Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**
Fecha: 29 de enero de 2009 *Tiempo total: 2 horas 40 minutos*

Problema 1 [2 puntos]. Colgamos una masa m de un muelle vertical cuya constante de Hooke es λ. El medio ofrece una resistencia igual a μ veces la velocidad instantánea. La ecuación diferencial que modela la dinámica es

$$mx'' + \mu x' + \lambda x = 0$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento desde la posición de equilibrio en el instante t. Fijamos los valores $m = 1/2$, $\lambda = 3/2$ y $\mu = 2$.

[0.5 p.] a) ¿Qué tipo de oscilación es?

[1 p.] b) Resolver el PVI correspondiente a impulsar la masa desde la posición de equilibrio con velocidad inicial v_0.

[0.5 p.] c) Calcular la aceleración inicial de la masa. Calcular el instante $t_* > 0$ en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo. Calcular el valor del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración de la masa en el instante t_*. Expresar todos los resultados de forma exacta, sin usar calculadora.

Solución:

a) Es una oscilación libre amortiguada. Para ver si es subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada la escribimos en la forma

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0$$

donde $k = \mu/2m = 2$ y $\omega_0^2 = \lambda/m = 3$. Por tanto, $k > \omega_0$ y la oscilación es sobreamortiguada.

b) Queremos resolver el PVI

$$x'' + 4x' + 3x = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = v_0.$$

Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$ son

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-3} = -2 \pm 1.$$

Es decir, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -3$, luego la solución general de la EDO es

$$x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{-3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determinamos los coeficientes imponiendo las condiciones iniciales:

$$0 = x(0) = c_1 + c_2, \quad v_0 = x'(0) = -c_1 - 3c_2.$$

Finalmente, $c_1 = -c_2 = v_0/2$ y la solución del PVI es

$$x(t) = v_0 \big(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}\big)/2.$$

c) La aceleración inicial es igual a $x''(0) = -4x'(0) - 3x(0) = -4v_0$.

Después, buscamos los puntos críticos del desplazamiento:

$$0 = x'(t) = v_0(3\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-t})/2 \Longrightarrow 3\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-t} \Longrightarrow \mathrm{e}^{2t} = 3 \Longrightarrow t = (\ln 3)/2.$$

Por tanto, la solución vale cero inicialmente, tiende a cero cuando $t \to +\infty$ y tiene un único punto crítico en el instante $t = t_* = (\ln 3)/2$. Eso implica que la masa alcanza su desplazamiento máximo en $t = t_*$. Además, en ese instante la masa tiene

- Desplazamiento: $x(t_*) = v_0(\mathrm{e}^{-t_*} - \mathrm{e}^{-3t_*})/2 = v_0/3\sqrt{3}$;
- Velocidad: $x'(t_*) = 0$; y
- Aceleración: $x''(t_*) = -4x'(t_*) - 3x(t_*) = -v_0/\sqrt{3}$.

Aquí hemos usado que si $\mathrm{e}^{2t_*} = 3$, entonces $\mathrm{e}^{-t_*} = 1/\sqrt{3}$ y $\mathrm{e}^{-3t_*} = 1/3\sqrt{3}$.

Problema 2 [2 puntos]. Consideramos el sistema lineal $X' = AX$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

siendo α un parámetro real.

[0.5 p.] a) Calcular su estabilidad y clasificarlo en función de α.

[1.5 p.] b) Dibujar un croquis de sus trayectorias en el plano (x_1, x_2) para cada uno de los siguientes valores del parámetro: $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

- En uno de los tres casos anteriores hay una recta de entrada y otra de salida. En ese caso, ¿es posible que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante llegue al tercer cuadrante? ¿Por qué?
- En otro caso todas las trayectorias son periódicas, pero ¿de qué periodo?
- Y en otro caso el sistema es degenerado, pero ¿es inestable? ¿Por qué?

Solución:

a) Aplicaremos el criterio traza-determinante. La traza es $T = 0$, el determinante es $D = 1 - \alpha^2$ y el discriminante es $\Delta = T^2 - 4D = -4D$. Por tanto:
- $|\alpha| < 1 \Rightarrow T = 0 \;\&\; \Delta < 0 \Rightarrow$ el sistema es un centro (E, pero no AE);
- $|\alpha| > 1 \Rightarrow D < 0$ el sistema es una silla (I); y
- $\alpha = \pm 1 \Rightarrow T = D = 0 \Rightarrow$ el sistema es degenerado y dejamos el estudio de la estabilidad para el siguiente apartado.

b) En el caso $\alpha = 0$ tenemos un centro. El croquis está formado por curvas (elipses) cerradas. La velocidad en el punto $(1, 0)$ es igual a $(0, -1)$, luego las trayectorias giran en sentido horario. Finalmente, los VAPs son

$$\lambda_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm \mathrm{i},$$

luego todas las trayectorias tienen periodo $T = 2\pi/\Im\lambda_+ = 2\pi/1 = 2\pi$.

En el caso $\alpha = 2$ tenemos una silla cuyos VAPs son

$$\lambda_\pm = \frac{T \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \pm\sqrt{3}.$$

Además, $\vec{v}_+ = (1, \sqrt{3} - 2)^t$ y $\vec{v}_- = (1, -\sqrt{3} - 2,)^t$ son los correspondientes VEPs. Por tanto, $r_+ = \{y = (\sqrt{3} - 2)x\}$ y $r_- = \{y = -(\sqrt{3} + 2)x\}$ son las rectas de salida y entrada, respectivamente. Ambas rectas tienen pendientes negativas, luego están contenidas en los cuadrantes segundo y cuarto. En particular, son barreras que las otras trayectorias no pueden atravesar (teorema de existencia y unicidad), lo cual implica que una trayectoria que empieza en el primer cuadrante no puede alcanzar el tercero.

En el caso $\alpha = 1$ tenemos un sistema degenerado con un VAP nulo doble y un único VEP: $\vec{v} = (1, -1)^t$. Por tanto, $r = \{y = -x\}$ es una recta de puntos de equilibrio. Evaluando la velocidad en varias posiciones se comprueba que todas las otras trayectorias son paralelas a esa recta. Concretamente, las trayectorias por encima de r se dirigen hacia la derecha y hacia abajo, mientras que las trayectorias por debajo de r avanzan en sentido contrario. Del croquis se deduce que el sistema es inestable.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**

Fecha: 29 de enero de 2009 *Tiempo total: 2 horas 40 minutos*

Problema 3 [2 puntos]. El origen es un punto de equilibrio del sistema no lineal 3D

$$\begin{cases} x_1' &= \alpha x_1^3 - 2x_2 + x_2 x_3 \\ x_2' &= \alpha x_2^3 + x_1 - x_1 x_3 \\ x_3' &= \alpha x_3^3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

siendo α un parámetro real.

[0.5 p.] a) Estudiar, si es posible, la estabilidad del origen por el método de linealización.

[1 p.] b) Estudiar la estabilidad del origen por el método de Liapounov usando una función de la forma

$$V(x_1,x_2,x_3) = \frac{c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2}{2},$$

para algunos valores apropiados de c_1, c_2 y c_3.

[0.5 p.] c) Sea $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la solución del sistema anterior que se obtiene al fijar la condición inicial

$$x_1(0) = -1, \qquad x_2(0) = 2, \qquad x_3(0) = 1.$$

¿Para qué valores de α es decreciente la función $x_2(t)$ en $t = 0$? ¿Y para cuáles es creciente? ¿Para qué valores de α tiene un mínimo local la función $x_2(t)$ en $t = 0$? ¿Y para cuáles tiene un máximo local?

Solución:

a) La matriz del sistema linealizado en el origen es

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha x_1^2 & x_3 - 2 & x_2 \\ 1 - x_3 & 3\alpha x_2^2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & 3\alpha x_3^2 \end{pmatrix}_{|(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos tres VAPs son $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\mathrm{i}$ y $\lambda_3 = 0$. Por tanto, la linealización no decide la estabilidad del sistema no lineal en el origen, pues todos los VAPs tienen parte real nula.

b) Antes de ajustar los valores de los parámetros, notamos que deben ser positivos. De lo contrario, la función $V(x_1,x_2,x_3)$ no sería definida positiva.

Empezamos calculando la función

$$\begin{aligned} W(x_1,x_2,x_3) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3)x_2' + \frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)x_3' \\ &= c_1 x_1(\alpha x_1^3 - 2x_2 + x_2 x_3) + c_2 x_2(\alpha x_2^3 + x_1 - x_1 x_3) + c_3 x_3(\alpha x_3^3 + x_1 x_2) \\ &= \alpha(c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 + c_3 x_3^4) + (c_2 - 2c_1)x_1 x_2 + (c_1 - c_2 + c_3)x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Buscamos unos valores $c_1, c_2, c_3 > 0$ tales que $c_2 - 2c_1 = 0$ y $c_1 - c_2 + c_3 = 0$. Por ejemplo, $c_1 = c_3 = 1$ y $c_2 = 2$. Entonces, la función

$$W(x_1,x_2,x_3) = \alpha(c_1 x_1^4 + c_2 x_2^4 + c_3 x_3^4) = \alpha(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$$

es definida positiva si $\alpha > 0$, definida negativa si $\alpha < 0$, e idénticamente nula si $\alpha = 0$. Por tanto, el origen es: I si $\alpha > 0$, AE si $\alpha < 0$ y E pero no AE si $\alpha = 0$.

c) Usando la condición inicial y la segunda ecuación del sistema, vemos que

$$x_2'(0) = \alpha x_2^3(0) + x_1(0) - x_1(0)x_3(0) = 8\alpha.$$

Por tanto, distinguimos tres casos:

- $\alpha > 0 \Rightarrow x_2'(0) > 0 \Rightarrow x_2(t)$ es creciente en $t = 0$;
- $\alpha < 0 \Rightarrow x_2'(0) < 0 \Rightarrow x_2(t)$ es decreciente en $t = 0$; y
- $\alpha = 0 \Rightarrow x_2'(0) = 0$, luego necesitamos más derivadas:

$$\begin{aligned} x_1'(0) &= -2x_2(0) + x_2(0)x_3(0) = -2 \\ x_3'(0) &= x_1(0)x_2(0) = -2 \\ x_2''(0) &= x_1'(0) - x_1'(0)x_3(0) - x_1(0)x_3'(0) = -2. \end{aligned}$$

Como $x_2''(0) < 0$, resulta que $x_2(t)$ tiene un máximo local en $t = 0$.

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **4 Problemas (8 puntos)**
Fecha: 29 de enero de 2009 *Tiempo total: 2 horas 40 minutos*

Problema 4 [2 puntos]. Consideramos la ecuación del calor 1D con condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in (0,\pi) \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0 & \quad\quad\quad\quad\; t > 0 \\ u_x(\pi,t) = 0 & \quad\quad\quad\quad\; t > 0 \end{cases}.$$

[1.5 p.] a) Calcular la solución $u(x,t)$ de este problema cuando la temperatura inicial viene dada por $f(x) = 2\sin(x/2)\cos x$.

Indicación: Podeis usar que el PVF resultante sólo tiene VAPs negativos y también podeis usar la fórmula trigonométrica

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

[0.5 p.] b) Encontrar una expresión de la derivada de la función

$$T(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\mathrm{d}x$$

que sólo dependa de $u_x(0,t)$ y sea válida para cualquier temperatura inicial $f(x)$. Después, usar esa expresión junto al apartado anterior para comprobar que la función $T(t)$ obtenida cuando $f(x) = 2\sin(x/2)\cos x$ tiene un mínimo global en el instante $t_* = (\ln 3)/2$ y tiende a cero cuando $t \to +\infty$.

Solución:

a) Al imponer que la función $u(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación $u_t = u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$, luego
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
- La condición de frontera $u(0,t) = 0$, vemos que $X(0) = 0$.
- La condición de frontera $u_x(\pi,t) = 0$, vemos que $X'(\pi) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \qquad \{T'(t) = \lambda T(t).$$

Empezamos resolviendo el PVF asociado a la función $X(x)$. Nos dicen que no existen VAPs positivos o nulos. Para encontrar sus VAPs negativos $\lambda = -\mu^2$, imponemos que la solución $X_\mathrm{h}(x) = c_1\cos\mu x + c_2\sin\mu x$ de la EDO $X'' + \mu^2 X = 0$ cumpla las condiciones de frontera: $c_1 = X(0) = 0$ y $X'(\pi) = c_2\mu\cos\mu\pi = 0$. Como no queremos que c_2 sea nulo, necesitamos que

$$\cos\mu\pi = 0 \Rightarrow \mu = \mu_n = (2n+1)/2,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = \lambda_n = -(2n+1)^2/4,\ n \geq 0.$$

En la última equivalencia hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 0$, pues los enteros negativos no generan nuevos VAPs. Como $c_1 = 0$, las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n$ son (los múltiplos de) las funciones trigonométricas

$$X_n(x) = \sin\mu_n x = \sin[(2n+1)x/2], \qquad n \geq 0.$$

Después, resolviendo la ecuación $T' = \lambda T$ para $\lambda = -(2n+1)^2/4$, obtenemos las funciones $T_n(t) = \mathrm{e}^{-(2n+1)^2t/4}$. Así pues, la solución de la parte homogénea del problema inicial se puede expresar como la serie formal

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0}\beta_n T_n(t)X_n(x) = \sum_{n\geq 0}\beta_n \mathrm{e}^{-(2n+1)^2t/4}\sin[(2n+1)x/2]$$

donde los coeficientes $\beta_n \in \mathbb{R}$ quedan determinados al imponer la condición inicial $u(x,0) = 2\sin(x/2)\cos x = \sin(3x/2) - \sin(x/2)$. Es decir,

$$\sin(3x/2) - \sin(x/2) = u(x,0) = \sum_{n\geq 0}\beta_n\sin[(2n+1)x/2] \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = -1 \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_n = 0,\ \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

Finalmente, la solución del problema inicial es la función

$$u(x,t) = T_1(t)X_1(x) - T_0(t)X_0(x) = \mathrm{e}^{-9t/4}\sin(3x/2) - \mathrm{e}^{-t/4}\sin(x/2).$$

b) Aplicando el teorema de derivación bajo el signo de la integral, la ecuación del calor, el teorema fundamental del cálculo y, finalmente, la condición de contorno tipo Neumann del extremo $x = \pi$, vemos que

$$\pi T'(t) = \int_0^\pi u_t(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^\pi u_{xx}(x,t)\mathrm{d}x = \big[u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=\pi} = -u_x(0,t).$$

Por tanto, usando la expresión de la solución $u(x,t)$ obtenida en el apartado anterior, se obtiene que la derivada del promedio de la temperatura es igual a

$$T'(t) = -u_x(0,t)/\pi = \frac{\mathrm{e}^{-t/4} - 3\mathrm{e}^{-9t/4}}{2\pi} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2t}}{2\pi}\mathrm{e}^{-t/4}.$$

Buscamos los puntos donde se anula esta derivada:

$$T'(t_*) = 0 \iff 1 - 3\mathrm{e}^{-2t_*} = 0 \iff \mathrm{e}^{2t_*} = 3 \iff t_* = (\ln 3)/2.$$

Además, resulta que $T'(t)$ es negativa si $t < t_*$ y positiva si $t > t_*$, lo cual implica que la función $T(t)$ tiene un mínimo global en el instante $t = t_*$.

Finalmente, $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 0$, pues

$$|T(t)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-9t/4}|\sin(3x/2)| + \mathrm{e}^{-t/4}|\sin(x/2)|\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-9t/4} + \mathrm{e}^{-t/4}.$$

Examen Final de Ecuaciones Diferenciales **Teoría**

Fecha: 29 de enero de 2009 *Tiempo: 25 minutos*

[2 puntos]. Consideramos el sistema 2D de primer orden autónomo en forma normal

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

para algunas funciones $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

[0.5 p.] a) ¿Qué es el campo de vectores asociado a este sistema?

[0.5 p.] b) ¿Qué relación existe entre el campo de vectores y las soluciones del sistema?

[0.5 p.] c) ¿Qué relación existe entre las trayectorias del sistema inicial y las del sistema

$$\begin{cases} x' = -f(x,y) \\ y' = -g(x,y) \end{cases} ?$$

[0.5 p.] d) ¿Qué relación existe entre las trayectorias del sistema inicial y las del sistema

$$\begin{cases} x' = 2f(x,y) \\ y' = 2g(x,y) \end{cases} ?$$

Importante: Responder en esta misma hoja. Se valorará la claridad y brevedad de la exposición. Puede ser útil incluir algunos dibujos.

Solución:

a) El campo de vectores asociado al sistema se construye mediante la siguiente regla. A cada punto $(x, y) \in D$ le asignamos el vector con origen en dicho punto y dirección $\big(f(x, y), g(x, y)\big)$.

b) Dada una curva $(x(t), y(t))$, el vector tangente a la curva en el punto $(x(t), y(t))$ viene dado por $(x'(t), y'(t))$. Por tanto, vemos que la curva $(x(t), y(t))$ es solución del sistema si y sólo si la curva es tangente en todos sus puntos al campo de vectores. Así pues, hemos relacionado un problema analítico (resolver el sistema de EDOs inicial) con un problema geométrico (encontrar curvas tangentes a un campo de vectores).

c) El signo menos delante de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ hace que los vectores del campo de vectores asociado al segundo sistema tengan la misma dirección y longitud que los vectores del campo asociado al sistema inicial, pero sentido opuesto. Por tanto, las trayectorias son las mismas pero recorridas en sentido contrario.

d) El factor 2 delante de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ hace que los vectores del campo de vectores asociado al tercer sistema tengan la misma dirección y sentido que los vectores del campo asociado al sistema inicial, pero doble longitud. Por tanto, las trayectorias son las mismas pero recorridas a velocidad doble.