

**Problema A (10 puntos).**

[2 p.] a) Calculad la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x - 2x = 0.$$

[2 p.] b) Calculad la solución general la ecuación diferencial lineal no homogénea a coeficientes constantes

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x - 2x = e^t.$$

[3 p.] c) Sea  $L > 0$ . Probad que el problema

$$\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} + 4x - 2x = 0 \\ x(0) = x(L) = x(-L) = 0 \end{cases}$$

tiene soluciones no triviales si y sólo si  $L = L_n = n\pi$  para algún entero  $n \geq 1$ .

[3 p.] d) Suponiendo que  $L = L_n = n\pi$ , encontrad todas las soluciones del problema anterior. (Indicación: la respuesta depende de la paridad de  $n$ .)

Solución:

a) El polinomio característico de la edo homogénea es  $P(m) = m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = (m-1)(m^2 - 2m + 2)$ . Sus raíces son  $m_1 = 1$  y  $m_{2,3} = 1 \pm i$ . Por tanto, la solución de la edo homogénea es

$$x_h(t) = e^t(c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t) \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Al buscar una solución particular  $x_p(t)$  de la edo no homogénea por el método de los coeficientes indeterminados, obtenemos que  $x_p(t) = c_4 t e^t$ , donde el coeficiente  $c_4 \in \mathbb{R}$  se determina imponiendo que la función  $x_p(t)$  cumpla la edo:  $e^t = \ddot{x}_p - 3\dot{x}_p + 4x_p - 2x_p = c_4 e^t$ .

Así pues,  $c_4 = 1$  y  $x_p(t) = t e^t$ . La solución general de la edo no homogénea es

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^t(c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + t) \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

c) Al imponer que la solución  $x_h(t)$  cumpla las condiciones  $x_h(0) = x_h(L) = x_h(-L) = 0$ , obtenemos el sistema lineal homogéneo  $A\vec{c} = \vec{0}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^L & e^L \cos L & e^L \sin L \\ e^{-L} & e^{-L} \cos L & -e^{-L} \sin L \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Este sistema lineal homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$0 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^L & e^L \cos L & e^L \sin L \\ e^{-L} & e^{-L} \cos L & -e^{-L} \sin L \end{vmatrix} = \sin L \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(L) & 1 \\ 1 & \cos(L) & -1 \end{vmatrix} = 2 \sin L \cdot (1 - \cos L).$$

Hemos probado que  $\det A = 0 \Leftrightarrow \sin L = 0$  o  $\cos L = 1$ . La condición  $\cos L = 1$  implica  $\sin L = 0$ . Por tanto, basta estudiar cuando  $\sin L = 0$  y, teniendo en cuenta que  $L > 0$ , vemos que:

$$\sin L = 0 \Leftrightarrow L = L_n = n\pi \text{ para algún entero } n \geq 1.$$

d) Caso  $n = 2s + 1$ :  $\sin n\pi = 0$  y  $\cos n\pi = -1$ , luego el sistema lineal  $A\vec{c} = \vec{0}$  queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{n\pi} & -e^{n\pi} & 0 \\ e^{-n\pi} & -e^{-n\pi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de este sistema son  $c_1 = c_2 = 0$  y  $c_3 \in \mathbb{R}$  libre. Por tanto, las soluciones del problema del apartado anterior son  $x_n(t) = c_3 e^t \sin t$  con  $c_3 \in \mathbb{R}$ .

Caso  $n = 2s$ :  $\sin n\pi = 0$  y  $\cos n\pi = 1$ , luego el sistema lineal  $A\vec{c} = \vec{0}$  queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{n\pi} & e^{n\pi} & 0 \\ e^{-n\pi} & e^{-n\pi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de este sistema son  $c_1 = -c_2$  y  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  libres. Por tanto, las soluciones del problema del apartado anterior son  $x_n(t) = e^t(c_2(\cos t - 1) + c_3 \sin t)$  con  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

**Problema B (10 puntos).** Dada una función  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$ , consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y}(x, y). \end{cases}$$

- [2 p.] a) Sea  $(x(t), y(t))$  una solución del sistema. Probad que  $\frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) \leq 0$ .  
 [2 p.] b) Sea  $(x(t), y(t))$  una solución del sistema. Probad que  $\frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) = 0 \Leftrightarrow (x(t), y(t))$  es un punto de equilibrio del sistema.  
 [6 p.] c) Supongamos ahora que  $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ . Estudiad la estabilidad del punto de equilibrio  $(1/2, 0)$  por el método de linealización. Estudiad la estabilidad de los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  por el método de Liapounov.

Solución:

- a) Supongamos que  $(x(t), y(t))$  es una solución del sistema:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Entonces, aplicando la regla de la cadena, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))\right)^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

- b) Supongamos de nuevo que  $(x(t), y(t))$  es una solución del sistema. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(x(t), y(t))) = 0 &\iff -\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t))\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t))\right)^2 = 0 \\ &\iff \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) = 0 \\ &\iff \dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0 \\ &\iff (x(t), y(t)) \text{ es un punto de equilibrio del sistema.} \end{aligned}$$

- c) Cuando  $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$ , el sistema es  $\begin{cases} \dot{x} &= -2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} &= -2y. \end{cases}$

Método de linealización: La matriz del SL entorno  $(1/2, 0)$  es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Para estudiar la estabilidad usaremos el criterio Traza-Determinante. Como

$$T = \text{traza } A = -1 < 0 \quad D = \det A = -2 < 0$$

el punto  $(T, D) = (-1, -2)$  está en el tercer cuadrante, luego el SNL es inestable en el punto  $(1/2, 0)$ .

Método de Liapounov: Trabajaremos con la función  $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$  y con su derivada temporal  $W(x, y) = \dot{V}(x, y) = -4(x^2(x-1)^2(2x-1) + y^2)$ .

La función  $V(x, y)$  sólo se anula en dos puntos:  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . En todos los otros puntos es positiva. Por tanto,  $V(x, y)$  es una función definida positiva en los dos puntos de equilibrio que queremos estudiar mediante el método de Liapounov.

La función  $W(x, y)$  sólo se anula en tres puntos:  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 0)$  y  $(1, 0)$ . En los otros puntos es negativa. Por tanto,  $W(x, y)$  es una función definida negativa en los dos puntos de equilibrio que deseamos estudiar por el método de Liapounov (también en el otro, pero eso no nos importa).

Así pues, el SNL es asintóticamente estable en los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .

**Examen Final de Ecuaciones Diferenciales (I. Q.)**

*Fecha: 19 de junio de 2002*

**Teoría**

*Tiempo: 30 minutos*

---

---

**Tema (10 puntos).** Estabilidad de puntos críticos de sistemas no lineales por el método de linealización (definición de punto crítico, idea del método de linealización y el teorema de estabilidad por linealización).