Equacions Diferencials

Codi: 22701

Temps: 1 hora 30 minuts

31 de Gener de 2003

Problemes

A. Considereu el sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -(\alpha+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

(a) Classifiqueu el punt crític $(0,0)$ i deduïu-ne l'estabilitat, segons els valors d'α.

Ind.: Podeu estudiar el signe de la traça i del determinant de la matriu associada.

(b) Trobeu una matriu fonamental per al sistema (1), segons els valors d'α.

(c) Calculeu la solució $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ de (1) tal que $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Trobeu el $\lim\limits_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, on $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ és la solució trobada a l'apartat anterior, segons els valors d'α.

(e) Relacioneu el resultat trobat a (d) amb l'estabilitat del punt crític $(0,0)$.

Resolució:

(a) Com que la matriu $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$ és triangular, obtenim directament que els seus valors propis són $\lambda_1 = \alpha$ i $\lambda_2 = -(\alpha+1)$, tots dos *reals*. Tenim: $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = -1$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = -\alpha(\alpha+1)$.
Distingim els casos següents:

- Si $\alpha < -1$ o $\alpha > 0 \Longrightarrow \det A < 0 \Longrightarrow$ els valors propis tenen signe diferent. Per tant, el sistema té una *sella* al $(0,0)$, i és *inestable*.
- Si $-1 < \alpha < 0 \Longrightarrow \det A > 0$. Com que $\operatorname{tr} A < 0$, els dos valors propis seran negatius. Observem que $\lambda_1 = \lambda_2 \Longleftrightarrow \alpha = -1/2$.
  - Si $\alpha = -1/2$, llavors $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ no és diagonalitzable. Tenim un *node impropi estable*.
  - Si $\alpha \neq -1/2$, tenim un *node propi estable*.

  En tots dos casos, el $(0,0)$ és *asimptòticament estable*.
- Si $\alpha = -1$ o $\alpha = 0 \Longrightarrow \det A = 0$ i els valors propis són 0 i -1. Per tant, el sistema és *degenerat* i el $(0,0)$ és *estable no asimptòticament*.

(b)

- Si $\alpha \neq -1/2$, els valors propis són diferents i per tant la matriu A diagonalitza. En aquest cas tenim els vectors propis $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de valor propi α i $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(2\alpha+1) \end{pmatrix}$ de valor propi $-(\alpha+1)$. Per tant, una matriu fonamental és $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & e^{-(\alpha+1)t} \\ 0 & -(2\alpha+1)e^{-(\alpha+1)t} \end{pmatrix}$.

- Si $\alpha = -1/2$, la matriu $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ no diagonalitza. Prenem aleshores, per exemple, el vector $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left[\text{Ker} \left(A + \frac{1}{2}I\right)^2 \setminus \text{Ker} \left(A + \frac{1}{2}I\right) \right]$, i $v_2 = \left(A + \frac{1}{2}I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tant, $A = SJS^{-1}$, essent $J = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'on una matriu fonamental vindrà donada per $\Phi(t) = Se^{tJ} = e^{-t/2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Si $\Phi(t)$ és matriu fonamental, llavors $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$és matriu principal. La solució amb la condició inicial donada vindrà donada per $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculant amb les $\Phi(t)$ obtingudes a (b), obtenim:

- Si $\alpha \neq -1/2$,

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -(2\alpha+1) \end{pmatrix} \Longrightarrow \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{(2\alpha+1)} \\ 0 & -\frac{1}{(2\alpha+1)} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $\alpha = -1/2$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Phi(0)^{-1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) A partir de (c) deduïm

- Si $\alpha > 0$, $\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\infty \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\alpha = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e)
- Si $\alpha > 0$, el $(0,0)$ és inestable i per tant cal esperar que hi hagi solucions que s'allunyin del $(0,0)$.
- Si $\alpha = 0$, el $(0,0)$ és estable no asimptòticament i per tant cal esperar que hi hagi solucions que no tendeixin al $(0,0)$ ni se n'allunyin.
- Si $\alpha < 0$:
  - Si $-1 < \alpha < 0$, el $(0,0)$ és asimptòticament estable i per tant tota solució tendirà al $(0,0)$.
  - Si $\alpha = -1$, el $(0,0)$ és estable no asimptòticament (valors propis 0 i -1). La solució trobada tendeix al $(0,0)$ perquè es troba sobre la direcció estable del $(0,0)$.
  - Si $\alpha < -1$, el $(0,0)$ és inestable (una sella). La solució trobada tendeix al $(0,0)$ perquè es troba sobre la direcció estable del $(0,0)$.

B. Considerem el problema de valor inicial per a l'equació d'ones no homogènia

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \cos x + \sin t\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(a) Trobeu una solució particular $w(x)$ (que no depengui de t), de $u_{tt} - u_{xx} = \cos x$.

(b) Trobeu una solució particular $z(t)$ (que no depengui de x), de $u_{tt} - u_{xx} = \sin t$.

(c) Si considerem el canvi $v(x,t) = u(x,t) - w(x) - z(t)$, demostreu que $v(x,t)$ satisfà un problema de valor inicial del tipus

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0 \\ v(x,0) = f(x) \\ v_t(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3}$$

i determineu $f(x)$ i $g(x)$.

(d) Resoleu (3) i deduïu-ne la solució de (2).

Resolució:

(a) Substituint $w(x)$ a l'equació en derivades parcials $u_{tt} - u_{xx} = \cos x$, obtenim $0 - w_{xx} = \cos x$, és a dir $w_{xx} = -\cos x$. Integrant dues vegades, tenim per exemple la solució $w(x) = \cos x$.

(b) Substituint $z(t)$ a l'equació en derivades parcials $u_{tt} - u_{xx} = \sin t$, obtenim $z_{tt} - 0 = \sin t$. Integrant dues vegades, $z(t) = -\sin t$.

(c) Amb el canvi proposat, obtenim el problema següent:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = (u_{tt} - 0 - z_{tt}) - (u_{xx} - w_{xx} - 0) = u_{tt} - \sin t - u_{xx} - \cos x = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x) - z(0) = 0 - \cos x - 0 = -\cos x = f(x) \\ v_t(x,0) = u_t(x,0) - 0 - z_t(0) = 0 - (-1) = 1 = g(x) \end{cases}$$

(d) Tenim en (c) l'equació d'ones en un domini no acotat. Apliquem la fórmula de D'Alembert, amb les funcions $f(x)$ i $g(x)$ trobades a (c).

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds = \\ &= -\frac{1}{2}(\cos(x+t) + \cos(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 1\,ds = t - \cos x\,\cos t\,. \end{aligned}$$

Finalment desfem el canvi de l'apartat (c) per tenir la solució de (2): $u(x,t) = v(x,t) + w(x) + z(t) = t - \cos x \cos t + \cos x - \sin t$.

Equacions Diferencials **Codi: 22701**

Temps: 30 minuts **Teoria** 31 de Gener 03

NOM: ....
COGNOMS: ....
DNI: ....

NOTA:

- Siguin $A(t)$ i $F(t)$ dues matrius $n \times n$ i $n \times 1$, respectivament. Considerem el sistema lineal d'equacions diferencials:

$$X' = A(t)X + F(t) \tag{1}$$

1. Definiu la noció de solució matricial fonamental del sistema homogeni associat a (1).
2. Deduïu una solució particular de (1) pel mètode de variació de paràmetres.
3. Doneu la solució general de (1).