

Problemes

A. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Sigui $\Phi(t)$ una solució matricial del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Calculeu $\det \Phi(t)$ en funció de $\det \Phi(0)$ i de t utilitzant la Fórmula de Liouville.
- (b) Calculeu e^{tA} .
- (c) Suposeu que $f_1(t)$ i $f_2(t)$ són dues funcions contínues a l'interval $[0, L]$. Si definim $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$, i escrivim $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, demostreu que el problema amb valors a la frontera

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{F}(t) \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(L) = 0 \end{cases}$$

té sempre una solució i només una.

(Indicació: Feu servir l'expressió $\vec{x}_G(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ sense explicitar quan val $\vec{x}_p(t)$.)

Resolució:

- (a) Com que la traça de A és 4, per la fórmula de Liouville

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(0)e^{4t}.$$

- (b) $(2, 1)^\top$ és vector propi de A de valor propi 7 i $(1, -2)^\top$ és vector propi de A de valor propi -3 . Per tant

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & e^{-3t} \\ e^{7t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

és solució matricial fonamental, i

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & e^{-3t} \\ e^{7t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{7t} + \frac{1}{5}e^{-3t} & \frac{2}{5}e^{7t} - \frac{2}{5}e^{-3t} \\ \frac{2}{5}e^{7t} - \frac{2}{5}e^{-3t} & \frac{1}{5}e^{7t} + \frac{4}{5}e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) Si $\vec{x}_p(t)$ és una solució particular qualsevol, la solució general del sistema és

$$\vec{x}(t) = ae^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \vec{x}_p(t) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Imposant les condicions de frontera ens queda el sistema d'equacions per a i b

$$\begin{aligned} 2a + b &= -x_{p1}(0) \\ ae^{7L} - 2be^{-3L} &= -x_{p2}(L) \end{aligned}$$

que té determinant diferent de zero, i per tant una solució i només una.

B. Considereu el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 - 3\mu^2 \\ -1 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

amb $\mu \in \mathbb{R}$.

Caracteritzeu el punt d'equilibri $(0, 0)$ i estudeu-ne l'estabilitat en funció de μ , per a $\mu \geq 0$.

Resolució: Valors propis:

- $\lambda_{1,2} = \mu \pm 2\sqrt{\mu^2 - 1}$
- $T = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\mu$
- $\det = D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 - 3\mu^2$

Distingim 3 casos, segons el signe de $\mu^2 - 1$:

- Cas 1: $0 \leq \mu < 1$, λ_1, λ_2 arrels complexes conjugades de part real $\mu \geq 0$
 - $\mu = 0 \Rightarrow (0, 0)$ centre (estable)
 - $\mu \in (0, 1)$ focus (inestable)
- Cas 2: $\mu = 1$, matriu de Jordan $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 0)$ és node impropri (inestable).
- Cas 1: $\mu > 1$, λ_1, λ_2 arrels reals i diferents.
 $\lambda_1 = \mu + 2\sqrt{\mu^2 - 1} > 0$. Mirem el signe de λ_2 a partir de $D = 4 - 3\mu^2$:
 - Cas 3.1: $\mu \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $D > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ node propi (inestable).
 - Cas 3.2: $\mu = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $D = 0$, $\lambda_2 = 0$, $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (0, 0)$ degenerat (inestable), (recta de punts d'equilibri).
 - Cas 3.3: $\mu > \frac{2}{\sqrt{3}}$, $D < 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ sella (inestable).

Resum

$\mu > (2/\sqrt{3})$	sella (inestable)
$\mu = (2/\sqrt{3})$	degenerat (inestable)
$1 < \mu < (2/\sqrt{3})$	node propi (inestable)
$\mu = 1$	node impropri (inestable)
$0 < \mu < 1$	focus (inestable)
$\mu = 0$	centre (estable)

Equacions Diferencials

Codi: 22701

Temps: 30 minuts

15 de Gener de 2002

Teoria

- Considerem l'equació $y'' + w^2y = f(t)$, corresponent al cas d'oscil·lacions forçades no esmorteïdes, essent $f(t)$ periòdica de període p .
 1. Enuncieu el resultat que caracteritza l'existència o no de solucions periòdiques de l'equació.
 2. Apliqueu (1) a les següents equacions:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y'' + y = \sin t. \\ \text{(ii)} & y'' + y = \sin(\pi t). \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(iii)} & y'' + y = \sin 2t + \cos 3t \\ \text{(iv)} & y'' + y = \sin 2t \end{array}$$

per dir quantes solucions periòdiques tenen, i de quin període (no les heu de calcular).