

- (10 punts)

(a) Considereu el sistema lineal d'equacions diferencials ordinàries de primer ordre

$$Y' = A(x)Y + B(x). \quad (1)$$

Si  $\Phi(x)$  és una matriu fonamental d'aquest sistema, deduiu l'expressió d'una solució particular de (1) mitjançant el mètode de variació de paràmetres.

(b) Considerem l'equació diferencial ordinària lineal de segon ordre

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

Transformeu aquesta equació diferencial ordinària en un sistema lineal del tipus (1) i utilitzeu els càlculs de l'apartat (a) per a donar una solució particular de (2), suposant conegudes dues solucions independents de la seva part homogènia,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ .

A. (10 punts)

(a) Demostreu que si  $x(t)$  és solució de l'equació diferencial ordinària homogènia

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

i  $y(t) \neq 0$  és solució de l'equació diferencial ordinària homogènia

$$y' + r(t)y = 0 \quad (4)$$

aleshores  $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$  és solució de l'equació diferencial ordinària homogènia

$$z'' + (p(t) - 2r(t))z' + (q(t) + r(t)^2 - p(t)r(t) - r'(t))z = 0 \quad (5)$$

(b) Triant convenientment  $p(t)$ ,  $q(t)$  i  $r(t)$  en l'apartat (a), trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària homogènia

$$z'' + (-3 + 2 \cos t)z' + (2 + \cos^2 t - 3 \cos t - \sin t)z = 0.$$

(c) Trobeu la solució general de l'equació diferencial ordinària NO homogènia

$$z'' + (-3 + 2 \cos t)z' + (2 + \cos^2 t - 3 \cos t - \sin t)z = e^{-\sin t}.$$

Solució:

(A.a) De (4) tenim  $y' = -ry$ . Per tant,

$$z' = \frac{x'y - xy'}{y^2} = \frac{x'}{y} + rz.$$

Llavors,  $x' = yz' - yrz$ . De (3) tenim  $x'' = -px' - qx = -p(yz' - yrz) - qx$ . Per tant,

$$z'' = \frac{x''y - x'y'}{y^2} + r'z + rz' = -p(z' - rz) - qz + (z' - rz)r + r'z + rz'.$$

Així:  $z'' + (p - 2r)z' + (-pr + q + r^2 - r')z = 0$ .

(A.b) És clar que cal prendre:  $p = -3$ ,  $r = -\cos t$  i  $q = 2$ . L'equació (3) queda  $x'' - 3x' + 2x = 0$ . La seva equació característica és  $m^2 - 3m + 2 = 0$ , que té les arrels  $m = 1$  i  $m = 2$ . Per tant,  $x(t) = Ae^t + Be^{2t}$ . Per altra banda (4) queda  $y' - (\cos t)y = 0$  (equació diferencial de variables separables), que té per solució  $y(t) = Ce^{\int \cos t dt} = Ce^{\sin t}$ . Així  $z(t) = c_1e^{t-\sin t} + c_2e^{2t-\sin t}$ .

(A.c) Usant el mètode de variació dels paràmetres amb  $f(t) = e^{-\sin t}$ ,  $z_1(t) = e^{t-\sin t}$  i  $z_2(t) = e^{2t-\sin t}$  tenim:

$$W(t) = \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{t-\sin t} & e^{2t-\sin t} \\ e^{t-\sin t}(1 - \cos t) & e^{2t-\sin t}(2 - \cos t) \end{vmatrix} = e^{3t-2\sin t},$$

$$u_1(t) = -\int \frac{f(t)z_2(t)}{W(t)} dt = -\int \frac{e^{-\sin t}e^{2t-\sin t}}{e^{3t-2\sin t}} dt = -\int e^{-t} dt = e^{-t},$$

$$u_2(t) = \int \frac{f(t)z_1(t)}{W(t)} dt = \int \frac{e^{-\sin t}e^{t-\sin t}}{e^{3t-2\sin t}} dt = \int e^{-2t} dt = -e^{-2t}/2,$$

$$z_p(t) = u_1(t)z_1(t) + u_2(t)z_2(t) = e^{-t}e^{t-\sin t} - e^{-2t}e^{2t-\sin t}/2 = e^{-\sin t}/2.$$

Per tant, la solució general buscada és  $z(t) = c_1e^{t-\sin t} + c_2e^{2t-\sin t} + e^{-\sin t}/2$ .

**B.** (10 punts)

**B.1** Resoleu el problema de valors frontera per a l'equació de Cauchy-Euler:

$$\begin{cases} x^2 X''(x) + xX'(x) = \lambda X(x), & 1 < x < e \\ X'(1) = 0 \\ X'(e) = 0 \end{cases}$$

(Indicació: Podeu fer servir el canvi de variable  $x = e^s$  o bé buscar solucions del tipus  $x^m$ )

**B.2** Resoleu pel mètode de separació de variables el problema següent:

$$\begin{cases} u_t = x^2 u_{xx} + x u_x, & 1 < x < e, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 7 \cos(2\pi \ln x) \\ u_x(1, t) = 0 \\ u_x(e, t) = 0 \end{cases}$$

Solució:

**(B.1)** Buscant solucions del tipus  $X(x) = x^m$  tenim que  $m(m-1) + m - \lambda = m^2 - \lambda = 0$ .

*Cas 1:*  $\lambda = \mu^2 > 0$ . Tenim  $X(x) = c_1 x^\mu + c_2 x^{-\mu}$ . Llavors les condicions de frontera donen el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mu & -\mu \\ \mu e^{\mu-1} & -\mu e^{-\mu-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El determinat de la matriu del sistema és  $\mu^2(e^\mu - e^{-\mu})/e$  que és no nul quan  $\mu \neq 0$ . Per tant, en aquest cas només hi ha la solució trivial.

*Cas 2:*  $\lambda = \lambda_0 = 0$ . Llavors l'arrel  $m = 0$  és doble i tenim  $X(x) = c_1 + c_2 \ln x$ . Les condicions de frontera donen:  $0 = X'(1) = c_2$  i  $0 = X'(e) = c_2/e$ . Per tant,  $c_2 = 0$  i  $X(x) = X_0(x) = c_1$  és solució no trivial amb  $c_1$  lliure.

*Cas 3:*  $\lambda = -\mu^2 < 0$ . Ara les arrels són  $m = \pm \mu i$ . Tenim  $X(x) = c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x)$ . Les condicions de frontera donen:  $0 = X'(1) = c_2 \mu$  (per tant,  $c_2 = 0$ ), i  $0 = X'(e) = -c_1 \frac{\mu \sin \mu}{e}$ . Les solucions no trivials són  $X_k(x) = c_1 \cos(k\pi \ln x)$ ,  $\mu_k = k\pi$ ,  $\lambda_k = -k^2 \pi^2$  amb  $k \in \mathbb{N}$  i  $c_1$  lliure.

**(B.2)** El problema homogeni associat és:

$$\begin{cases} u_t = x^2 u_{xx} + x u_x, & 1 < x < e, \quad t > 0 \\ u_x(1, t) = 0 \\ u_x(e, t) = 0 \end{cases}$$

Fem separació de variables  $u(x, t) = X(x)T(t)$  i obtenim els problemes:

$$\begin{cases} x^2 X''(x) + xX'(x) = \lambda X(x) \\ X'(1) = 0 \\ X'(e) = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \{T' - \lambda T = 0$$

Usant l'apartat (B.1) tenim  $\lambda_k = -k^2 \pi^2$ ,  $X_k(x) = \cos(k\pi \ln x)$  i  $T_k(t) = e^{-k^2 \pi^2 t}$ , amb  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 0$ . Per tant, la solució general del problema homogeni és:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-k^2 \pi^2 t} \cos(k\pi \ln x).$$

La solució del problema no homogeni a més ha de complir:

$$7 \cos(2\pi \ln x) = u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 1 \cdot \cos(k\pi \ln x).$$

Clarament,  $a_2 = 7$  i  $a_k = 0$  per a tot  $k \neq 2$ . Llavors la solució del problema no homogeni és:

$$u(x, t) = 7e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi \ln x).$$