Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 14 de enero de 2011 *Tiempo total: 2 horas 50 minutos*

Problema 1 [2 puntos]. *Es un problema estándar puramente computacional.* $\diamond$

[1.5 p.] a) Resolver la EDO lineal no homogénea a coeficientes constantes

$$x''' - 7x'' + 16x' - 12x = (4 + 18t - 12t^2)\mathrm{e}^{2t}.$$

Indicación 1: e^{2t} es una solución de la EDO homogénea.

Indicación 2: Al calcular la solución particular podeis usar que las derivadas de $x(t) = Q(t)\mathrm{e}^{2t}$ son $x'(t) = (Q'(t) + 2Q(t))\mathrm{e}^{2t}$, $x''(t) = (Q''(t) + 4Q'(t) + 4Q(t))\mathrm{e}^{2t}$ y $x'''(t) = (Q'''(t) + 6Q''(t) + 12Q'(t) + 8Q(t))\mathrm{e}^{2t}$.

[0.5 p.] b) Sea $x(t)$ la solución del PVI formado por la EDO anterior y las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x_1, \qquad x''(0) = x_2.$$

¿Qué relación deben cumplir x_0, x_1 y x_2 para que $\mathrm{e}^{-2t}x(t)$ sea un polinomio? Comprobar que los valores $x_0 = 1$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ cumplen esa relación.

Solución:

a) Aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

- *Paso 1: Resolver la EDO homogénea.*
  La tabla del polinomio $P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
2	2	$\mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}$
3	1	e^{3t}

  Por tanto, $x_\mathrm{h}(t) = (c_1 + c_2t)\mathrm{e}^{2t} + c_3\mathrm{e}^{3t}$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.
- *Paso 2: Encontrar un polinomio $P_1(\lambda)$ que anule a $b(t) = (4 + 18t - 12t^2)\mathrm{e}^{2t}$.*
  El polinomio $P_1(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ anula a cualquier función de la forma e^{2t} por un polinomio de grado menor o igual que dos.
- *Paso 3: Construir un candidato a solución particular usando el producto $P(\lambda)P_1(\lambda)$.*
  La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda - 2)^5(\lambda - 3)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
2	5	$\mathrm{e}^{2t}, t\mathrm{e}^{2t}, \underline{t^2\mathrm{e}^{2t}, t^3\mathrm{e}^{2t}, t^4\mathrm{e}^{2t}}$
3	1	e^{3t}

  Nuestro candidato a solución particular es la combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la primera: $x_\mathrm{p}(t) = Q(t)\mathrm{e}^{2t}$, siendo $Q(t) = c_4t^2 + c_5t^3 + c_6t^4$ un polinomio a determinar.
- *Paso 4: Determinar $Q(t)$ imponiendo que $x_\mathrm{p}(t)$ cumpla la EDO.*

$$\begin{aligned}(4 + 18t - 12t^2)\mathrm{e}^{2t} &= x_\mathrm{p}'''(t) - 7x_\mathrm{p}''(t) + 16x_\mathrm{p}'(t) - 12x_\mathrm{p}(t)\\ &= \left(Q'''(t) - Q''(t)\right)\mathrm{e}^{2t}\\ &= \left((6c_5 - 2c_4) + 3(8c_6 - 2c_5)t - 12c_6t^2\right)\mathrm{e}^{2t}.\end{aligned}$$

  Al igualar los coeficientes que corresponden a las funciones e^{2t}, $t\mathrm{e}^{2t}$ y $t^2\mathrm{e}^{2t}$ obtenemos un sistema lineal 3×3 cuya solución es $c_4 = 1$, $c_5 = 1$ y $c_6 = 1$.

Finalmente, la solución general de la EDO es

$$x_\mathrm{g}(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = (c_1 + c_2t + t^2 + t^3 + t^4)\mathrm{e}^{2t} + c_3\mathrm{e}^{3t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Basta determinar el coeficiente c_3 imponiendo que la solución general cumpla las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_3 &= x(0) = x_0\\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= x'(0) = x_1\\ 4c_1 + 4c_2 + 2 + 9c_3 &= x''(0) = x_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow c_3 = 4x_0 - 4x_1 + x_2 - 2.$$

Finalmente, la función $\mathrm{e}^{-2t}x(t)$ es un polinomio si y sólo si

$$4x_0 - 4x_1 + x_2 - 2 = c_3 = 0.$$

Problema 2 [2 puntos]. *Este problema es una continuación del estudio del péndulo de Wilberforce sin fricción que se explicó en clase usando un video de Youtube.* $\diamond$

Una masa colgando de un muelle flexible en forma de espiral puede oscilar en modo vertical (arriba y abajo) o torsional (girando), existiendo un pequeño acoplamiento entre estos dos tipos de movimiento. Al tener en cuenta los términos de fricción, las EDOs lineales de segundo orden que modelan este movimiento son

$$\left\{ \begin{array}{c} my'' + \mu_1 y' + \nu_1 y + \epsilon\theta = 0 \\ I\theta'' + \mu_2\theta' + \nu_2\theta + \epsilon y = 0 \end{array} \right. .$$

Aquí, $y(t)$ denota el desplazamiento vertical, $\theta(t)$ denota el desplazamiento torsional, m es la masa, I es el momento de inercia, μ_1 es el coeficiente de fricción vertical, μ_2 es el coeficiente de fricción torsional, ν_1 es la constante de Hooke vertical, ν_2 es la constante de Hooke torsional y $\epsilon \in \mathbb{R}$ es el coeficiente de acoplamiento.

[0.5 p.] a) Estiramos la masa desde su posición de equilibrio trivial hasta alcanzar un cierto desplazamiento vertical y_0, sin girarla, y la soltamos. Dar el desplazamiento torsional θ_0, la velocidad vertical z_0 y la velocidad torsional ω_0 en el instante inicial. Calcular la aceleración vertical y la aceleración torsional en el instante inicial.

[0.4 p.] b) Escribir las dos EDOs de segundo orden como un sistema lineal 4D de primer orden, introduciendo la velocidad vertical $z = y'$ y la velocidad torsional $\omega = \theta'$.

[0.6 p.] c) Calcular la función $W(y, z, \theta, \omega)$ que se obtiene al derivar la energía mecánica

$$V(y, z, \theta, \omega) = \frac{mz^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{\nu_1 y^2}{2} + \frac{\nu_2\theta^2}{2} + \epsilon y\theta$$

respecto el tiempo.

[0.5 p.] d) Deducir que la energía mecánica nunca crece. ¿A lo largo de qué trayectorias se mantiene constante la energía? Razonar porqué el péndulo de Wilberforce con fricción no posee ninguna trayectoria periódica no constante.

Solución:

a) No hemos girado la masa, luego $\theta_0 = 0$. Al soltar la masa no existe empuje inicial, luego $z_0 = y'(0) = 0$ y $\omega_0 = \theta'(0) = 0$. Las aceleraciones iniciales se encuentran despejando las segundas derivadas de las EDOs que modelan el problema:

$$\begin{array}{rcl} y''(0) &=& -\nu_1 y(0)/m - \mu_1 y'(0)/m - \epsilon\theta(0)/m = -\nu_1 y_0/m \\ \theta''(0) &=& -\nu_2\theta(0)/I - \mu_2\theta'(0)/I - \epsilon y(0)/I = -\epsilon y_0/I. \end{array}$$

b) Introduciendo las nuevas funciones incógnita $z = y'$ y $\omega = \theta'$, transformamos las dos EDOs en el sistema lineal 4D de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& z \\ z' &=& -\nu_1 y/m - \mu_1 z/m - \epsilon\theta/m \\ \theta' &=& \omega \\ \omega' &=& -\nu_2\theta/I - \mu_2\omega/I - \epsilon y/I \end{array} \right. .$$

c) La derivada respecto el tiempo de la energía mecánica es

$$\begin{array}{rcl} W(y,z,\theta,\omega) &=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{V(y,z,\theta,\omega)\} \\ &=& \frac{\partial V}{\partial y}(y,z,\theta,\omega)y' + \frac{\partial V}{\partial z}(y,z,\theta,\omega)z' + \frac{\partial V}{\partial \theta}(y,z,\theta,\omega)\theta' + \frac{\partial V}{\partial \omega}(y,z,\theta,\omega)\omega' \\ &=& (\nu_1 y + \epsilon\theta)y' + mzz' + (\nu_2\theta + \epsilon y)\theta' + I\omega\omega' \\ &=& (\nu_1 y + \epsilon\theta)z - z(\nu_1 y - \mu_1 z - \epsilon\theta) + (\nu_2\theta + \epsilon y)\omega - \omega(\epsilon y + \nu_2\theta + \mu_2\omega) \\ &=& -(\mu_1 z^2 + \mu_2\omega^2). \end{array}$$

d) Esta derivada nunca es positiva, luego la energía mecánica nunca crece. Además, si a lo largo de una trayectoria esta energía se mantiene constante, entonces la función $W(y, z, \theta, \omega) = -(\mu_1 z^2 + \mu_2\omega^2)$ debe ser idénticamente nula. Es decir, tanto la velocidad vertical $z = y'$ como la velocidad torsional $\omega = \theta'$ deben ser nulas, lo cual significa que el péndulo no se mueve. Sólo en ese caso es constante la energía mecánica.

Si existiera alguna trayectoria periódica no constante, la energía mecánica a lo largo de esa trayectoria no sería constante sino que fluctuaría de forma periódica, lo cual es imposible, pues hemos visto que la energía nunca crece.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 14 de enero de 2011 *Tiempo total: 2 horas 50 minutos*

Problema 3 [2 puntos]. *Todos los apartados son independientes, luego se pueden hacer en cualquier orden. Algunos casos se estudian en dos o tres apartados usando técnicas diferentes, lo cual sirve para comprobar si los resultados obtenidos son correctos.* $\diamond$

El origen es un punto de equilibrio del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x' &=& (\alpha + x^2 + y^2)x \\ y' &=& \beta y + (\alpha + x^2 + y^2)y^3 \end{array}\right\}.$$

Es un sistema no lineal 2D que depende de dos parámetros reales α y β.

[0.6 p.] a) Estudiar la estabilidad del origen por el método de linealización.

[0.7 p.] b) Estudiar la estabilidad del origen por el método de Liapunov cuando $\beta = 0$ usando la función $V(x,y) = (x^2 + y^2)/2$.

[0.4 p.] c) Si $\alpha = 0$, entonces el sistema tiene una solución de la forma

$$x(t) = c(1-t)^r, \qquad y(t) = 0,$$

para alguna constante $c > 0$ y algún exponente $r \in \mathbb{R}$. Calcular c y r. Calcular $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to 1^-} x(t)$. Razonar, de forma intuitiva a partir de esta solución, cuál es la estabilidad del origen.

[0.3 p.] d) Dibujar aproximadamente el campo de vectores del sistema en el caso $\alpha = \beta = 0$. Razonar, de forma intuitiva a partir del dibujo, cuál es la estabilidad del origen.

Solución:

a) La matriz del sistema linealizado en el origen es diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

luego sus VAPs son siempre reales: $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = \beta$. Por tanto:

- Si $\alpha > 0$ o $\beta > 0$, entonces el SNL es inestable en el origen; y
- Si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, entonces el SNL es asintóticamente estable en el origen.

b) La función $V(x,y) = (x^2+y^2)/2$ es definida positiva en el origen. Ahora calculamos su derivada temporal recordando que $\beta = 0$:

$$W(x,y) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(x,y) = xx' + yy' = (\alpha + x^2 + y^2)(x^2 + y^4) = W_1(x,y)W_2(x,y),$$

donde $W_1(x,y) = \alpha + x^2 + y^2$ y $W_2(x,y) = x^2 + y^4$. El segundo factor es definido positivo en el origen. En cambio, el primer factor es definido positivo en el origen cuando $\alpha \geq 0$ y definido negativo en el origen cuando $\alpha < 0$. Por tanto:

- Si $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$, entonces el SNL es inestable en el origen; y
- Si $\alpha < 0$ y $\beta = 0$, entonces el SNL es asintóticamente estable en el origen.

c) Al imponer que las funciones $x(t) = c(1-t)^r$ y $y(t) = 0$ sean soluciones del SNL en el caso $\alpha = 0$, vemos que la segunda ecuación se cumple de forma inmediata pues $y(t) \equiv 0$, mientras que la primera ecuación nos da la constante y el exponente que buscamos:

$$-cr(1-t)^{r-1} = x'(t) = (x(t)^2 + y(t)^2)x(t) = x(t)^3 = c^3(1-t)^{3r} \Rightarrow r = -1/2, c = 1/\sqrt{2}.$$

En particular, $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t\to 1^-} x(t) = +\infty$. Esto significa que la trajectoria $(x(t), y(t))$ sale del origen y escapa a infinito moviéndose sobre el eje de abcisas. Por tanto, el SNL es inestable en el origen cuando $\alpha = 0$.

d) Si $\alpha = \beta = 0$, las ecuaciones del SNL son

$$x' = (x^2 + y^2)x, \qquad y' = (x^2 + y^2)y^3.$$

El campo de vectores se obtiene dibujando la velocidad (x', y') en varias posiciones (x,y). Como $x^2 + y^2 > 0$ en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$, resulta que todas las trayectorias del primer cuadrante se mueven hacia la derecha y hacia arriba, todas las del segundo se mueven hacia la izquierda y hacia arriba, todas las del tercero hacia la izquierda y hacia abajo, y todas las del cuarto hacia la derecha y hacia abajo. Por tanto, el SNL es inestable en el origen cuando $\alpha = \beta = 0$, pues todas las trajectorias se alejan del origen.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 14 de enero de 2011 *Tiempo total: 2 horas 50 minutos*

Problema 4 [2 puntos]. *Es un problema estándar de separación de variables. El PVF del primer apartado no es ninguno de los estudiados en clase.* ◇

[1. p.] a) Calcular los VAPs y las FUPs del PVF lineal homogéneo de segundo orden

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad X'(0) = 0, \quad X(0) = X(\pi).$$

Indicación: Podeis usar que este PVF no tiene VAPs positivos.

[1. p.] b) Resolver el PVI del calor 1D con condiciones de contorno mixtas en una barra de longitud π dado por

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0,\pi) \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \qquad\qquad\quad t > 0 \end{cases}$$

siendo $f(x) = 1 + 2\cos 4x$ la temperatura inicial. Hay cuatro puntos en la barra donde la temperatura no cambia. ¿Cuáles son?

Solución:

a) Empezamos buscando los VAPs negativos: $\lambda = -\mu^2 < 0$, con $\mu > 0$. Imponemos que la solución $X_{\rm h}(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ de la EDO $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $\mu c_2 = X'(0) = 0$ y $c_1 = X(0) = X(\pi) = c_1 \cos \mu\pi + c_2 \sin \mu\pi$. Como no queremos que c_1 sea nulo, necesitamos que

$$\cos \mu\pi = 1 \Rightarrow \mu = \mu_n = 2n,\ n \geq 1 \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -4n^2,\ n \geq 1.$$

Hemos descartado los enteros $n \leq 0$, pues $\mu > 0$. Como $c_2 = 0$, las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n$ son (los múltiplos de) las funciones trigonométricas

$$X_n(x) = \cos \mu_n x = \cos 2nx, \qquad n \geq 1.$$

Finalmente, estudiamos el caso $\lambda = 0$. Al imponer que la solución $X_{\rm h}(x) = c_1 + c_2 x$ de la EDO $X''(x) = 0$ cumpla las condiciones de frontera, obtenemos que $c_2 = X'(0) = 0$ y $c_1 = X(0) = X(\pi) = c_1 + c_2\pi$. Por tanto, existen soluciones no triviales de la forma $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ libre. En particular, $\lambda_0 = 0$ es un VAP y todas sus FUPs son múltiplos de la función constante $X_0(x) = 1$.

Podemos expresar estos resultados en forma compacta diciendo que los infinitos VAPs (y sus correspondientes FUPs) son $\lambda_n = -4n^2$ y $X_n(x) = \cos 2nx$, con $n \geq 0$.

b) Al imponer que la función $u(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $u_t = k^2 u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$, luego
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
- La condición de frontera $u(0,t) = u(\pi,t)$, vemos que $X(0) = X(\pi)$.
- La condición de frontera $u_x(0,t) = 0$, vemos que $X'(0) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = 0 = X(0) - X(\pi) \end{cases}, \qquad \{T'(t) = k^2 \lambda T(t).$$

El PVF asociado a la función $X(x)$ coincide con el resuelto en el apartado anterior. Sus VAPs y FUPs son $\lambda_n = -4n^2$ y $X_n(x) = \cos 2nx$, $n \geq 0$. Después, resolviendo la ecuación $T'(t) = k^2\lambda T(t)$ para $\lambda = -4n^2$, obtenemos las funciones $T_n(t) = {\rm e}^{-4k^2n^2t}$. Así pues, la solución de la parte homogénea del problema inicial se puede expresar como la serie formal $u(x,t) = \sum_{n\geq 0} a_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n \geq 0} a_n {\rm e}^{-4k^2n^2t} \cos 2nx$, donde los coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$ quedan determinados al imponer la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Es decir,

$$1 + 2\cos 4x = f(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos 2nx \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = 0,\ \forall n \neq 0, 2 \end{cases}.$$

Por tanto, la solución final viene dada por $u(x,t) = 1 + 2{\rm e}^{-16k^2t}\cos 4x$. Los cuatro puntos de la barra donde la temperatura no cambia son los puntos $x \in (0,\pi)$ tales que $\cos 4x = 0$. Es decir, los puntos $\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$ y $7\pi/8$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **Teoría**
Fecha: 14 de enero de 2011 *Tiempo: 30 minutos*

[2 puntos]. *Lo bueno, si breve, dos veces bueno.* $\diamond$
Sea $x' = Ax$ un sistema lineal homogéneo 2D a coeficientes constantes.

1. ¿Qué tienen que cumplir los VAPs de A para que el sistema sea una silla?
2. ¿Qué tienen que cumplir los VAPs de A para que las trajectorias del sistema giren entorno al origen?
3. ¿Qué tienen que cumplir los VAPs de A para que el sistema sea inestable?
4. ¿Qué tienen que cumplir los VAPs de A para que el sistema sea un repulsor?
   Nota: Un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes es un repulsor cuando <u>todas</u> sus trajectorias, salvo el origen, escapan a infinito cuando $t \to +\infty$.

Solución:

1. Un sistema 2D es una silla, por definición, cuando sus dos VAPs son reales no nulos de signos diferentes.
2. Las trayectorias giran si y sólo si el sistema es un foco o un centro, cosa que ocurre, por definición, si y sólo si sus dos VAPs son complejos conjugados.
3. El teorema sobre la estabilidad de sistema lineales a coeficientes constantes dice que un sistema es inestable cuando algún VAP tiene parte real positiva o cuando algún VAP no semi-simple tiene parte real nula. Por tanto, un sistema 2D es inestable cuando alguno de sus dos VAPs tiene parte real positiva o cuando $\lambda = 0$ es un VAP doble pero $A \neq \mathbf{0}$.
4. Los únicos sistemas repulsores son los focos y nodos inestables. Efectivamente, pues las sillas tienen una recta de entrada, los sistemas degenerados tienen una recta de puntos de equilibrio, los centros son estables, y los focos y nodos asintóticamente estables tampoco son repulsores. Por tanto, el sistema $x' = Ax$ es repulsor si y sólo si sus dos VAPs tienen parte real positiva.