

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales**4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 25 de enero de 2010

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

Problema 1 [2 puntos]. Es un problema computacional bastante largo. Los 4's del enunciado están puestos para simplificar los cálculos. El truco principal consiste en substituir las funciones exponenciales por funciones hiperbólicas, usando las fórmulas $2 \cosh t = e^t + e^{-t}$ y $2 \sinh t = e^t - e^{-t}$. El último apartado no es fácil. \diamond

Fijamos una longitud $L > 0$ y un parámetro $\lambda > 0$.

- [0.5 p.] a) Resolver la EDO homogénea $x'''' = \lambda^4 x$. Escribir su solución general como la combinación lineal de dos funciones hiperbólicas y dos funciones trigonométricas.
 [0.5 p.] b) Probar que la función idénticamente nula es la única solución del PVF

$$\begin{cases} x'''' = \lambda^4 x \\ x(-L) = x(0) = x(L) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} .$$

Indicación 1: La función $\cosh t$ es par y la función $\sinh t$ es impar.

Indicación 2: $\cosh t > \cos t$ y $\sinh t > \sin t$ para todo $t > 0$.

- [0.5 p.] c) Resolver la EDO homogénea $x'''' = -4\lambda^4 x$. Escribir su solución general como la combinación lineal de cuatro productos de una función hiperbólica y una función trigonométrica.

Indicación: $\sqrt{2i} = \{1 + i, -1 - i\}$ y $\sqrt{-2i} = \{1 - i, -1 + i\}$.

- [0.5 p.] d) Calcular la ecuación característica $f(\lambda) = 0$ que cumplen los VAPs del PVF

$$\begin{cases} x'''' = -4\lambda^4 x \\ x(-L) = x(0) = x(L) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} .$$

Probar que $\lambda_n = n\pi/L$ son VAPs y que existen otros VAPs $\eta_n \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$, para todo $n \geq 1$. No se pide calcular los VAPs η_n .

Solución:

- a) El polinomio característico es $P(m) = m^4 - \lambda^4$, cuyas raíces son $\pm\lambda$ y $\pm\lambda i$. Por tanto, la solución general es $x_h(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{-\lambda t} + c_3 \cos(\lambda t) + c_4 \sin(\lambda t)$, donde los coeficientes $k_1, k_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ son libres.

Usando que $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ y $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$, podemos escribir la solución anterior como $x_h(t) = c_1 \cosh(\lambda t) + c_2 \sinh(\lambda t) + c_3 \cos(\lambda t) + c_4 \sin(\lambda t)$, donde los coeficientes $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ también son libres.

- b) Al imponer que la solución general cumpla las condiciones de frontera obtenemos que

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\implies c_1 + c_3 = 0 \\ x'(0) = 0 &\implies c_2 + c_4 = 0 \\ x(\pm L) = 0 &\implies c_* c_1 \pm s_* c_2 + c c_3 \pm s c_4 = 0 \end{aligned}$$

donde $c = \cos(\lambda L)$, $s = \sin(\lambda L)$, $c_* = \cosh(\lambda L)$ y $s_* = \sinh(\lambda L)$. Sumando y restando las dos últimas ecuaciones, vemos que

$$0 = x(L) + x(-L) = 2c_* c_1 + 2cc_3, \quad 0 = x(L) - x(-L) = 2s_* c_1 + 2sc_4.$$

Así pues, los coeficientes cumplen los sistemas

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_* c_1 + cc_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_2 + c_4 = 0 \\ s_* c_2 + sc_4 = 0 \end{cases}.$$

Los dos sistemas son compatibles determinados, pues sus determinantes son no nulos: $c - c_* = \cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L) < 0$ y $s - s_* = \sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L) < 0$. Por tanto, la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

- c) Las raíces del polinomio $P(m) = m^4 + 4\lambda^4$ cumplen $m^2 = \pm\sqrt{-4\lambda^4} = \pm 2\lambda^2 i$, luego hay dos raíces dadas por $m = \sqrt{2\lambda^2 i} = \lambda\sqrt{2i} = \pm\lambda(1 + i)$ y otras dos dadas por $m = \sqrt{-2\lambda^2 i} = \lambda\sqrt{-2i} = \pm\lambda(1 - i)$. Por tanto, su solución general es

$$x_h(t) = (k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{-\lambda t}) \cos(\lambda t) + (k_3 e^{\lambda t} + k_4 e^{-\lambda t}) \sin(\lambda t),$$

donde los coeficientes $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ son libres. Al igual que antes, mediante las relaciones $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$ y $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$, podemos reescribir la solución:

$$x_h(t) = (c_1 \cosh(\lambda t) + c_2 \sinh(\lambda t)) \cos(\lambda t) + (c_3 \cosh(\lambda t) + c_4 \sinh(\lambda t)) \sin(\lambda t),$$

donde los coeficientes $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ también son libres.

d) Al imponer que la solución general cumpla las condiciones de frontera obtenemos que

$$\begin{aligned}x(0) = 0 &\implies c_1 = 0 \\x'(0) = 0 &\implies c_2 + c_3 = 0 \\x(\pm L) = 0 &\implies c_*cc_1 \pm s_*cc_2 \pm c_*sc_3 + s_*sc_4 = 0\end{aligned}$$

donde $c = \cos(\lambda L)$, $s = \sin(\lambda L)$, $c_* = \cosh(\lambda L)$ y $s_* = \sinh(\lambda L)$.

Este sistema 4×4 tiene soluciones no nulas si y sólo si se anula su determinante:

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ c_*c & s_*c & c_*s & s_*s \\ c_*c & -s_*c & -c_*s & s_*s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s_*c & c_*s & s_*s \\ -s_*c & -c_*s & s_*s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s_*c & c_*s & s_*s \\ 0 & 0 & 2s_*s \end{vmatrix} \\ &= 2s_*s(c_*s - s_*c) = 2\sinh(\lambda L)\sin(\lambda L)(\cosh(\lambda L)\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)\cos(\lambda L)).\end{aligned}$$

El factor $\sinh(\lambda L)$ no se anula, pues $\lambda L > 0$. El factor $\sin(\lambda L)$ se anula en los VAPs $\lambda_n = n\pi/L$, $n \geq 1$. Finalmente, el factor $g(\lambda) = \cosh(\lambda L)\sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L)\cos(\lambda L)$ cumple que

$$g(\lambda_n) = (-1)^{n+1} \sinh(n\pi), \quad n \geq 1.$$

Por tanto, aplicando Bolzano, $g(\lambda)$ se anula en algún punto $\eta_n \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

4 Problemas (8 puntos)

Fecha: 25 de enero de 2010

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

Problema 2 [2 puntos]. Es probablemente el problema más corto del examen. Con pocos cálculos, luego se valorará la claridad de la exposición y los argumentos usados. \diamond

Consideramos el sistema lineal 3D a coeficientes constantes

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2x + y + z \\ y' &= -y + 4z \\ z' &= z \end{aligned} \right\}.$$

[0.75 p.] a) Calcular su solución general y estudiar su estabilidad.

[0.75 p.] b) Calcular y dibujar el plano invariante $\pi \subset \mathbb{R}^3$ sobre el cual el sistema 3D es asintóticamente estable; es decir, cualquier trayectoria que empieza sobre π tiende al origen sin salirse del plano.

Clasificar el sistema 2D que se obtiene sobre ese plano, dibujar un croquis de sus trayectorias y explicar con precisión cómo tienden las trayectorias al origen.

[0.5 p.] c) ¿Cómo se comportan las trayectorias fuera del plano π ? ¿Puede una trayectoria cruzar el plano π ? ¿Por qué? ¿Existen otros planos invariantes? ¿Cuáles? Dibujar un croquis aproximado de las trayectorias del sistema 3D.

Solución:

a) La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es triangular superior. Sus VAPs son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 1$. El sistema es inestable pues $\lambda_3 > 0$. Los VEPs son $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_3 = (1, 2, 1)$. Por tanto, la solución general del sistema es

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^t \\ y(t) &= c_2 e^{-t} + 2c_3 e^t \\ z(t) &= c_3 e^t \end{aligned} \right\},$$

donde los coeficientes $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ son libres.

b) Sea $r_j = [\vec{v}_j]$ la recta que pasa por el origen con dirección v_j . Como $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, sabemos que r_1 es la recta de entrada rápida, r_2 es la recta de entrada lenta y r_3 es la recta de salida. El plano π que contiene a las dos rectas de entrada es un plano invariante asintóticamente estable. Es inmediato comprobar que π es el plano horizontal $z = 0$.

Para calcular el sistema 2D que se obtiene al restringir el sistema inicial 3D sobre el plano $\pi = \{z = 0\}$, basta tomar $z = 0$ en las ecuaciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -y \end{aligned} \right\}.$$

En realidad, nos piden clasificarlo y dibujarlo, no calcularlo. El sistema 2D es un nodo propio asintóticamente estable, pues tiene dos rectas de entrada de VAPs diferentes. Además, sabemos que todas las trayectorias no contenidas en las rectas de entrada tienden al origen tangencialmente a la recta de entrada lenta r_2 . Con esas indicaciones ya se puede realizar un croquis bastante exacto.

c) Si la trayectoria empieza en el fuera del plano $z = 0$, entonces $c_3 \neq 0$ y la solución escapa a infinito acercándose a la recta de salida r_3 .

Una trayectoria no puede cruzar π , pues es un plano invariante y tenemos unicidad de soluciones.

Sí, existen otros dos planos invariantes; a saber, los determinados por la recta de salida r_3 y cualquiera de las rectas de entrada. Sobre esos planos el sistema inicial es una silla, pues tiene una dirección de entrada y otra de salida. Con esas indicaciones ya se puede realizar un croquis aproximado.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales 4 Problemas (8 puntos)

Fecha: 25 de enero de 2010

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

Problema 3 [2 puntos]. Es un problema enmarcado en la mecánica conservativa. \diamond

El movimiento de una partícula de masa uno que se desplaza sin fricción sobre una recta bajo la acción de una fuerza $F(x) = 4x(1 - x^2)$ cumple la EDO de segundo orden

$$x'' = F(x) = 4x(1 - x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Escribimos esta fuerza como menos la derivada de un potencial que se anula en $x = \pm 1$:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}(x), \quad U(x) = 1 - x^2(2 - x^2).$$

Recordamos que la energía (cinética más potencial) de la partícula es igual a

$$E(x, v) = v^2/2 + U(x),$$

siendo $v = x'$ la velocidad de la partícula.

- [0.2 p.] a) Escribir la EDO de segundo orden como un sistema no lineal 2D de primer orden.
 [0.6 p.] b) Calcular la derivada respecto al tiempo de la energía. ¿Qué relación existe entre las soluciones del sistema y las curvas de nivel de la energía? Deducir que si en algún momento la partícula tiene energía E_0 , su energía potencial nunca supera el valor E_0 .
 [0.8 p.] c) Calcular las tres posiciones de equilibrio de la partícula, la energía de cada una y la estabilidad de cada una. Decidir el método a usar en cada caso.
 [0.4 p.] d) ¿Puede escapar la partícula a más o menos infinito? ¿Por qué? Si la partícula tiene energía uno, ¿a dónde tiende cuando $t \rightarrow \pm\infty$?

Indicacion: Dibujar la gráfica de $U(x)$ y la curva de nivel $\{(x, v) : E(x, v) = 1\}$.

Solución:

- a) Introduciendo la velocidad $v = x'$, reescribimos la EDO anterior como el sistema no lineal 2D autónomo de primer orden

$$\begin{cases} x' &= v \\ v' &= F(x) \end{cases}.$$

- b) La derivada respecto el tiempo de la energía es idénticamente nula:

$$\frac{d}{dt}\{E(x, v)\} = \frac{\partial E}{\partial x}(x, v)x' + \frac{\partial E}{\partial v}(x, v)v' = \frac{dU}{dx}(x)v + vF(x) = 0.$$

Por tanto, la energía se conserva y las trayectorias del sistema están contenidas en sus curvas de nivel. Si en un instante $t = t_0$ tenemos $E(x(t_0), v(t_0)) = E_0$, entonces

$$E(x(t), v(t)) = v(t)^2/2 + U(x(t)) = E_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particular, $U(x(t)) = E_0 - v(t)^2/2 \leq E_0$ para todo t .

- c) Buscamos los puntos de equilibrio del sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x' = v = 0 \\ v' = 4x(1 - x^2) = 0 \end{array} \right\} \implies x \in \{-1, 0, 1\}, v = 0.$$

La matriz del sistema linealizado en el punto de equilibrio $(x, v) = (x_*, 0)$ es igual a

$$A(x_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{dF}{dx}(x) & 0 \end{pmatrix}_{(x,v)=(x_*,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4(1 - 3x_*^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{dF}{dx}(0) = 4$, entonces $\det[A(0)] = -4 < 0$ y el sistema linealizado es una silla, luego la posición de equilibrio $x = 0$ es inestable y tiene energía $E(0, 0) = U(0) = 1$.

En cambio, $\frac{dF}{dx}(\pm 1) = -4$, luego $\det[A(\pm 1)] = 8 > 0$ y $\text{traza}[A(\pm 1)] = 0$. El sistema linealizado es un centro y la linealización no decide la estabilidad en $x = \pm 1$. Por tanto, aplicaremos el método de Liapounov usando la energía como función de Liapounov. El potencial $U(x)$ se anula y tiene un mínimo local estricto en $x = \pm 1$, ya que $\frac{dU}{dx}(\pm 1) = 0$ y $\frac{d^2U}{dx^2}(\pm 1) = 4 > 0$. Así pues, la energía $E(x, v) = v^2/2 + U(x)$ se anula y tiene un mínimo local estricto en $(x, v) = (\pm 1, 0)$. Por tanto, la función $E(x, v)$ es definida positiva en $(x, v) = (\pm 1, 0)$ y su derivada temporal es idénticamente cero, lo cual implica que esas posiciones de equilibrio son estables pero no asintóticamente estables. La energía de esas posiciones es $E(\pm 1, 0) = U(\pm 1) = 0$.

d) El potencial $U(x) = 1 - x^2(2 - x^2)$ tiende a más infinito cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, si la partícula escapara a más o menos infinito, su energía crecería sin límite, lo cual entraría en contradicción con la conservación de la energía. Por tanto, la partícula no puede escapar a más o menos infinito.

Si la partícula tiene energía uno, su trayectoria está contenida en el conjunto de nivel que tiene forma de “lazo ∞ ” que se cruza en la posición de equilibrio inestable $(x, v) = (0, 0)$, pues

$$E^{-1}(1) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 = 2x^2(2 - x^2)\} = \left\{ (x, \pm|x|\sqrt{2(2 - x^2)}) : x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \right\}.$$

En cualquier otro punto del lazo, la partícula se mueve y para saber en que sentido lo hace, estudiamos el signo de la velocidad $x' = v$. Esta velocidad es positiva en el semiplano superior $\{v > 0\}$ y negativa en el semiplano inferior $\{v < 0\}$. Por tanto, en la parte superior del lazo la partícula se mueve hacia la derecha y en la parte inferior hacia la izquierda. Por tanto, vemos que la partícula tiende al punto de equilibrio. Así pues, si la energía es igual a uno, entonces $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales**4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 25 de enero de 2010

Tiempo total: 2 horas 50 minutos

Problema 4 [2 puntos]. Hicimos un problema casi igual en clase. \diamond Consideramos la ecuación de Laplace 2D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en el rectángulo $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ dada por

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in (0, \pi) \quad y \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, \pi) \\ u(x, 2\pi) = 0 & x \in (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \\ u(\pi, y) = 0 & y \in (0, 2\pi) \end{cases}.$$

[1.5 p.] a) Calcular la solución formal $u(x, y)$ de este problema suponiendo que

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$$

es el desarrollo de Fourier en senos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene FUPs trigonométricas.

[0.5 p.] b) Ahora consideramos las funciones $f(x) = x(\pi - x)$ y $f(x) = x$. ¿Para cuál de ellas podemos asegurar que la solución $u(x, y)$ no es continua en el rectángulo cerrado $\bar{\Omega} = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$? ¿Por qué? Sabiendo que en el otro caso la solución es continua en $\bar{\Omega}$, calcular sus valores máximo y mínimo sobre $\bar{\Omega}$.

Solución:

a) Al imponer que la función $u(x, y) = X(x)Y(y)$ cumpla:

- La ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ se obtiene que $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, luego

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

- La condición de contorno $u(x, 2\pi) = 0$, se obtiene que $Y(2\pi) = 0$.
- La condición de contorno $u(0, y) = 0$, se obtiene que $X(0) = 0$.
- La condición de contorno $u(\pi, 0) = 0$, se obtiene que $X(\pi) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$(a) \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = 0 = X(\pi) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \\ Y(2\pi) = 0 \end{cases}.$$

Empezamos resolviendo el PVF asociado $X(x)$. Nos dicen que las FUPs son funciones trigonométricas, luego no pueden existir VAPs no negativos. Para encontrar sus VAPs negativos $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$, imponemos que la solución $X_h(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$ de la EDO $X'' + \mu^2 X = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $c_1 = X(0) = 0$ y $X(\pi) = c_2 \sin \mu\pi = 0$. Como no queremos que c_2 sea nulo, necesitamos que

$$\sin \mu\pi = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = n, \quad n \geq 1 \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -n^2, \quad n \geq 1.$$

Hemos descartado los enteros $n \leq 0$, pues $\mu > 0$. Como $c_1 = 0$, las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n$ son (los múltiplos de) las funciones trigonométricas

$$X_n(x) = \sin \mu_n x = \sin nx, \quad n \geq 1.$$

La EDO $Y''(x) + \lambda_n Y(x) = 0$ es lineal, homogénea y a coeficientes constantes. Su polinomio característico es $P(m) = m^2 + \lambda_n = m^2 - n^2$ y sus raíces son $m_{1,2} = \pm n$. Por tanto, la solución general de esta ecuación es

$$Y(y) = c_1 e^{ny} + c_2 e^{-ny}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Al imponer la condición adicional $0 = Y(2\pi) = e^{2\pi n} c_1 + e^{-2\pi n} c_2$ obtenemos que $c_2 = -e^{4\pi n} c_1$, luego $Y(y) = c_1 (e^{ny} - e^{(4\pi - y)n})$, con $c_1 \in \mathbb{R}$ libre. Tomando $c_1 = e^{-2\pi n}/2$, obtenemos la familia de funciones

$$Y_n(y) = \sinh(n(y - 2\pi)), \quad n \geq 1.$$

Así pues, los modos normales de la parte homogénea del problema son

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \sinh(n(y - 2\pi)) \sin nx, \quad n \geq 1.$$

En particular, resulta que, por linealidad, todas las series de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n u_n(x, y) = \sum_{n \geq 1} \beta_n \sinh(n(y - 2\pi)) \sin nx$$

son soluciones formales de la parte homogénea del problema, donde los coeficientes β_n quedan, de momento, libres. A continuación, los determinamos imponiendo la condición no homogénea. Es decir,

$$-\sum_{n \geq 1} \beta_n \sinh(2\pi n) \sin nx = u(x, 0) = f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx \Rightarrow \beta_n = -\frac{b_n}{\sinh(2\pi n)}.$$

Finalmente, la solución viene dada por la serie formal

$$u(x, y) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\sinh(n(2\pi - y))}{\sinh(2\pi n)} \sin nx.$$

- b) La solución $u(x, y)$ no puede ser continua cuando $f(x) = x$, pues las condiciones de contorno no empalman bien en el vértice inferior derecho $(x, y) = (\pi, 0)$. Concretamente, $u(\pi, y) = 0$ y $u(x, 0) = f(x) = x$ implica que $0 = u(\pi, 0) = f(\pi) = \pi$. Imposible.

En cambio, las condiciones empalman bien si $f(x) = x(\pi - x)$, pues $f(0) = f(\pi) = 0$. En tal caso, podemos aplicar los principios del máximo y mínimo para la ecuación de Laplace y concluir que la solución $u(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo en la frontera del rectángulo. En particular, como

$$\min_{0 \leq x \leq \pi} f(x) = 0, \quad \max_{0 \leq x \leq \pi} f(x) = f(\pi/2) = \pi^2/4,$$

resulta que

$$0 \leq u(x, y) \leq \pi^2/4, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales

Fecha: 25 de enero de 2010

Teoría

Tiempo: 30 minutos

[2 puntos]. Lo bueno, si breve, dos veces bueno. \diamond

Consideramos la EDO no lineal 1D autónoma

$$x' = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcular todos sus puntos de equilibrio y su estabilidad.

Indicación: No es necesario usar el método de linealización ni el de Liapounov.

- b) ¿Existe alguna solución que escape a más o menos infinito? Razonar la respuesta.
c) ¿Existe alguna solución 2π -periódica no constante? Razonar la respuesta.
d) Dadas dos soluciones arbitrarias $x_1(t)$ y $x_2(t)$, consideramos los límites

$$x_1(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t), \quad x_2(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t).$$

¿Qué posibles valores puede tomar la diferencia $x_1(+\infty) - x_2(+\infty)$?

Solución:

- a) Los puntos de equilibrio cumplen $\sin x = 0$, luego son los múltiplos enteros de π . La solución crece cuando $x' = \sin x > 0$ y decrece cuando $x' = \sin x < 0$. Por tanto, si notamos por $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a los puntos de equilibrio y por $I_n = (x_n, x_{n+1})$ a los intervalos que delimitan, vemos que la solución $x(t)$ crece cuando está contenida en I_n con n par, pero decrece si n es impar. Entonces los puntos de equilibrio x_n son inestables si n es par y asintóticamente estables si n es impar.
- b) No, pues cualquier solución no constante está confinada entre dos posiciones de equilibrio consecutivas.
- c) No, pues cualquier solución no constante está confinada en un intervalo I_n , tendiendo a uno de sus extremos cuando $t \rightarrow +\infty$ y al otro cuando $t \rightarrow -\infty$.
- d) Los múltiplos pares de π , pues tanto $x_1(+\infty)$ como $x_2(+\infty)$ son puntos de equilibrio asintóticamente estables de la EDO. La única excepción se obtiene cuando una de la soluciones es constante y coincide con una de las posiciones de equilibrio inestable, en cuyo caso la diferencia $x_1(+\infty) - x_2(+\infty)$ es un múltiplo impar de π .