

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales****4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 26 de junio de 2009

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

**Problema 1 [2 puntos].** Es un problema computacional, luego es crucial no cometer errores de cálculo. La comprobación al final del segundo apartado permite detectar los errores más comunes.  $\diamond$

[0.8 p.] a) Calcular la solución general de la EDO lineal no homogénea

$$x''' - x'' + 2x = e^{-t}.$$

[0.4 p.] b) Sea  $\alpha \neq -1$ . Calcular la única solución de la EDO lineal no homogénea

$$x''' - x'' + 2x = e^{\alpha t}$$

que se anula en el origen y es una combinación lineal de las funciones  $e^{-t}$  y  $e^{\alpha t}$ . Comprobar que esa solución tiende, cuando  $\alpha \rightarrow -1$ , a alguna solución particular de la EDO del primer apartado.

[0.6 p.] c) Calcular todos los valores  $T > 0$  tales que el PVF lineal homogéneo

$$\begin{cases} x''' - x'' + 2x = 0 \\ x(0) = x(-T) = x(T) = 0 \end{cases}$$

tiene alguna solución no trivial.

(Indicación:  $\cosh t > 1$  para todo  $t > 0$ .)

[0.2 p.] d) Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$  un instante arbitrario. Explicar, sin calcular nada, porqué el PVI

$$\begin{cases} x''' - x'' + 2x = 0 \\ x(t_0) = x'(t_0) = x''(t_0) = 0 \end{cases}$$

no tiene ninguna solución no trivial.

Solución:

a) La tabla del polinomio característico  $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$  es

Raíces	Mult.	Funciones
-1	1	$e^{-t}$
$1 \pm i$	1	$e^t \cos t, e^t \sin t$

Por tanto,  $x_h(t) = c_1 e^{-t} + e^t(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$ , con  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  libres.

El polinomio  $P_1(\lambda) = \lambda + 1$  anula a cualquier múltiplo de la función  $e^{-t}$ . La tabla del polinomio producto  $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$  es

Raíces	Mult.	Funciones
-1	2	$e^{-t}, te^{-t}$
$1 \pm i$	1	$e^t \cos t, e^t \sin t$

El candidato a solución particular es la combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la primera:  $x_p(t) = c_4 t e^{-t}$ , siendo  $c_4$  un coeficiente a determinar mediante la EDO no homogénea:

$$e^{-t} = x_p''' - x_p'' + 2x_p = 5c_4 e^{-t} \Rightarrow c_4 = 1/5 \Rightarrow x_p(t) = te^{-t}/5.$$

Por tanto,  $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = (c_1 + t/5)e^{-t} + e^t(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$ , con  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

b) Primero imponemos que la combinación lineal  $x(t) = ae^{-t} + be^{\alpha t}$  cumpla la EDO:

$$e^{\alpha t} = x''' - x'' + 2x = P(-1)ae^{-t} + P(\alpha)be^{\alpha t} \Rightarrow b = 1/P(\alpha) \Rightarrow x(t) = ae^{-t} + e^{\alpha t}/P(\alpha), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Después imponemos que se anule en el origen:

$$0 = x(0) = a + 1/P(\alpha) \Rightarrow a = -1/P(\alpha) \Rightarrow x(t) = (e^{\alpha t} - e^{-t})/P(\alpha).$$

Finalmente, calculamos el límite aplicando el criterio de l'Hôpital:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} x(t) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{e^{\alpha t} - e^{-t}}{P(\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow -1} \frac{te^{\alpha t}}{P'(\alpha)} = te^{-t}/5 = x_p(t).$$

c) Al imponer que la función  $x_h(t) = c_1 e^{-t} + e^t(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$  cumpla las tres condiciones de frontera se obtiene el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x(0) = 0 \\ c_1 e^T + c_2 e^{-T} \cos(-T) + c_3 e^{-T} \sin(-T) = x(-T) = 0 \\ c_1 e^{-T} + c_2 e^T \cos T + c_3 e^T \sin T = x(T) = 0 \end{cases}.$$

Este sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^T & e^{-T} \cos T & -e^{-T} \sin T \\ e^{-T} & e^T \cos T & e^T \sin T \end{vmatrix} = (2 \cos T - e^{2T} - e^{-2T}) \sin T = 2(\cos T - \cosh 2T) \sin T$$

es igual a cero. En principio, existen dos posibilidades para que este producto se anule:

- $\sin T = 0 \Rightarrow T = n\pi$  para algún entero  $n \geq 1$ , pues  $T > 0$ .
- $\cos T = \cosh 2T$ , lo cual es imposible pues  $\cos T \leq 1$  y  $\cosh 2T > 1$  para todo  $T > 0$ .

Resumiendo, el PVF tiene soluciones no triviales si y sólo si  $T = n\pi$ , para  $n \geq 1$  entero.

- d) Sabemos por el teorema de existencia y unicidad para EDOs lineales en forma normal que este PVI tiene exactamente una única solución  $x(t)$  definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, como la función trivial  $x(t) \equiv 0$  es una solución, no existe ninguna otra solución.

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales****4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 26 de junio de 2009

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

**Problema 2 [2 puntos].** Es un problema no estándar, pues aparecen VAPs complejos no conjugados. Se desaconseja usar la fórmula de Euler, aunque el problema contiene alguna exponencial compleja. En el tercer apartado se puede (pero no se pide) chequear la matriz principal mirando si su determinante cumple la fórmula de Liouville.  $\diamond$

Consideramos las matrices a coeficientes variables

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos 2t & -1 + \sin 2t \\ 1 + \sin 2t & 1 - \cos 2t \end{pmatrix}, \quad S(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal a coeficientes constantes

$$D = \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

- [0.3 p.] a) Calcular la matriz exponencial  $e^{tD}$ . El sistema lineal a coeficientes constantes  $Y' = DY$ , ¿es estable, inestable o asintóticamente estable? Justificar la respuesta.
- [0.4 p.] b) Probar que el cambio  $X = S(t)Y$  transforma el sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$  en el sistema lineal a coeficientes constantes  $Y' = DY$ .  
(Indicación: Usar, sin probarla, la relación  $S'(t) = A(t)S(t) - S(t)D$ .)
- [0.4 p.] c) Usar el cambio anterior y la matriz exponencial  $e^{tD}$  para calcular la matriz principal del sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$ .  
(Observación: La matriz principal es una matriz real.)
- [0.4 p.] d) El sistema lineal a coeficientes variables  $X' = A(t)X$ , ¿tiene alguna solución que escapa a infinito?, ¿tiene alguna solución acotada no nula?, ¿tiene alguna solución periódica no nula? En caso afirmativo, dar ejemplos y el periodo.
- [0.5 p.] e) Resolver el PVI lineal no homogéneo  $X' = A(t)X + b(t)$ ,  $X(0) = X_0$ , donde

$$b(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} \sin t \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

- a) Calcular la exponencial de una matriz diagonal es simple:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{(2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema  $Y' = DY$  es inestable pues el VAP  $\lambda_1 = 2 + i$  tiene parte real positiva.

- b) Derivando el cambio  $X = S(t)Y$ , obtenemos que  $X' = S'(t)Y + S(t)Y'$ , luego

$$S'(t)Y + S(t)Y' = X' = A(t)X = A(t)S(t)Y \Rightarrow S(t)Y' = (A(t)S(t) - S'(t))Y = S(t)DY.$$

Y multiplicando ambos lados de la última ecuación por la inversa de  $S(t)$ , se llega al sistema  $Y' = DY$ .

- c) Por tanto, usando el cambio de variables, deducimos que

$$\Psi(t) = S(t)e^{tD} = e^{-it} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} e^{it} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -\sin t \\ e^{2t} \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema  $X' = A(t)X$  y, de hecho, resulta ser la matriz principal, pues  $\Psi(0) = \text{Id}$ . (Efectivamente, su Wronskiano  $W(t) = \det[\Psi(t)] = e^{2t}$  cumple la fórmula de Liouville  $W'(t) = \alpha(t)W(t)$ , pues  $\alpha(t) = \text{traza}[A(t)] = 2$ .)

- d) La solución general del sistema homogéneo a coeficientes variables  $X' = A(t)X$  es

$$X_h(t) = \Psi(t)\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 e^{2t} \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Existen soluciones que espiralan hacia infinito, basta tomar  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 = 0$ . También existen soluciones acotadas y periódicas, basta tomar  $c_1 = 0$  y  $c_2 \neq 0$ . El periodo es  $2\pi$ .

e) Aplicamos la fórmula de variación de parámetros:

$$\begin{aligned} X(t) &= \Psi(t) \left( X_0 + \int_0^t \Psi(s)^{-1} b(s) ds \right) \\ &= \Psi(t) \left( X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s & -e^{-2s} \sin s \\ \sin s & e^{-2s} \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \cos s \\ e^{2s} \sin s \end{pmatrix} ds \right) \\ &= \Psi(t) \left( X_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -\sin t \\ e^{2t} \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+3)e^{2t} \cos t - 4 \sin t \\ (t+3)e^{2t} \sin t + 4 \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 4 Problemas (8 puntos)

Fecha: 26 de junio de 2009

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

**Problema 3 [2 puntos].** Este problema es la continuación natural del estudio del péndulo sin fricción (caso  $a = 0$ ) que se ha explicado en clase.  $\diamond$

La EDO que modela el movimiento de un péndulo con fricción es

$$\theta'' + a\theta' + c \sin \theta = 0,$$

donde  $\theta(t)$  es el ángulo que forma el péndulo con la vertical,  $a = k/m > 0$  es el cociente entre el coeficiente de fricción y la masa del péndulo, mientras que  $c = g/l > 0$  es el cociente entre la fuerza de la gravedad y la longitud del péndulo.

[0.25 p.] a) Escribir esta EDO de segundo orden como un sistema no lineal 2D de primer orden, introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ .

[1 p.] b) Calcular todas las posiciones de equilibrio del péndulo y estudiar, si es posible, su estabilidad por el método de linealización.

[0.25 p.] c) Calcular la función  $W(\theta, \omega)$  que se obtiene al derivar la energía mecánica total

$$V(\theta, \omega) = \frac{ml^2\omega^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta)$$

respecto al tiempo.

[0.5 p.] d) Deducir que la energía mecánica nunca crece. ¿A lo largo de qué trayectorias se mantiene constante la energía? Razonar porqué el péndulo con fricción no posee ninguna trayectoria periódica no constante. Se admiten razonamientos físicos, siempre que sean completos.

Solución:

a) Introduciendo la velocidad angular  $\omega = \theta'$ , reescribimos la EDO anterior como el sistema no lineal 2D autónomo de primer orden

$$\begin{cases} \theta' &= \omega \\ \omega' &= -a\omega - c \sin \theta \end{cases}.$$

b) Buscamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \theta' = \omega = 0 \\ \omega' = -a\omega - c \sin \theta = 0 \end{array} \right\} \implies (\theta, \omega) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Estos puntos de equilibrio corresponden a las posiciones de equilibrio inferior (si  $n$  es par) y superior (si  $n$  es impar) del péndulo.

La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio  $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$  es igual a

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c \cos \theta & -a \end{pmatrix}_{(\theta, \omega) = (n\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}c & -a \end{pmatrix}.$$

Si  $n$  es impar,  $\det A_n = (-1)^n c = -c < 0$  y el sistema linealizado es una silla, luego el péndulo con fricción es inestable en la posición de equilibrio superior. En cambio, si  $n$  es par, entonces  $\det A_n = (-1)^n c = c > 0$  y traza  $A_n = -a < 0$ . Por tanto, mediante el criterio traza-determinante se deduce que el péndulo con fricción es asintóticamente estable en la posición de equilibrio inferior. (En el péndulo sin fricción vimos que la linealización sólo decide la estabilidad de la posición de equilibrio superior.)

c) La derivada respecto al tiempo de la energía mecánica total es

$$\begin{aligned} W(\theta, \omega) &= \frac{d}{dt} \{V(\theta, \omega)\} = \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \omega)\theta' + \frac{\partial V}{\partial \omega}(\theta, \omega)\omega' \\ &= mgl\omega \sin \theta - ml^2 c \omega \sin \theta - ml^2 a \omega^2 = -kl^2 \omega^2 \leq 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $a = k/m$ ,  $c = g/l$  y  $k > 0$ .

d) Esta derivada nunca es positiva, luego la energía mecánica nunca crece. Además, si a lo largo de una trayectoria esta energía se mantiene constante, entonces la función  $W(\theta, \omega) = -kl^2 \omega^2$  debe ser idénticamente nula. Es decir, la velocidad angular debe ser idénticamente nula, lo cual significa que el péndulo permanece parado en alguna de sus dos posiciones de equilibrio. Sólo en esas posiciones es constante la energía mecánica.

Si existiera alguna trayectoria periódica que no fuera una posición de equilibrio, la energía mecánica a lo largo de esa trayectoria no sería constante sino que fluctuaría de forma periódica, lo cual es imposible, pues hemos visto que la energía nunca crece.

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales****4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 26 de junio de 2009

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

**Problema 4 [2 puntos].** En este problema se pide resolver una ecuación de ondas 1D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas mediante dos métodos diferentes y (opcionalmente) comprobar que las dos soluciones obtenidas coinciden.  $\diamond$

[0.75 p.] a) Calcular, aplicando la fórmula de D'Alembert, la solución del PVI

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función  $f(x) = 2 \sin x$  y la cuerda está inicialmente en reposo. Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Continuando con una cuerda inicialmente en reposo, ¿qué propiedades debe tener la posición inicial  $f(x)$  para poder asegurar que la solución del PVI obtenida mediante la fórmula de D'Alembert cumple esas dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet?

(Indicación: Sabemos que  $f(x) = 2 \sin x$  tiene esas propiedades.)

[1.25 p.] b) Calcular, aplicando el método de separación de variables, la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cuando la posición inicial viene dada por la función  $f(x) = 2 \sin x$

(Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene VAPs negativos.)

[0 p.] c) Comprobar que las soluciones obtenidas en los apartados anteriores coinciden.

Solución:

a) Tenemos que  $f(x) = 2 \sin x$  y, como inicialmente la cuerda está en reposo,  $g(x) = 0$ . Por tanto, aplicando la fórmula de D'Alembert, obtenemos la solución

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \sin(x+ct) + \sin(x-ct).$$

Comprobamos que se cumplen las dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \sin(ct) + \sin(-ct) = \sin(ct) - \sin(ct) = 0 \\ u(\pi, t) &= \sin(\pi+ct) + \sin(\pi-ct) = \sin(ct+\pi) - \sin(ct-\pi) = 0. \end{aligned}$$

En la primera línea hemos usado que la función seno es impar, mientras que en la segunda hemos usado que, además, es  $2\pi$ -periódica.

Cuando la posición inicial  $f(x)$  es arbitraria y la velocidad inicial  $g(x)$  es nula, la solución obtenida mediante la fórmula D'Alembert es

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}.$$

Veamos que se necesita para que esta solución cumpla las dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet. En primer lugar, queremos que

$$0 = u(0, t) = \frac{f(ct) + f(-ct)}{2} \Rightarrow f(-ct) = -f(ct) \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ es impar.}$$

En segundo lugar, usando que ya sabemos que  $f$  es impar, vemos que

$$0 = u(\pi, t) = \frac{f(\pi+ct) + f(\pi-ct)}{2} = \frac{f(ct+\pi) - f(ct-\pi)}{2} \Rightarrow f \text{ es } 2\pi\text{-periódica.}$$

Por tanto, la posición inicial  $f(x)$  debe ser impar y  $2\pi$ -periódica.

b) Al imponer que la función en variables separadas  $u(x, t) = X(x)T(t)$  cumpla:

- La ecuación  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , se obtiene que  $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$ , luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición inicial  $u_t(x, 0) = 0$ , vemos que  $T'(0) = 0$ .
- La condición de frontera  $u(0, t) = 0$ , vemos que  $X(0) = 0$ .
- La condición de frontera  $u(\pi, t) = 0$ , vemos que  $X(\pi) = 0$ .

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}.$$

Empezamos resolviendo el PVF asociado a la función  $X(x)$ . Nos dicen que no existen VAPs positivos o nulos. Para encontrar sus VAPs negativos  $\lambda = -\mu^2$ , imponemos que la solución  $X_h(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$  de la EDO  $X'' + \mu^2 X = 0$  cumpla las condiciones de frontera:  $0 = X(0) = c_1$  y  $0 = X(\pi) = c_2 \sin \mu \pi$ . Como no queremos que  $c_2$  sea nulo, necesitamos que

$$\sin \mu \pi = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = n, \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -n^2, \quad n \geq 1.$$

En la última equivalencia hemos pasado de  $n \in \mathbb{Z}$  a los enteros  $n \geq 1$ , pues los enteros negativos no generan nuevos VAPs. Como  $c_1 = 0$ , las FUPs de VAP  $\lambda = \lambda_n$  son (los múltiplos de) las funciones trigonométricas

$$X(x) = X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin nx, \quad n \geq 1.$$

Después, vemos que la solución general de la EDO  $T'' + n^2 c^2 T = 0$  es

$$T(t) = c_1 \cos(cnt) + c_2 \sin(cnt), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Al imponer la condición inicial  $T'(0) = 0$ , vemos que  $c_2 = 0$  y  $c_1 \in \mathbb{R}$  queda libre. Trás tomar  $c_1 = 1$ , que es la opción más simple, obtenemos la familia de funciones

$$T(t) = T_n(t) = \cos(cnt), \quad n \geq 1.$$

Así pues, la solución de la parte homogénea del problema inicial se puede expresar como la serie formal

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} b_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \cos(nct) \sin(nx)$$

donde los coeficientes  $b_n \in \mathbb{R}$  quedan determinados al imponer que se cumpla la condición

$$2 \sin x = u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx) \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = 0, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

Y la solución del problema completo es la función  $u(x, t) = 2T_1(t)X_1(x) = 2 \cos(ct) \sin x$ .

c) De las fórmulas trigonométricas correspondientes al ángulo suma se deduce la identidad

$$\sin(x + ct) + \sin(x - ct) = 2 \cos(ct) \sin x.$$

## Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 26 de junio de 2009

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[1 punto].

- Sea  $\vec{v}$  un VEP de VAP  $\lambda$  de una matriz cuadrada  $A$ . Probar que la función

$$X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

es solución del sistema  $X' = AX$ .

- Sea  $\lambda$  un VAP de una matriz cuadrada  $A$ . Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos vectores tales que

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \vec{v}, \quad A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Probar que la función

$$Y(t) = e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v})$$

es otra solución del sistema  $X' = AX$ .

Solución:

- Como  $\vec{v}$  es un VEP de VAP  $\lambda$  de la matriz  $A$ , sabemos que  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Por tanto,

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} \lambda \vec{v} = e^{\lambda t} A \vec{v} = A e^{\lambda t} \vec{v} = AX(t).$$

Hemos usado que la posición de los escalares en una cadena de productos es indiferente.

- Derivando la función  $Y(t)$  vemos que

$$Y'(t) = \lambda e^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v}) + e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t}(\lambda\vec{u} + t\lambda\vec{v} + \vec{v}) = e^{\lambda t}(A\vec{u} + tA\vec{v}) = e^{\lambda t}A(\vec{u} + t\vec{v}) = Ae^{\lambda t}(\vec{u} + t\vec{v}) = AY(t).$$

[1 punto].

- Escribir la ecuación de ondas 1D.
- Escribir la ecuación del calor 1D.
- El cambio de variables

$$u(x, t) = e^{w(x, t)}$$

transforma la EDP no lineal de segundo orden

$$w_t = w_{xx} + (w_x)^2$$

en una ecuación de ondas 1D o en una ecuación del calor 1D. Decir en cuál de las dos y probarlo.

Solución:

- La EDP de ondas 1D es  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , donde  $c > 0$  es un parámetro que fija la velocidad de las ondas.
- La EDP de calor 1D es  $u_t = k^2 u_{xx}$ , donde  $k > 0$  es un parámetro que depende de las propiedades físicas del material.
- Pasamos a estudiar la EDP  $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$ . Necesitamos calcular las derivadas parciales de la “nueva” función  $u(x, t)$  en función de las derivadas parciales de la “vieja” función  $w(x, t)$ .

Aplicando repetidamente la regla de la cadena, vemos que

$$\begin{aligned} u_x &= w_x e^w, \\ u_{xx} &= (w_{xx} + (w_x)^2) e^w, \\ u_t &= w_t e^w = (w_{xx} + (w_x)^2) e^w = u_{xx}. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado la EDP  $w_t = w_{xx} + (w_x)^2$ . Por tanto, la “nueva” función  $u(x, t)$  cumple la ecuación del calor  $u_t = k^2 u_{xx}$ , con  $k = 1$ .