

## Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 25 de junio de 2010

## 4 Problemas (8 puntos)

Tiempo total: 3 horas

**Problema 1 [2 puntos].** Conviene recordar los problemas “Depósito de salmuera” y “Grandes Lagos”. En los primeros apartados se preparan algunos cálculos previos.  $\diamond$

[0.4 p.] a) Resolver la EDO lineal no homogénea de primer orden a coeficientes constantes

$$c'(t) + pc(t) = q,$$

donde  $p > 0$  y  $q \in \mathbb{R}$ . Calcular el límite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$  en función de  $p$  y  $q$ .

[0.6 p.] b) Resolver la EDO lineal no homogénea de primer orden a coeficientes constantes

$$c'(t) + pc(t) = \beta e^{-lt},$$

donde  $l, p > 0$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ . Distinguir los casos  $l \neq p$  y  $l = p$ . Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$ .

[0.5 p.] c) Estudiamos la evolución de la concentración de sal en tres depósitos conectados según la figura adjunta que se ajustan a los siguientes condiciones:

- Sus volúmenes  $V_1, V_2, V_3$  (metros cúbicos) se mantienen constantes; y
- Las entradas a los dos primeros depósitos tienen caudales  $r_1$  y  $r_2$  (metros cúbicos por hora) y concentraciones  $e_1$  y  $e_2$  (kilogramos por metro cúbico).

¿Cuáles son los tres caudales de salida? Sean  $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$  las concentraciones de sal en el instante  $t$ . Plantear el sistema de EDOs lineales no homogéneas de primer orden a coeficientes constantes que cumplen estas concentraciones.

[0.5 p.] d) Usar los primeros apartados para calcular los límites de las tres concentraciones cuando el tiempo tiende a infinito en función de los caudales y concentraciones de entrada. Comprobar que no dependen de las concentraciones que hay inicialmente en los depósitos. Interpretar estos límites físicamente.

Solución:

- a) La solución de la EDO homogénea  $c'(t) = -pc(t)$  es  $c_h(t) = ke^{-pt}$  con  $k \in \mathbb{R}$  libre. Buscamos una solución particular de la forma  $c_p(t) = a$ , donde  $a$  es un coeficiente a determinar imponiendo que  $c_p(t)$  cumpla la EDO no homogénea:  $q = c_p'(t) + pc_p(t) = pa \Rightarrow c_p(t) = a = q/p$ . Por tanto, la solución general de la EDO cumple que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c_g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_p(t) + c_h(t)) = q/p + \lim_{t \rightarrow +\infty} ke^{-pt} = q/p.$$

- b) Si  $l \neq p$ , buscamos una solución particular  $c_p(t) = be^{-lt}$ . El coeficiente  $b$  se determina imponiendo

$$\beta e^{-lt} = c_p'(t) + pc_p(t) = (p-l)be^{-lt} \Rightarrow c_p(t) = be^{-lt} = \beta e^{-lt}/(p-l).$$

Por tanto, la solución general de la EDO cumple que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c_g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_p(t) + c_h(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta e^{-lt}/(p-l) + \lim_{t \rightarrow +\infty} ke^{-pt} = 0.$$

Si  $l = p$ , el coeficiente de la solución particular  $c_p(t) = bte^{-pt}$  se determina imponiendo

$$\beta e^{-pt} = c_p'(t) + pc_p(t) = bte^{-pt} \Rightarrow c_p(t) = bte^{-pt} = \beta te^{-pt}.$$

Por tanto, la solución general de la EDO cumple que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c_g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c_p(t) + c_h(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta te^{-pt} + \lim_{t \rightarrow +\infty} ke^{-pt} = 0.$$

- c) Si los volúmenes se mantienen constantes, los caudales de salida son  $r_1, r_2$  y  $r_3 = r_1 + r_2$ .

Las cantidades de sal relacionadas con los dos primeros depósitos en el instante  $t$  son las siguientes:  $V_j c_j(t)$  en el interior,  $r_j e_j$  entrada por unidad de tiempo y  $r_j c_j(t)$  salida por unidad de tiempo. Por tanto,  $V_j c_j'(t) = (V_j c_j(t))' = r_j e_j - r_j c_j(t)$ . Así pues, obtenemos las EDOs lineales de primer orden

$$c_j'(t) + p_j c_j(t) = q_j, \quad p_j = r_j/V_j, \quad q_j = e_j p_j, \quad j = 1, 2.$$

Las cantidades en el tercer depósito son:  $V_3 c_3(t)$  en el interior,  $r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t)$  entrada por unidad de tiempo y  $r_3 c_3(t)$  salida por unidad de tiempo. Por tanto,  $V_3 c_3'(t) = r_1 c_1(t) + r_2 c_2(t) - r_3 c_3(t)$ . Así pues, obtenemos la EDO lineal de primer orden

$$c_3'(t) + p_3 c_3(t) = r_1 c_1(t)/V_3 + r_2 c_2(t)/V_3, \quad p_3 = r_3/V_3.$$

- d) En el primer apartado vimos que la solución general de las EDOs asociadas a los primeros depósitos son

$$c_j(t) = q_j/p_j + k_j e^{-p_j t} = e_j + k_j e^{-p_j t}, \quad k_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2.$$

En particular,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c_j(t) = e_j$  para  $j = 1, 2$ . Substituyendo las soluciones generales  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  en la tercera EDO, vemos que

$$c_3'(t) + p_3 c_3(t) = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/V_3 + r_1 k_1 e^{-p_1 t}/V_3 + r_2 k_2 e^{-p_2 t}/V_3 = q_3 + \beta_1 e^{-p_1 t} + \beta_2 e^{-p_2 t},$$

donde  $q_3 = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/V_3$ ,  $\beta_j = r_j k_j/V_3$  y  $k_j \in \mathbb{R}$ . De los primeros apartados deducimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c_3(t) = q_3/p_3 = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/r_3 = (r_1 e_1 + r_2 e_2)/(r_1 + r_2).$$

La interpretación es la siguiente. La concentración de sal en los dos primeros depósitos tiende a igualarse a la concentración de sus respectivas entradas, pues estas entradas son únicas y fluyen con concentración constante. En cambio, la concentración en el tercer depósito tiende a una media ponderada de las concentraciones límite de sus dos entradas:  $e_1$  y  $e_2$ . Los coeficientes que cuantifican la ponderación son los respectivos caudales de entrada.

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales****4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 25 de junio de 2010

Tiempo total: 3 horas

**Problema 2 [2 puntos].** Problema puramente computacional que requiere reducir un sistema lineal a coeficientes constantes y usar después la fórmula de variación de parámetros.  $\diamond$

Consideramos el sistema lineal no homogéneo a coeficientes variables

$$\frac{dX}{dt} = tAX + F(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad F(t) = 2te^{-t^2} \begin{pmatrix} \cos t^2 + \sin t^2 \\ -2 \sin t^2 \end{pmatrix}.$$

[0.5 p.] a) Probar que el cambio de variables  $s = t^2$  transforma el sistema anterior en un sistema lineal no homogéneo a coeficientes constantes de la forma

$$\frac{dX}{ds} = BX + G(s).$$

Calcular la matriz  $B$  y la función  $G(s)$ .

[0.6 p.] b) Clasificar el sistema lineal homogéneo  $\frac{dX}{ds} = BX$ . Calcular la matriz exponencial  $e^{sB}$  y comprobar que  $\text{traza}[e^{sB}] = 2e^{-s} \cos s$ .

[0.6 p.] c) Calcular una solución particular del sistema no homogéneo  $\frac{dX}{ds} = BX + G(s)$  aplicando la fórmula de variación de parámetros.

[0.3 p.] d) Escribir la solución general del sistema inicial.

**Solución:**

a) Aplicando la regla de la cadena vemos que

$$tAX + F(t) = \frac{dX}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{dX}{ds} = 2t(BX + G(s)).$$

Por tanto,  $B = A/2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$  y  $G(s) = F(t)/2t = \begin{pmatrix} \cos s + \sin s \\ -2 \sin s \end{pmatrix} e^{-s}$ .

b) Como  $T = \text{traza } B = -2 < 0$ ,  $D = \det B = 2 > 0$  y  $\Delta = T^2 - 4D = -4 < 0$ , el sistema lineal asociado a la matriz  $B$  es un foco (asintóticamente) estable. Su polinomio característico es  $P_B(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ , luego los VAPs son  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$  y los VEPs son

$$\vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \pm i \end{pmatrix} = \vec{u} \pm \vec{w}i, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, usando la forma de Jordan real, vemos que

$$\begin{aligned} e^{sB} &= S_{\mathbb{R}} e^{sJ_{\mathbb{R}}} S_{\mathbb{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{-s} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s + \sin s & \sin s \\ -2 \sin s & \cos s - \sin s \end{pmatrix} e^{-s}. \end{aligned}$$

c) La fórmula de variación de parámetros nos da la solución particular

$$\begin{aligned} X_p(s) &= e^{sB} \int e^{-sB} F(s) ds = e^{sB} \int \begin{pmatrix} \cos s - \sin s & -\sin s \\ 2 \sin s & \cos s + \sin s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s + \sin s \\ -2 \sin s \end{pmatrix} ds \\ &= e^{sB} \int \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = e^{sB} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s + \sin s \\ -2 \sin s \end{pmatrix} s e^{-s}. \end{aligned}$$

d) La solución general del sistema  $\frac{dX}{ds} = BX + G(s)$  es

$$X_g(s) = X_h(s) + X_p(s) = e^{sB} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + X_p(s) = \begin{pmatrix} (c_1 + s)(\cos s + \sin s) + c_2 \sin s \\ -2(c_1 + s) \sin s + c_2(\cos s - \sin s) \end{pmatrix} e^{-s},$$

donde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  son libres. Y obtenemos la solución general del sistema inicial deshaciendo el cambio de variables:

$$X_g(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + t^2) \cos t^2 + (c_1 + c_2 + t^2) \sin t^2 \\ c_2 \cos t^2 - (2c_1 + c_2 + 2t^2) \sin t^2 \end{pmatrix} e^{-t^2}.$$

## Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 25 de junio de 2010

## 4 Problemas (8 puntos)

Tiempo total: 3 horas

**Problema 3 [2 puntos].** Todos los apartados de este problema son independientes. Se pueden hacer en cualquier orden.  $\diamond$

Consideramos el sistema de Rössler

$$\left. \begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x + ay \\ z' &= (x - b)z + c \end{aligned} \right\}.$$

Es un sistema no lineal 3D que depende de tres parámetros reales  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

- [0.5 p.] a) Calcular los puntos críticos del sistema cuando  $a \neq 0$ . El número de puntos críticos depende de los parámetros. Por ejemplo, hay uno si  $a = 1$ ,  $b = 2$  y  $c = 1$ ; dos si  $a = 1$ ,  $b = 5$  y  $c = 4$ ; y ninguno si  $a = b = c = 1$ .
- [0.5 p.] b) Calcular el único punto crítico del sistema cuando  $a = c = 0$  y  $b \neq 0$ . Estudiar, para los valores de  $b \neq 0$  en que sea posible, su estabilidad por el método de linealización.
- [0.5 p.] c) Calcular los infinitos puntos críticos del sistema cuando  $a = b = c = 0$ . Estudiar la estabilidad del sistema no lineal por el método de linealización en todos los puntos críticos donde sea posible.
- [0.5 p.] d) Supongamos que  $a > 0$  y  $b = c$ . Si una trayectoria parte de un punto del plano  $x = b$  tal que  $y \neq 0$ , ¿inicialmente se acerca o aleja del origen?

Indicación: Derivar respecto al tiempo la función  $V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ .

Solución:

- a) Los puntos críticos tienen velocidad cero:  $x' = y' = z' = 0$ . De la ecuación  $x' = 0$ , obtenemos que  $z = -y$ . De la ecuación  $y' = 0$ , obtenemos que  $x = -ay$ . Substituyendo estos valores en la ecuación  $z' = 0$ , obtenemos que

$$0 = (x - b)z + c = ay^2 + by + c.$$

Sea  $\Delta = b^2 - 4ac$  el discriminante de esta ecuación de segundo grado. Entonces:

- Si  $\Delta < 0$ , no existen puntos críticos;
- Si  $\Delta = 0$ , existe un único punto crítico:  $(b/2, -b/2a, b/2a)$ .
- Si  $\Delta > 0$ , existen dos puntos críticos:  $(x_+, y_+, z_+)$  y  $(x_-, y_-, z_-)$ , donde

$$x_{\pm} = -ay_{\pm} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}, \quad y_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_{\pm} = -y_{\pm} = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- b) Cuando  $a = 0$ , la ecuación  $y' = 0$  implica que  $x = 0$ . Ahora, usando que  $c = 0$  y  $b \neq 0$ , la ecuación  $z' = 0$  implica que  $0 = (x - b)z = -bz$ , luego  $z = 0$ . Finalmente, la ecuación  $x' = 0$  implica que  $y = 0$ . Por tanto, el origen es el único punto crítico. La matriz del sistema linealizado en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z_0 & 0 & x_0 - b \end{pmatrix}.$$

Substituyendo el parámetro  $a = 0$  y el punto  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ , la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Desarrollando por la última fila, su polinomio característico es  $Q_A(\lambda) = -(\lambda + b)(\lambda^2 + 1)$ . Por tanto, los VAPs son  $\lambda_1 = -b$  y  $\lambda_{2,3} = \pm i$ . Entonces:

- Si  $b < 0$ , existe un VAP positivo y el SNL es inestable en el origen; pero
- Si  $b \geq 0$ , la linealización no decide la estabilidad del SNL en el origen.

- c) Cuando  $a = b = c = 0$ , las ecuaciones de los puntos críticos son

$$y + z = 0, \quad x = 0, \quad xz = 0.$$

Existen infinitas soluciones:  $(0, y_0, -y_0)$ ,  $y_0$  libre. La matriz del sistema linealizado en  $(0, y_0, -y_0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -y_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es  $Q_A(\lambda) = -\lambda^3 + y_0\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 + 1 - y_0)$ . Entonces:

- Si  $y_0 > 1$ ,  $\lambda = \sqrt{y_0 - 1}$  es un VAP positivo y el SNL es inestable en  $(0, y_0, -y_0)$ ;
- Si  $y_0 = 1$ ,  $\lambda = 0$  es un VAP triple y la linealización no decide la estabilidad del SNL;
- Si  $y_0 < 1$ , todos los VAPs tienen parte real nula y la linealización no decide la estabilidad del SNL.

- d)  $V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$  cuantifica la distancia al origen. Su derivada temporal es

$$\frac{dV}{dt} = xx' + yy' + zz' = -(y + z)x + (x + ay)y + (x - b)z^2 + cz = (c - x)z + (x - b)z^2 + ay^2 = ay^2.$$

Al final hemos usado que  $x = b = c$ . Además,  $a > 0$  y  $y \neq 0$ , luego la derivada temporal es positiva, el valor de  $V(x, y, z)$  inicialmente crece y la trayectoria se aleja del origen.

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales****4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 25 de junio de 2010

Tiempo total: 3 horas

**Problema 4 [2 puntos].** Estudiamos el comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito de la temperatura en un alambre circular de longitud  $2L$ , como en un problema del tema EDPs.  $\diamond$

Consideramos el PVI de calor 1D con condiciones de contorno "periódicas"

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (-L, L) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (-L, L) & \\ u(-L, t) = u(L, t) & & t > 0 \\ u_x(-L, t) = u_x(L, t) & & t > 0 \end{cases} .$$

En esta formulación la variable  $x$  se mueve sobre una circunferencia de longitud  $2L$ . Así pues, las posiciones  $x = -L$  y  $x = L$  representan el mismo punto de la circunferencia. Por tanto, temperatura y flujo coinciden en esas posiciones.

[0.5 p.] a) Dada una solución  $u(x, t)$  del PVI, calcular la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(x, t) dx.$$

Interpretar físicamente la función  $T(t)$  y el resultado obtenido.

[0.4 p.] b) Encontrar los equilibrios térmicos del problema. Es decir, las temperaturas que cumplen la EDP y las condiciones de contorno, pero que no dependen del tiempo.

[0.8 p.] c) Calcular  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$  en función de  $f(x)$ . Interpretar físicamente el resultado.

Indicación: Suponiendo que conocemos el desarrollo de Fourier

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)$$

de la temperatura inicial, imponer directamente que la serie formal

$$u(x, t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)$$

cumpla el PVI, sin seguir el método de separación de variables, pues es demasiado largo.

[0.3 p.] d) ¿Se tiende más rápidamente al límite anterior cuándo la longitud  $L$  del alambre es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuándo la constante  $k^2$  es grande o pequeña? ¿Y se tiende más rápidamente cuándo el índice  $n$  del modo normal es grande o pequeño?

Solución:

a) La función  $T(t)$  es el promedio de la temperatura en el instante  $t$ . Su derivada es nula, pues

$$T'(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_t(x, t) dx = \frac{k^2}{2L} \int_{-L}^L u_{xx}(x, t) dx = k^2 (u_x(L, t) - u_x(-L, t)) / 2L = 0.$$

Interpretación: Un alambre circular no tiene extremos, luego el calor no puede escaparse por ningún sitio y la temperatura promedio se mantiene constante.

b) Imponemos que  $u(x, t) = v(x)$  cumpla la EDP:  $0 = u_t = k^2 u_{xx} = k^2 v''(x)$ , luego  $v''(x) = 0$  y obtenemos las temperaturas lineales  $v(x) = ax + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Imponemos las condiciones de frontera:  $-aL + b = v(-L) = v(L) = aL + b$  y  $a = v'(-L) = v'(L) = a$ , luego  $a = 0$  y  $b \in \mathbb{R}$  queda libre. Por tanto, los únicos equilibrios térmicos son las temperaturas constantes.

c) Al imponer que la serie formal cumpla la EDP  $u_t = k^2 u_{xx}$  vemos que

$$\alpha_0'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n'(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n'(t) \sin(n\pi x/L) = -\sum_{n=1}^{\infty} (k\pi n/L)^2 (\alpha_n(t) \cos(n\pi x/L) + \beta_n(t) \sin(n\pi x/L)).$$

Por tanto, hemos de resolver las infinitas EDOs

$$\alpha_0'(t) = 0, \quad \alpha_n'(t) = -(k\pi n/L)^2 \alpha_n(t), \quad \beta_n'(t) = -(k\pi n/L)^2 \beta_n(t).$$

Si ahora imponemos la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  vemos que

$$\alpha_0(0) = a_0/2, \quad \alpha_n(0) = a_n, \quad \beta_n(0) = b_n.$$

Las soluciones de los infinitos PVIs obtenidos al juntar las EDOs y las c.i. son

$$\alpha_0(t) = a_0/2, \quad \alpha_n(t) = a_n e^{-(k\pi n/L)^2 t}, \quad \beta_n(t) = b_n e^{-(k\pi n/L)^2 t}.$$

Por tanto, la solución formal del PVI que nos han dado es

$$u(x, t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(k\pi n/L)^2 t} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)).$$

Finalmente,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = a_0/2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ , pues las exponenciales tienen a cero.

Interpretación: 1) El calor tiende a distribuirse uniformemente, luego la temperatura tiende a un valor constante; y 2) Ese valor constante coincide con el promedio de la temperatura inicial.

d) Los exponentes  $-(k\pi n/L)^2$  de las exponenciales son más negativos, luego se tiende más rápido al límite, cuanto mayores son la constante  $k^2$  y el índice  $n$ , y cuanto menor es la longitud  $L$ .

# Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 25 de junio de 2010

Teoría

Tiempo: 30 minutos

◇ Lo bueno, si breve, dos veces bueno. ◇

[1 punto]. Sea  $A$  una matriz con VAPs  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  y  $\lambda_3 = 0$  y VEPs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$ .

- Dar tres rectas invariantes del sistema  $X' = AX$  y describir la dinámica sobre cada una.
- Dibujar un croquis aproximado del sistema  $X' = AX$  suponiendo que la base de VEPs es la base natural:  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ .

Solución:

- Las tres rectas  $r_j = [\vec{v}_j]$  son invariantes. La primera es de salida (VAP positivo), la segunda de entrada (VAP negativo) y la tercera es de puntos críticos (VAP nulo).
- Se dibujan las tres rectas con las flechas correspondientes. El sistema es una silla en el plano  $z = 0$  y en todos los planos paralelos a ese.

[1 punto]. Consideramos la ecuación de la cuerda vibrante infinita

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vimos que todas las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct),$$

donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son dos funciones arbitrarias. Interpretar físicamente este resultado. ¿Cuál es el significado de la constante  $c$ ?

Solución: La interpretación es que la solución es la superposición (suma) de dos ondas que viajan a lo largo de la cuerda a velocidad  $c$  en sentidos opuestos. La onda  $p(x + ct)$  se desplaza hacia la izquierda y la onda  $q(x - ct)$  hacia la derecha. En particular,  $c$  es la velocidad (horizontal) a la que se desplazan ambas ondas.

