin 4t \\ 3\cos 4t + 4\sin 4t & 3\sin 4t - 4\cos 4t \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos la solución que cumple las condiciones iniciales:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi_{\mathbb{R}}(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow c_1 = 2/5,\ c_2 = -1/5.$$

Así pues, la trayectoria buscada es

$$p(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos 4t - \sin 4t, 2\cos 4t + \sin 4t).$$

A continuación, buscamos los puntos críticos de la función

$$h(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2 = 8\cos^2 4t + 2\sin^2 4t = 2 + 6\cos^2 4t = 5 + 3\cos 8t.$$

Observamos que $h'(t) = -24\sin 8t = 0$ si y sólo si $t = t_n = n\pi/8$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Además, $h(t_n) = 5 + 3(-1)^n$. Por tanto, la función $h(t)$ alcanza su máximo global en los instantes $t = t_n$ con n par, y su mínimo global en los instantes $t = t_n$ con n impar. En particular, los dos puntos de la trayectoria más alejados del origen son $p(0) = (2, 2)$ y $p(\pi/4) = (-2, -2)$, mientras que los dos puntos más próximos al origen son $p(\pi/8) = (-1, 1)$ y $p(3\pi/8) = (1, -1)$. Esto significa que la trayectoria $p(t)$ recorre una elipse cuyos vértices son esos cuatro puntos, luego la recta $\{y = x\}$ contiene al eje mayor, la recta $\{y = -x\}$ contiene al eje menor y la excentricidad de la elipse es $e = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \sqrt{3}/2$, pues $a = 2\sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$ son los semiejes de la elipse. Estos datos ya permiten dibujar el croquis con total precisión.

Problema 3 [2 puntos]. *Estudiamos un sistema que modela dos especies competitivas. Aunque la suma de puntuaciones de los tres apartados es 2.1, la nota máxima del problema es 2.* ◇

Sean $x(t)$ e $y(t)$ las densidades de población de dos especies aisladas que compiten por un recurso límitado. Suponemos que, en ausencia de una especie, la otra se rige por el modelo de Verhulst (ecuación logística). Modelamos la evolución de las poblaciones mediante el sistema no lineal 2D

$$\left.\begin{array}{rcl} x' & = & x(1-x-y) \\ y' & = & y(2-3x-y)/4 \end{array}\right\}.$$

[1 p.] a) Calcular los <u>cuatro</u> puntos de equilibrio del sistema, clasificar los sistemas linealizados en cada uno y estudiar, si es posible, su estabilidad por el método de linealización.

[0.5 p.] b) La componente x' se anula en el eje vertical y en una recta r, mientras que y' se anula en el eje horizontal y en una recta s. ¿Es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante (el único con sentido biológico), salte a otro cuadrante? Justificar la respuesta. Calcular y dibujar las rectas r y s. Estas rectas dividen el primer cuadrante en cuatro regiones. Describir el signo que tienen las cantidades x' e y' en cada una de estas cuatro regiones e interpretar biológicamente el resultado.

[0.6 p.] c) Consideramos las siguientes interacciones entre dos especies x e y.
Interacción nula: Ninguna de las especies se ve afectada por la otra.
Mutualismo: Ambas especies extraen un beneficio de la presencia de la otra.
Competición: Ambas especies son perjudicadas por la presencia de la otra.
Parasitismo: x extrae un beneficio de y; y es perjudicada por x.
Comensalismo: x estrae un beneficio de y; y no es afectada por x.
Amensalismo: x es perjudicada por y; y no es afectada por x.
Suponemos que, en ausencia de una especie, la otra se rige por el modelo de Verhulst. Cada una de estas seis interacciones se puede modelar por un sistema de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x' = kx(1-x/m+\alpha y) \\ y' = ly(1+\beta x - y/n) \end{array}\right\}$$

donde k y l son las tasas inherentes de crecimiento de las dos especies, mientras que m y n son las poblaciones máximas de cada especie que puede sostener el ecosistema. Por tanto, esos cuatro parámetros son <u>siempre</u> positivos. Decir si los otros dos parámetros, α y β, son positivos, negativos o nulos en cada una de las seis interacciones antes descritas. Justificar las respuestas.

Solución:

a) Los cuatro puntos de equilibrio son $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,2)$ y $C=(1/2,1/2)$. Las matrices de los sistemas linealizados en cada uno de estos puntos son

$$M_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad M_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad M_C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Los VAPs de M_O son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1/2$, luego el punto O es un nodo propio inestable. Los VAPs de M_A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -1/4$, mientras que los VAPs de M_B son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -1/2$, luego A y B son nodos propios asintóticamente estables. Finalmente, los VAPs de M_C son $\lambda_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{57})/16$, luego el punto C es una silla (ergo inestable). La linealización decide la estabilidad en los cuatro casos.

b) El eje horizontal es invariante, pues $y' = 0$ sobre él. El eje vertical también, pues $x' = 0$ sobre él. Por tanto, no es posible salir del primer cuadrante debido al teorema de existencia y unicidad de soluciones. Las rectas son $r \equiv \{y = 1-x\}$ y $s \equiv \{y = 2-3x\}$. La recta r pasa por los puntos $A=(1,0)$ y $D=(0,1)$; la recta s pasa por los puntos $E=(2/3,0)$ y $B=(0,2)$; ambas rectas se intersecan en el punto $C=(1/2,1/2)$. En la región cuadrangular de vértices O, A, B y C tenemos que $x', y' > 0$, luego ambas poblaciones crecen. En la región triangular de vértices B, D y C tenemos que $x' > 0$ e $y' < 0$, luego la primera especie gana la competición. En la región triangular de vértices A, E y C tenemos que $x' < 0$ e $y' > 0$, luego la segunda especie gana la competición. Finalmente, $x', y' < 0$ en la región no acotada que hay por encima de las rectas r y s, luego ambas poblaciones decrecen.

c) El signo de α (respectivamente, β) determina el efecto que tiene la segunda (respectivamente, primera) especie sobre la primera (respectivamente, segunda). Por ejemplo, $\alpha > 0$ significa que x extrae un beneficio de y, $\alpha < 0$ significa que x es perjudicada por y, mientras que $\alpha = 0$ significa que x no se ve afectada por y. La interpretación de β es similar. Por tanto, obtenemos las siguientes conclusiones.
Interacción nula: $\alpha = \beta = 0$.
Mutualismo: $\alpha, \beta > 0$.
Competición: $\alpha, \beta < 0$, como en el sistema estudiado al principio.
Parasitismo: $\alpha > 0$ y $\beta < 0$.
Comensalismo: $\alpha > 0$ y $\beta = 0$.
Amensalismo: $\alpha < 0$ y $\beta = 0$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**
Fecha: 14 de junio de 2011 *Tiempo total: 3 horas*

Problema 4 [2 puntos]. *Queremos entender como depende la frecuencia a la que vibra una cuerda de las características físicas de la cuerda.* $\diamond$

Consideramos la ecuación de una cuerda vibrante de longitud L con condiciones de Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0,L) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,L) \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,L) \\ u(0,t) = 0 & \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ u(L,t) = 0 & \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

[1.4 p.] a) Calcular la solución formal $u(x,t)$ de este problema suponiendo que

$$\sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\pi x/L)$$

es el desarrollo de Fourier en senos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0,L)$.

Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene FUPs trigonométricas.

[0.3 p.] b) La solución anterior es la superposición de infinitos modos normales $u_n(x,t)$. ¿Estos modos normales vibran más rápido cuando la longitud L es grande o pequeña? ¿Y vibran más rápido cuando el parámetro c es grande o pequeño? ¿Y vibran más rápido cuando el índice n es grande o pequeño?

[0.3 p.] c) Calcular explicitamente la solución cuando $L = \pi$ y $f(x) = 1 - \cos(2x)$. A continuación, encontrar el primer instante $t_* > 0$ en el que la cuerda está completamente horizontal.

Indicación: Para calcular las integrales que definen los coeficientes de Fourier b_n de la función $f(x) = 1 - \cos(2x)$ es útil recordar que $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

Solución:

a) Al imponer que la función en variables separadas $u(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, luego
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
- La condición incial $u_t(x,0) = 0$, vemos que $T'(0) = 0$.
- La condición de frontera $u(0,t) = 0$, vemos que $X(0) = 0$.
- La condición de frontera $u(L,t) = 0$, vemos que $X(L) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} T''(t) - c^2\lambda T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}.$$

Empezamos resolviendo el PVF asociado a la función $X(x)$. Nos dicen que sólo busquemos FUPs trigonométricas, luego basta buscar VAPs negativos $\lambda = -\mu^2$. Imponemos que la solución $X_{\mathrm{h}}(x) = c_1 \cos\mu x + c_2 \sin\mu x$ de la EDO $X'' + \mu^2 X = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $0 = X(0) = c_1$ y $0 = X(L) = c_2 \sin\mu L$. Como no queremos que c_2 sea nulo, necesitamos que

$$\sin\mu L = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = n\pi/L,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -(n\pi/L)^2,\ n \geq 1.$$

En la última equivalencia hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 1$, pues los enteros negativos no generan nuevos VAPs. Como $c_1 = 0$, las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n$ son (los múltiplos de)

$$X(x) = X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin(n\pi x/L), \qquad n \geq 1.$$

Después, vemos que la solución general de la EDO $T''(t) + (cn\pi/L)^2 T(t) = 0$ es

$$T(t) = c_1 \cos(cn\pi t/L) + c_2 \sin(cn\pi t/L), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Al imponer la condición inicial $T'(0) = 0$, vemos que $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ queda libre. Trás tomar $c_1 = 1$, que es la opción más simple, obtenemos la familia de funciones

$$T(t) = T_n(t) = \cos(cn\pi t/L), \qquad n \geq 1.$$

Así pues, la solución de la parte homogénea del problema consiste en la superposición de los infinitos modos normales

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = \cos(cn\pi t/L)\sin(n\pi x/L), \qquad n \geq 1.$$

Finalmente, al imponer la condición incial $u(x,0) = f(x)$ en el intervalo $[0,L]$, obtenemos que

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n \cos(cn\pi t/L)\sin(n\pi x/L),$$

donde $b_n \in \mathbb{R}$ son los coeficientes del desarrollo en senos de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,L]$.

b) La frecuencia de vibración del modo normal $u_n(x,t) = \cos(cn\pi t/L)\sin(n\pi x/L)$ es $\omega_n = cn\pi/L$. Por tanto, la vibración es más rápida cuanto mayores son el parámetro c y el índice n y cuanto menor es la longitud L.

c) Los coeficientes del desarrollo en senos vienen dados por las integrales

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(2\sin nx - \sin[(n+2)x] - \sin[(n-2)x]\big)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(2\frac{(-1)^n-1}{n} - \frac{(-1)^{n+2}-1}{n+2} - \frac{(-1)^{n-2}-1}{n-2}\right) \\
&= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right).
\end{aligned}$$

En particular, $b_n = 0$ si n es par, mientras que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-2}\right) = \frac{-16}{\pi(n-2)n(n+2)}$$

si n es impar. Por tanto, la solución pedida es

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n\cos(cnt)\sin(nx) = -\frac{16}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\cos[(2k+1)ct]\sin[(2k+1)x]}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}.$$

Finalmente, buscamos $t_* > 0$ tal que $u(x,t_*) = 0$ en todo punto $x \in (0,\pi)$. Necesitamos pues que todos los términos trigonométricos $\cos[(2k+1)ct_*]$ se anulen, lo cual sucede por primera vez cuando $ct_* = \pi/2$. Es decir, cuando $t_* = \pi/2c$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **Teoría**

Fecha: 14 de junio de 2011 *Tiempo: 30 minutos*

◇ *Lo bueno, si breve, dos veces bueno.* ◇

[2 punto]. En la figura se muestra el retrato de fases de un sistema no lineal 2D autónomo con tres puntos de equilibrio: A, B y C.

a) Clasificar los tres puntos de equilibrio.
b) ¿Existe algún punto de equilibrio que sea asintóticamente estable? En caso afirmativo, decir cuál y señalar su cuenca de atracción en la figura. (Nota: Un punto pertenece a la cuenca de atracción si la trayectoria que empieza en él tiende al punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$.)
c) ¿Existe algún punto de equilibrio que sea un repulsor? (Nota: Repulsor significa que todas las trajectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio, se alejan de él.) En caso afirmativo, decir cuál y explicar si las trayectorias que empiezan cerca de él pueden aproximarse a los otros dos puntos de equilibrio. Justificar las respuestas.
d) ¿Existe alguna solución periódica no constante? En caso afirmativo, señalarla sobre la figura y decir si es inestable, estable o asintóticamente estable. Es decir, describir cómo se comportan las trayectorias cercanas a ella.

Solución:

a) A es un foco asintóticamente estable, B es una silla y C es un foco inestable.
b) A es el único punto de equilibrio asintóticamente estable. Su cuenca de atracción es la región a la izquierda de la curva invariante estable del punto de silla.
c) El punto de silla no es un repulsor, pues existen trayectorias que tienden a él cuando $t \to +\infty$. Por tanto, C es el único repulsor. Debido al teorema de existencia y unicidad, las trayectorias que empiezan cerca de C no pueden superar la barrera que representa la trayectoria marcada en linea gruesa que lo rodea completamente. Por tanto, las trayectorias que empiezan cerca de C no pueden aproximarse ni a A ni a B.
d) La trayectoria marcada en linea gruesa es la única trayectoria periódica no constante que aparece en la figura. Es asintóticamente estable, pues todas las trayectorias que empiezan cerca de ella tienden a ella cuando $t \to +\infty$.