

Problemes

1. Considerem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Aleshores,

(a) Trobeu la solució $X_1(t)$ del problema de Cauchy $X_1' = AX_1$, $X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Donat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, trobeu $X_n(t)$, solució del problema de Cauchy $X_n' = A^n X_n$, $X_n(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Demostreu que per a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $X_{n+1}(t) - X_n(t)$ no depèn de n .

Resolució:

(a) $X_1(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, ..., $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. La forma de Jordan de A^n és $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una matriu de canvi de base és $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$. Com $J = S_n^{-1} A^n S_n$, aleshores $A^n = S_n J S_n^{-1}$ i, per tant,

$$X_n(t) = e^{tA^n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_n e^{tJ} S_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ nt \end{pmatrix} e^t.$$

(c) $X_{n+1}(t) - X_n(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t$.

2. Considereu el problema

$$\begin{cases} (1) & u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ (2) & u(x, 0) = \sin x + x - (\pi/2), & x \in (0, \pi) \\ (3) & u(0, t) = -\pi/2, & t > 0 \\ (4) & u(\pi, t) = \pi/2, & t > 0 \end{cases} \quad (*)$$

(a) L'equació (1) és una equació de Laplace, de la calor, o d'ones? Les condicions de contorn són tipus Dirichlet o Neumann ?

(b) Trobeu una funció $v(x)$ que només depengui de x que sigui solució de (1)+(3)+(4).

(c) Definim $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$. Trobeu $f_1(x, t)$, $f_2(x)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ de forma que $w(x, t)$ sigui solució de

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = f_1(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ w(x, 0) = f_2(x), & x \in (0, \pi) \\ w(0, t) = f_3(t), & t > 0 \\ w(\pi, t) = f_4(t), & t > 0 \end{cases} \quad (**)$$

(d) Resoleu (**) pel mètode de separació de variables.

(e) Deduïu la solució de (*) i trobeu el seu límit per a $t \rightarrow \infty$.

Resolució:

(a) Equació de la calor amb condicions de Dirichlet.

(b) $0 = v_t - 4v_{xx} = -4v''(x) \implies v(x) = a + bx$. Imposant que $-\frac{\pi}{2} = v(0) = a$, i $\frac{\pi}{2} = v(\pi) = a + \pi b$, resulta que $a = -\pi/2$, $b = 1 \implies v(x) = x - \pi/2$.

$$(c) \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 - 0 = 0 = f_1(x)t \\ w(x, 0) = (\sin x + x - \pi/2) - (x - \pi/2) = \sin x = f_2(x) \\ w(0, t) = -\pi/2 - (-\pi/2) = 0 = f_3(t) \\ w(\pi, t) = \pi/4 - (\pi/4) = 0 = f_4(t) \end{cases}$$

(d) $w(x, t) = X(x)T(t)$; $w_t = 4w_{xx} \implies \frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(d1) \left. \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \text{Valors propis: } \lambda = \lambda_n = -n^2, n \in \mathbb{N} \\ \text{Funcions pròpies: } X(x) = X_n(x) = \sin x, n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

(d2) $T' = 4\lambda_n T \implies T_n(t) = e^{-4n^2 t}$.

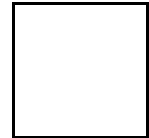
Per tant, $w_n(x, t) = e^{-4n^2 t} \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$ i, imposant $w(x, 0) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-4n^2 t} \sin nx = \sin x \implies$

$a_1 = 1$ i $a_n = 0, \forall n \neq 1 \implies w(x, y) = e^{-4t \sin x}$.

(e) $u(x, t) = w(x, t) + v(x) = e^{-4t} \sin x + (x - \pi/2) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = x - (\pi/2)$.

Teoria

NOM:
 COGNOMS:
 DNI:



NOTA:

- (a) Donat un sistema lineal homogeni $X' = A(t) \cdot X$, amb $A(t)$ matriu $n \times n$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, enuncieu la fórmula de Liouville, que ens descriu l'evolució de $\det \Phi(t)$, essent $\Phi(t)$ una solució matricial del sistema.
- (b) Demostreu que si $X^1(t), \dots, X^n(t)$ són n solucions del sistema anterior amb $X^1(t_0), \dots, X^n(t_0)$ linealment independents, per a algun $t_0 \in I$, aleshores $X^1(t), \dots, X^n(t)$ són linealment independents per a tot $t \in I$.
- (c) En el cas $A(t) = \frac{1}{t}B$, $t > 0$, essent B matriu constant $n \times n$, proveu que tota solució matricial satisfà $\det \Phi(t) = t^c \det \Phi(1)$. Qui és c ?

Resolució:

- (a) Si $W(t) = \det \Phi(t)$ és el wronskià de la solució matricial $\Phi(t)$ i $\alpha(t) = \text{traça } A(t)$, llavors $W'(t) = \alpha(t)W(t)$.
- (b) $W' = \alpha(t)W \implies W(t) = e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} W(t_0)$, per a tot $t \in I$. Per tant, si $W(t_0) \neq 0$ per a algun $t_0 \in I$, veiem que $W(t) \neq 0$ per a tot $t \in I$.
- (c) $A(t) = \frac{1}{t}B \implies \alpha(t) = b/t$ amb $b = \text{traça } B$.

$$W' = \frac{b}{t}W, \text{ prenent } t_0 = 1 \implies W(t) = e^{\int_1^t (b/s)ds} W(1) = e^{b \ln t} W(1) = t^b W(1) \implies \\ \implies c = b = \text{traça } B.$$