

Ecuaciones Lineales

En este tema vamos a estudiar las *EDOs lineales (en forma normal)*. Es decir, EDOs de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

siendo $b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto I . Notamos que el coeficiente que acompaña a la derivada de orden más alto está *normalizado*; es decir, es igual a uno. En caso contrario, podemos “intentar” *normalizar* la EDO dividiéndola por el coeficiente $a_n(t)$.

Diremos que esta EDO lineal es:

- *homogénea*, cuando $b(t) = 0$.
- *a coeficientes constantes*, cuando las funciones $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ no dependan del tiempo.

Dada una EDO lineal no homogénea, su *EDO homogénea asociada* es la que queda al poner $b(t) = 0$.

Pregunta. ¿Es lineal la EDO $y'' + y = x^2$? ¿Y la EDO $x'' + x^2 = t$? ¿Es a coeficientes constantes la EDO lineal $x'' + x = \cos t$?

Queremos saber como son las soluciones de estas EDOs y desarrollar métodos para resolverlas.

ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES

En esta sección vamos a estudiar la estructura de las soluciones de una EDO lineal. Veremos que en el caso homogéneo las soluciones forman un subespacio vectorial cuya dimensión coincide con el orden de la EDO. En el caso no homogéneo las soluciones se pueden expresar como la suma de las soluciones de la EDO homogénea asociada y una solución particular cualquiera de la EDO no homogénea.

PVIs lineales. Los PVI's asociados a la anterior EDO lineal tienen la forma

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

donde el instante inicial $t_0 \in I$ y las condiciones iniciales $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ son datos del problema.

Teorema. Si las funciones $b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $t_0 \in I$, entonces este PVI tiene exactamente una solución definida en todo el intervalo I .

En este curso no demostraremos ningún teorema de existencia y unicidad.

Pregunta. La derivada n -ésima de la solución del teorema anterior es continua en I . ¿Por qué?

Este teorema de existencia y unicidad no es igual al presentado en el tema *Introducción* para EDOs generales (no lineales) en forma normal. La diferencia principal es que aquel teorema general tan sólo tiene un carácter local, mientras que este teorema lineal es global: sabemos que la solución del PVI está definida y es de clase C^n en todo el intervalo I .

Ejemplo 1. La solución del PVI lineal a coeficientes constantes de segundo orden

$$x'' = -x, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

es la función $x(t) = x_0 \cos t + v_0 \sin t$.

Ejemplo 2. La solución del PVI lineal de primer orden

$$tx'' + x = 0, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 0$$

es una función de clase C^2 en el intervalo $I = (0, +\infty)$. (Es analítica, pero eso cae fuera del programa.)

Ejercicio. Comprobar que la solución del PVI lineal de primer orden $x' + tx = \sin t$, $x(0) = x_0$, es

$$x(t) = x_0 e^{-t^2/2} + e^{-t^2/2} \int_0^t e^{s^2/2} \sin s \, ds = e^{-t^2/2} \left(x_0 + \int_0^t e^{s^2/2} \sin s \, ds \right).$$

Indicación: Recordar la fórmula para resolver EDOs lineales de primer orden dada en *Cálculo 2*.

Linealidad. Asociamos a nuestra EDO lineal el operador diferencial

$$L : C^n(I) \rightarrow C(I), \quad L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x.$$

Ejemplo 3. El operador $L : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ definido por $L[x] = x' + tx$ cumple

$$L[t^2] = 2t + t^3, \quad L[e^t] = (1+t)e^t, \quad L[e^{-t^2/2}] = 0.$$

En particular, vemos que la función $x_h(t) = e^{-t^2/2}$ pertenece al núcleo del operador L pues $x'_h + tx_h = 0$.

Así, nuestra EDO se escribe como $L[x] = b(t)$ y el operador $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$ es lineal, pues

- $L[x + y] = L[x] + L[y]$, para cualquier par de funciones $x, y \in C^n(I)$.
- $L[cx] = cL[x]$, para todo escalar $c \in \mathbb{R}$ y para toda función $x \in C^n(I)$.

Ahora se intuye que existe alguna relación entre:

1. Resolver un sistema lineal de la forma $L\vec{x} = \vec{b}$, donde la matriz $L \in M_n(\mathbb{R})$ y el vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ son datos, mientras que el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es la incógnita; y
2. Resolver una EDO lineal $L[x] = b(t)$, donde el operador $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$ y la función $b(t) \in C(I)$ son datos, mientras que la función $x = x(t) \in C^n(I)$ es la incógnita.

Ya que estamos trabajando con los operadores lineales $L : C^n(I) \rightarrow C(I)$, nos conviene recordar un par de resultados de la asignatura *Álgebra Lineal*:

- Si $L : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal, su núcleo es un subespacio vectorial (sev) de E .
- Si $f : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal biyectiva, entonces $\dim E = \dim F$.

Aplicando esos resultados, vemos que:

- Las soluciones de la EDO lineal homogénea $L[x] = 0$ forman un sev de dimensión n , y
- Dada una solución $x_p(t)$ de la EDO lineal no homogénea $L[x] = b(t)$ y una solución $x_h(t)$ de la EDO homogénea asociada, la suma $x_h(t) + x_p(t)$ también cumple la EDO no homogénea.

La única afirmación no inmediata es que el subespacio vectorial

$$Z = \text{Nuc } L = \{x \in C^n(I) : L[x] = 0\} = \{\text{soluciones de la EDO lineal homogénea } L[x] = 0\}$$

tiene dimensión n . Fijamos un instante arbitrario $t_0 \in I$ y consideramos la aplicación lineal

$$Z \ni x(t) \xrightarrow{f} (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \in \mathbb{R}^n.$$

Esta aplicación es inyectiva (unicidad) y exhaustiva (existencia), luego $\dim Z = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Conjunto fundamental de soluciones. Podemos expresar un sev mediante cualquiera de sus bases. Para describir la solución general $x_h(t)$ de la EDO homogénea $L[x] = 0$ basta conocer n soluciones linealmente independientes (li) $x_1(t), \dots, x_n(t)$; entonces

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Definición. Cualquier base $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ del sev $Z = \text{Nuc } L$ es un *conjunto fundamental (de soluciones)* de la EDO lineal homogénea $L[x] = 0$.

Así pues, una EDO lineal homogénea tiene infinitos conjuntos fundamentales.

Ejemplo 4. Consideramos la EDO lineal no homogénea de segundo orden

$$tx'' - 2(1+t)x' + (t+2)x = t + t^2.$$

Si nos dicen que $x_p(t) = 1 + t$ es una solución particular y que las funciones $x_1(t) = e^t$ y $x_2(t) = t^3e^t$ son soluciones de la EDO homogénea asociada, entonces sabemos que todas las combinaciones lineales

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = (c_1 + c_2t^3)e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

cumplen la EDO homogénea y todas las sumas

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) = (c_1 + c_2t^3)e^t + 1 + t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

cumplen la EDO no homogénea.

Pregunta. ¿Forman las funciones $x_1(t) = e^t$ y $x_2(t) = t^3 e^t$ un conjunto fundamental de la EDO homogénea asociada del ejemplo anterior? En otras palabras, ¿son li?

Wronskiano, fórmula de Liouville e independencia lineal. Queremos desarrollar un método para comprobar cuando n soluciones de la EDO lineal homogénea $L[x] = 0$ son li.

Definición. Unas funciones $x_1(t), \dots, x_n(t) \in C^n(I)$ son li cuando de la expresión $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$ se sigue que todos los coeficientes son nulos: $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Es importante observar que:

- Los coeficientes c_1, \dots, c_n son constantes (no dependen de t), y
- La identidad $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$ es en el espacio de funciones, luego significa

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Ejercicio. Probar que las funciones $1, t, t^2, \dots, t^p$ son li. (Truco: Derivar $c_0 + c_1 t + \dots + c_p t^p = 0$.)

El truco de la derivación se puede extender al caso general. Supongamos que queremos saber si unas funciones $x_1(t), \dots, x_n(t) \in C^n(I)$ son li. Derivando sucesivamente la identidad $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) & = 0 \\ c_1 x_1'(t) + \dots + c_n x_n'(t) & = 0 \\ \vdots & \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n x_n^{(n-1)}(t) & = 0 \end{cases}.$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal homogéneo con n incógnitas (los coeficientes c_1, \dots, c_n) y n ecuaciones. El determinante de la matriz del sistema es igual a

$$W(t) = W[x_1(t), \dots, x_n(t)] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Definición. Este determinante es el *Wronskiano* de las funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Recordamos que un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{0}$ con tantas ecuaciones como incógnitas es compatible y determinado cuando $\det A \neq 0$, en cuyo caso tiene una única solución: $\vec{x} = 0$. Por tanto,

$$\exists t_0 \in I \text{ t.q. } W(t_0) \neq 0 \implies c_1 = \dots = c_n = 0 \implies x_1(t), \dots, x_n(t) \text{ li.}$$

El recíproco es falso. Existen ejemplos rebuscados de funciones li cuyo Wronskiano es idénticamente nulo. Pero estas cosas raras no pasan en Z y, por tanto, no nos interesan demasiado.

Proposición. Sean $x_1(t), \dots, x_n(t)$ soluciones de una EDO lineal homogénea de orden n . Entonces:

- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ li $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) = 0 \Leftrightarrow W(t) = 0 \quad \forall t \in I$.
- $x_1(t), \dots, x_n(t)$ li $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I$ t.q. $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Algunas equivalencias no son inmediatas, sino que son consecuencia de la *fórmula de Liouville*.

Teorema (Fórmula de Liouville). Si $W(t)$ es el Wronskiano de n soluciones arbitrarias de la EDO lineal homogénea $L[x] = 0$, entonces $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$, luego

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds}, \quad \forall t \in I.$$

Esta fórmula se puede deducir usando la fórmula homónima del tema *Sistemas Lineales*.

Ejercicio. Probar la fórmula de Liouville para el caso $n = 2$.

Problemas de la lista. (Conjunto fundamental de soluciones) y (Fórmula de Liouville, Pb3 Octubre 2008).

ECUACIONES LINEALES A COEFICIENTES VARIABLES

Todos los resultados anteriores son de tipo teórico. Ahora nos centramos en presentar métodos prácticos para calcular explícitamente algunas soluciones. Empezamos por las EDOs lineales cuyos coeficientes $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ son funciones continuas en un cierto intervalo.

El método de reducción de orden para ecuaciones homogéneas. En general, no es posible calcular de forma explícita conjuntos fundamentales de soluciones de EDOs lineales homogéneas de segundo orden. Sin embargo, dada una solución $x_1(t)$ de la EDO lineal homogénea de segundo orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

podemos calcular una segunda solución $x_2(t)$ que sea li con la primera mediante la siguiente fórmula.

Teorema (Fórmula de reducción de orden). *La función*

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t) dt}}{x_1(t)^2} dt$$

forma un conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea junto a $x_1(t)$.

Aplicaremos esta fórmula sólo en aquellos puntos donde no se anule la primera solución $x_1(t)$. Es importante retener que esta fórmula presupone que la EDO está en forma normal. En caso contrario, debemos normalizarla, dividiendo toda la EDO por el coeficiente que acompañe a la derivada n -ésima.

Demostración. Buscamos una segunda solución de la forma $x_2(t) = x_1(t)u(t)$ para alguna $u(t)$. Para calcular esta función incógnita $u(t)$, imponemos que $x_2(t)$ cumpla la EDO:

$$\begin{aligned} 0 = x_2'' + a_1 x_2' + a_0 x_2 &= (x_1'' u + 2x_1' u' + x_1 u'') + a_1(x_1' u + x_1 u') + a_0 x_2 \\ &= x_1 u'' + (2x_1' + a_1 x_1) u' + (x_1'' + a_1 x_1' + a_0 x_1) u \\ &= x_1 w' + (2x_1' + a_1 x_1) w \end{aligned}$$

pues $x_1(t)$ es una solución de la EDO y hemos introducido la notación $w = u'$. Esta nueva función $w(t)$ es una solución de la EDO lineal homogénea de primer orden

$$w'(t) = a(t)w(t), \quad a(t) = -2 \frac{x_1'(t)}{x_1(t)} - a_1(t).$$

De ahí viene la expresión “reducción de orden”, pues hemos reducido la EDO de segundo orden a una de primer orden. En la asignatura *Cálculo 2* vimos que las funciones

$$w(t) = ce^{\int a(t) dt}, \quad c \in \mathbb{R}$$

cumplen la EDO lineal homogénea de primer orden $w'(t) = a(t)w(t)$. Tomando $c = 1$, obtenemos que

$$w(t) = e^{\int a(t) dt} = e^{-2 \int x_1'(t)/x_1(t) dt} e^{-\int a_1(t) dt} = e^{-2 \ln x_1(t)} e^{-\int a_1(t) dt} = x_1(t)^{-2} e^{-\int a_1(t) dt}$$

es una solución de nuestra EDO “reducida”. Ahora, recordando que $x_2(t) = x_1(t)u(t)$ y $w(t) = u'(t)$, llegamos a la fórmula dada en el enunciado del teorema.

Finalmente, calculamos el Wronskiano de las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para comprobar que son li:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_1(t)u(t) \\ x_1'(t) & x_1'(t)u(t) + x_1(t)u'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)^2 u'(t) = e^{-\int a_1(t) dt} \neq 0.$$

□

Observación. En el caso general también se puede reducir el orden. Concretamente, si $x_1(t)$ es una solución de la EDO lineal homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

e imponemos que $x_2(t) = x_1(t)u(t)$ sea una segunda solución, se obtiene que la función $w(t) = u'(t)$ cumple una EDO lineal homogénea de orden $n - 1$.

Problema de la lista. (Método de reducción del orden)

El método de variación de parámetros para ecuaciones no homogéneas. El objetivo de este apartado consiste en calcular una solución particular de la EDO lineal no homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

suponiendo que conocemos algún conjunto fundamental de soluciones de su EDO homogénea asociada.

Teorema (Fórmula de variación de parámetros). *La función*

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + \dots + u_n(t)x_n(t)$$

es una solución particular de la EDO no homogénea si

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

y $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ es un conjunto fundamental de la EDO homogénea asociada. Este sistema lineal siempre es compatible y determinado, pues su determinante es el Wronskiano

$$W(t) = W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$$

que no se anula en ningún punto. Finalmente, resolviendo el sistema por Cramer, se obtiene que

$$u_k(t) = \int \frac{W_k(t)}{W(t)} dt, \quad k = 1, \dots, n$$

donde $W(t)$ es el Wronskiano anterior, mientras que $W_k(t)$ es el determinante de la matriz que se obtiene al substituir la columna k -ésima de la matriz del sistema por el término independiente.

No vamos a probar esta fórmula de variación de parámetros, pues se puede deducir de una fórmula de variación de parámetros más general que veremos en el tema *Sistemas Lineales*.

Recordamos que la combinación lineal

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

es la solución general de la EDO homogénea asociada, donde los parámetros $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son constantes libres. En cambio, ahora buscamos una solución particular permitiendo que esos parámetros dependan del tiempo t . Es decir, variamos los parámetros. De ahí viene el nombre del método.

Cuando la EDO es de segundo orden: $n = 2$, existe una versión simplificada de la fórmula original. Concretamente, resulta que entonces podemos calcular una solución particular con las fórmulas

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t), \quad u_1(t) = - \int \frac{x_2(t)b(t)}{W(t)} dt, \quad u_2(t) = \int \frac{x_1(t)b(t)}{W(t)} dt.$$

Observación. No hace falta escribir constantes de integración al calcular estas integrales indefinidas.

Ejercicio. Deducir la versión simplificada a partir de la fórmula original.

Problemas de la lista. (Método de variación de parámetros) y (EDOs lineales no homogéneas por variación de parámetros).

ECUACIONES LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES

Ahora estudiamos las EDOs lineales (homogéneas o no) cuyos coeficientes son constantes. Es decir, los coeficientes no dependen del tiempo, aunque el término no homogéneo $b(t)$ si puede depender del tiempo. Estas EDOs son un caso muy particular de EDOs a coeficientes variables, luego el método de reducción de orden y el método de variación de parámetros siguen siendo válidos en este contexto. Sin embargo, existen otros métodos especialmente adecuados para resolver estas EDOs.

El método del polinomio característico para ecuaciones homogéneas. La idea detrás del método del polinomio característico consiste en que las funciones exponenciales de la forma $e^{\lambda t}$ son candidatos naturales a soluciones de las EDOs lineales homogéneas a coeficientes constantes del tipo

$$L[x] = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0.$$

Recordamos que $L : C^n(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ es el operador diferencial asociada a la EDO. Este operador actúa sobre las funciones exponenciales $e^{\lambda t}$ de la siguiente forma:

$$L[e^{\lambda t}] = \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$$

donde $P(\lambda)$ es el polinomio de grado n dado por

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Definición. Este polinomio es el *polinomio característico* de la EDO homogénea $L[x] = 0$.

Usando la relación $L[e^{\lambda t}] = P(\lambda)e^{\lambda t}$ obtenemos dos consecuencias importantes:

- $m \in \mathbb{R}$ raíz del polinomio característico $\Rightarrow e^{mt}$ es solución de la EDO $L[x] = 0$.
- $\alpha \pm \beta i$ raíces complejas conjugadas de $P(\lambda) \Rightarrow e^{\alpha t} \cos \beta t$ y $e^{\alpha t} \sin \beta t$ también son soluciones.

La primera es directa. Para probar la segunda, partimos de las soluciones

$$x_{\pm}(t) := e^{(\alpha \pm \beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\pm \beta t i} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t).$$

La última igualdad es consecuencia de la fórmula de Euler. Ahora recordamos que el conjunto de soluciones es un sev. En particular, las combinaciones lineales

$$\frac{x_+(t) + x_-(t)}{2} = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \frac{x_+(t) - x_-(t)}{2i} = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

también serán soluciones de la EDO.

Ejemplo 5. Resolver la EDO $x'' = x$. Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Por tanto, $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^t$ y $x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$ son soluciones de la EDO. El Wronskiano de estas soluciones es $W(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = -2 \neq 0$, luego son li. Así pues, la solución general de la EDO $x'' = x$ es

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio. Comprobar que otra forma de expresar la solución general de la EDO $x'' = x$ es

$$x_h(t) = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 6. Resolver la EDO $x'' + \omega^2 x = 0$, con $\omega > 0$. Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ son complejas conjugadas: $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$. Por tanto, las funciones trigonométricas $x_1(t) = \cos \omega t$ y $x_2(t) = \sin \omega t$ son soluciones de la EDO. El Wronskiano de estas soluciones es $W(t) = \omega \neq 0$, luego son li. Así pues, la solución general de la EDO $x'' + \omega x = 0$ es

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En principio la estrategia parece clara. Dada una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes de orden n , calculamos las n raíces de su polinomio característico, cada raíz “genera” una solución y así obtenemos un conjunto fundamental de n soluciones. Pero esta estrategia falla estrepitosamente cuando existen raíces múltiples.

Ejemplo 7. Sea $m \in \mathbb{R}$ un parámetro arbitrario. Al resolver la EDO de segundo orden

$$x'' - 2mx' + m^2x = 0,$$

su polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2m\lambda + m^2 = (\lambda - m)^2$ tiene una única raíz doble: $\lambda = m$. Así pues, obtenemos una única solución: $x_1(t) = e^{mt}$. Pero la EDO es de segundo orden, luego necesitamos una segunda solución $x_2(t)$ para poder formar un conjunto fundamental de soluciones. ¿Qué hacemos? Aplicar la fórmula de reducción de orden:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t) dt}}{x_1(t)^2} dt = e^{mt} \int \frac{e^{-\int 2m dt}}{e^{2mt}} dt = e^{mt} \int dt = te^{mt}.$$

Por tanto, la solución general de la EDO es $x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{mt}$, siendo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ parámetros libres.

Cuando existen raíces múltiples pero la EDO no es de segundo orden, no disponemos de una fórmula mágica para “cazar” más soluciones. Sin embargo, al igual que el ejemplo anterior, basta multiplicar las funciones básicas por potencias sucesivas de t . Damos el siguiente resultado sin probarlo.

Teorema. Para resolver una EDO lineal homogénea a coeficientes constantes, asociamos a cada raíz de su polinomio característico unas funciones según las siguientes reglas:

- Raíz $m \in \mathbb{R}$ de multiplicidad $k \implies e^{mt}, te^{mt}, \dots, t^{k-1}e^{mt}$.
- Raíces $\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ de multiplicidad $k \implies \begin{cases} e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$.

Y todas esas funciones juntas forman un conjunto fundamental de soluciones de la EDO.

Resaltamos que, según este teorema, las funciones así obtenidas siempre son li. Es decir, no hace falta comprobar que su Wronskiano no se anula.

Problemas de la lista. (EDOs lineales homogéneas a coeficientes constantes), (Fórmula de Taylor) y (Parcial Abril 2008).

El método de los coeficientes indeterminados para ecuaciones no homogéneas. El método de los coeficientes indeterminados sirve para calcular una solución particular de aquellas EDOs lineales no homogéneas que cumplen el siguiente par de condiciones:

- Son a coeficientes constantes, y
- Su término no homogéneo es un polinomio, una función exponencial del tipo e^{mt} , una función trigonométrica del tipo $\cos(\beta t)$ o $\sin(\beta t)$, o una suma de funciones que sean productos de los tres tipos anteriores.

Ejemplo 8. Los términos $b(t) = 7(1-t)^2 e^{-3t} \cos 5t - \sqrt{2} \sin 3t + t^6 e^t$ y $b(t) = \cos^2 t$ son aceptables, aunque el segundo tiene truco. En cambio, $b(t) = 4t \ln t$, $b(t) = \sqrt{t}$ y $b(t) = \tan t$ no lo son.

Definición. Si $b(t)$ es una solución de la EDO lineal homogénea a coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0,$$

diremos que el polinomio $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ anula a la función $b(t)$.

En particular, utilizando el teorema anterior, deducimos que:

- El polinomio $(\lambda - m)^k$ anula a las combinaciones lineales de las funciones $e^{mt}, te^{mt}, \dots, t^{k-1}e^{mt}$;
- El polinomio $(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2)^k$ anula a cualquier combinación lineal de las funciones $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin \beta t$.

Ejemplo 9. Tomando $m = 0$ en las fórmulas anteriores, vemos que el polinomio λ^k anula a las funciones polinomiales $b(t)$ tales que $\text{gr}[b(t)] < k$.

Ejemplo 10. Tomando $\alpha = 0$, $\beta = \omega$ y $k = 1$ en las fórmulas anteriores, vemos que el polinomio $\lambda^2 + \omega^2$ anula a todas las combinaciones lineales de las funciones trigonométricas $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$.

La siguiente propiedad es importante, aunque no la probaremos. Si los polinomios $P_1(\lambda)$ y $P_2(\lambda)$ anulan respectivamente a unas funciones $b_1(t)$ y $b_2(t)$, entonces $P(\lambda) = \text{m.c.m.}[P_1(\lambda), P_2(\lambda)]$ anula a todas las combinaciones lineales de $b_1(t)$ y $b_2(t)$. Esta propiedad es la base de los siguientes ejercicios.

Ejercicio. Encontrar un polinomio que anule a la función $b(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$.

Ejercicio. Sea $b(t) = 7(1-t)^2 e^{-3t} \cos 5t + 2e^t - \sqrt{2} \sin 3t + t^6 e^t$. ¿Cuál es el grado mínimo que puede tener un polinomio que anula a esta función? (Respuesta: $2 \times 3 + 2 + 7 = 15$.)

Problema de la lista. (Test Marzo 2007, generalizado).

A continuación, explicamos los pasos del método de los coeficientes indeterminados mediante un par de ejemplos concretos para clarificar ideas. Es importante dejar claro que no probaremos que el tercer paso del método funciona siempre. Tomadlo como un acto de fe.

Ejemplo 11. Calcular la solución general de la EDO lineal no homogénea $x''' + 2x'' + 9x' + 18x = e^{2t}$.

- **Paso 1: Resolver la EDO homogénea.**

La tabla del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda + 18$ es

Raíces	Mult.	Funciones
-2	1	e^{-2t}
$\pm 3i$	1	$\cos 3t, \sin 3t$

Por tanto, $x_1(t) = e^{-2t}$, $x_2(t) = \cos 3t$ y $x_3(t) = \sin 3t$ forman un conjunto fundamental y $x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = c_1e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

- **Paso 2: Encontrar un polinomio $P_1(\lambda)$ que anule al término no homogéneo $b(t) = e^{2t}$.**
El polinomio $P_1(\lambda) = (\lambda - 2)^1 = \lambda - 2$ anula a cualquier múltiplo de la función e^{2t} .
- **Paso 3: Construir un candidato $x_p(t)$ a solución particular usando el polinomio $P(\lambda)P_1(\lambda)$.**
La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 9)(\lambda - 2)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
-2	1	e^{-2t}
$\pm 3i$	1	$\cos 3t, \sin 3t$
2	1	e^{2t}

Esta tabla siempre es una ampliación de la primera tabla. Nuestro candidato a solución particular es la combinación lineal de las funciones que aparecen en la tabla ampliada, pero no en la primera: $x_p(t) = c_4e^{2t}$, siendo c_4 un coeficiente de valor, de momento, indeterminado.

- **Paso 4: Determinar los coeficientes indeterminados imponiendo que $x_p(t)$ cumpla la EDO.**

Al imponer que el candidato $x_p(t) = c_4e^{2t}$ cumpla la EDO, vemos que

$$e^{2t} = x_p''' + 2x_p'' + 9x_p' + 18x_p = 8c_4e^{2t} + 8c_4e^{2t} + 18c_4e^{2t} + 18c_4e^{2t} = 52c_4e^{2t} \Rightarrow c_4 = \frac{1}{52}.$$

Finalmente, $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t + e^{2t}/52$ es la solución general.

El problema es más difícil si escogemos un término no homogéneo *resonante*; es decir, que sea solución de la EDO homogénea. Concretamente, vamos a tomar $b(t) = e^{-2t}$ en vez de $b(t) = e^{2t}$. Entonces $x_p(t) = c_4e^{-2t}$ no puede ser un candidato a solución particular de la EDO no homogénea, pues ya es una solución de la EDO homogénea. ¿Cuál será el nuevo candidato? Vamos a verlo.

Ejemplo 12. Calcular la solución general de la EDO lineal no homogénea $x''' + 2x'' + 9x' + 18x = e^{-2t}$.

- **Paso 1: Resolver la EDO homogénea.**

Este paso no cambia: $x_h(t) = c_1e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ libres.

- **Paso 2: Encontrar un polinomio $P_1(\lambda)$ que anule al término no homogéneo $b(t) = e^{-2t}$.**
El polinomio $P_1(\lambda) = (\lambda - (-2))^1 = \lambda + 2$ anula a cualquier múltiplo de la función e^{-2t} .
- **Paso 3: Construir un candidato $x_p(t)$ a solución particular.**
La tabla del polinomio producto $P(\lambda)P_1(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda^2 + 9)$ es

Raíces	Mult.	Funciones
-2	2	e^{-2t}, te^{-2t}
$\pm 3i$	1	$\cos 3t, \sin 3t$

De nuevo, esta tabla es una ampliación de la inicial y nuestro candidato a solución particular es $x_p(t) = c_4te^{-2t}$, siendo c_4 un coeficiente de valor, de momento, indeterminado.

- **Paso 4: Determinar los coeficientes indeterminados imponiendo que $x_p(t)$ cumpla la EDO.**

Las primeras derivadas del candidato son $x_p'(t) = c_4(1 - 2t)e^{-2t}$, $x_p''(t) = c_4(4t - 4)e^{-2t}$ y $x_p'''(t) = c_4(12 - 8t)e^{-2t}$. Por tanto,

$$e^{-2t} = x_p''' + 2x_p'' + 9x_p' + 18x_p = c_4(12 - 8t + 8t - 8 + 9 - 18t + 18t)e^{-2t} = 13c_4e^{-2t} \Rightarrow c_4 = \frac{1}{13}.$$

Es importante resaltar que, aunque el candidato $x_p(t) = c_4te^{-2t}$ no era “igual” al término no homogéneo $b(t) = e^{-2t}$, cuando lo hemos “enchufado” en la EDO no homogénea, todos los términos peligrosos que contenían la expresión te^{-2t} se han cancelado milagrosamente. RIP.

Finalmente, $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = (c_1 + t/13)e^{-2t} + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t$ es la solución general.

Ejercicio. Resolver la EDO lineal de segundo orden $x'' + 4x = \sin \omega t$ en función de $\omega > 0$. El caso resonante es más complicado. ¿Cuál es? (Nota: Esta EDO es una *oscilación forzada no amortiguada*. Al final del tema estudiaremos con más detalle todas las oscilaciones.)

Observación. Si el candidato a solución particular tiene un término complicado como, por ejemplo, $t^2 e^{3t} \sin 5t$ y la EDO tiene orden cinco, deberemos derivar cinco veces ese monstruo. Que no nos pase nada... Afortunadamente podemos usar programas de manipulación simbólica, como MATLAB.

Problemas de la lista. (EDOs lineales no homogéneas a coeficientes constantes), (PVI lineales no homogéneos a coeficientes constantes), (Pb1 Octubre 2008) y (EDOs lineales a coeficientes constantes con MATLAB).

Ecuaciones de Cauchy-Euler. Las *ecuaciones de Cauchy-Euler* son las EDOs lineales de la forma

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = b(t).$$

No son ecuaciones a coeficientes constantes, aunque sí lo sean los coeficientes a_j , pues un monomio t^j acompaña a cada coeficiente a_j . Estas ecuaciones son singulares en $t = 0$, pues su forma normal contiene potencias negativas de t . Así pues, las estudiaremos en las semirectas $(-\infty, 0)$ o $(0, +\infty)$. Su principal característica es que se transforman en una EDO lineal a coeficientes constantes mediante el cambio de variable independiente $t = e^s$, aunque nosotros sólo vamos a probarlo cuando $n = 2$.

Proposición. *El cambio de variable independiente $t = e^s$ transforma la ecuación de Cauchy-Euler*

$$a_2 t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = h(t), \quad t > 0$$

en la ecuación lineal a coeficientes constantes

$$a_2 \frac{d^2 x}{ds^2} + (a_1 - a_2) \frac{dx}{ds} + a_0 x = h(e^s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Basta relacionar las derivadas respecto a las dos variables independientes entre sí:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} = e^s \frac{dx}{dt} = t \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(e^s \frac{dx}{dt} \right) = e^s \frac{dx}{dt} + e^s \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{dt} \right) = t \frac{dx}{dt} + t^2 \frac{d^2 x}{dt^2}. \end{aligned}$$

Para obtener la primera relación hemos aplicado la regla de la cadena. En cambio, para obtener la segunda tan sólo hemos usado un par de veces la primera relación. ¡Comprobadlo! \square

Ejercicio. Probar que $t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{d^3 x}{ds^3} - 3 \frac{d^2 x}{ds^2} + 2 \frac{dx}{ds}$.

Ahora ya tenemos el primer método de resolución: transformar la EDO de Cauchy-Euler en una EDO a coeficientes constantes, resolver la EDO transformada usando las técnicas de las secciones anteriores y deshacer el cambio de variables. En ese último paso, como $t = e^s$, se cumplen las relaciones

$$s^j e^{ms} = t^m \ln^j t, \quad s^j e^{\alpha s} \cos \beta s = t^\alpha \ln^j t \cos(\beta \ln t), \quad s^j e^{\alpha s} \sin \beta s = t^\alpha \ln^j t \sin(\beta \ln t).$$

Ejemplo 13. Resolver el PVI no homogéneo $3t^2 x'' + 11tx' - 3x = 8 - 3 \ln t$, $x(1) = 1$ y $x'(1) = 4/3$.

Sabemos que el cambio $t = e^s$ transforma la ecuación de Cauchy-Euler en la ecuación

$$3\ddot{x} + 8\dot{x} - 3x = 8 - 3 \ln e^s = 8 - 3s.$$

Hemos usado la notación \dot{x} y \ddot{x} para escribir las derivadas respecto la nueva variable.

Empezamos resolviendo la EDO homogénea asociada por el método del polinomio característico. Las raíces de $P(\lambda) = 3\lambda^2 + 8\lambda - 3 = (3\lambda - 1)(\lambda + 3)$ son $\lambda_1 = 1/3$ y $\lambda_2 = -3$. Por tanto,

$$x_h(s) = c_1 e^{s/3} + c_2 e^{-3s}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la EDO homogénea asociada a la EDO transformada.

El polinomio $P_1(\lambda) = (\lambda - 0)^2 = \lambda^2$ anula al término no homogéneo $8 - 3s$, luego nuestro candidato a solución particular es $x_p(s) = c_3 + c_4s$. Para determinar el valor de los coeficientes c_3 y c_4 , imponemos que el candidato $x_p(s)$ cumpla la EDO no homogénea:

$$8 - 3s = 3\ddot{x}_p + 8\dot{x}_p - 3x_p = 8c_4 - 3(c_3 + c_4s) = (8c_4 - 3c_3) - 3c_4s \implies c_3 = 0 \ \& \ c_4 = 1.$$

Así pues, $x_p(s) = s$ es la solución particular que buscábamos. Deshaciendo el cambio de variables,

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1\sqrt[3]{t} + c_2/t^3 + \ln t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la EDO de Cauchy-Euler inicial. Finalmente, determinamos el valor de los parámetros c_1 y c_2 imponiendo las condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} 1 = x(1) = c_1 + c_2 \\ 4/3 = x'(1) = c_1/3 - 3c_2 + 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Por tanto, la solución del PVI es la función $x(t) = \sqrt[3]{t} + \ln t$, definida en la semirecta $(0, +\infty)$.

Pregunta. Es peligroso aplicar las condiciones iniciales antes de deshacer el cambio. ¿Por qué?

Existe otra forma de resolver EDOs homogéneas de Cauchy-Euler: el método del polinomio auxiliar (o método de los monomios). Los monomios son candidatos naturales a soluciones de la EDO

$$L[x] = a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = 0,$$

pues el operador $L : C^m(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ actúa sobre ellos de la siguiente forma:

$$L[t^m] = P(m)t^m,$$

siendo $P(m)$ un polinomio de grado n llamado *polinomio auxiliar* de la EDO.

Usando la relación $L[t^m] = P(m)t^m$, obtenemos, de forma completamente análoga al caso de EDOs homogéneas a coeficientes constantes, dos consecuencias importantes:

- $m \in \mathbb{R}$ raíz del polinomio auxiliar $\implies t^m$ es solución de la EDO $L[x] = 0$.
- $\alpha \pm \beta i$ raíces complejas conjugadas $\implies t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ y $t^\alpha \sin(\beta \ln t)$ también son soluciones.

Ejemplo 14. Resolver la EDO $L[x] = t^3 x''' + 5t^2 x'' + 7t x' + 8x = 0$ usando su polinomio auxiliar.

Aplicamos el operador L al monomio t^m para calcular el polinomio auxiliar:

$$\begin{aligned} L[t^m] &= t^3 m(m-1)(m-2)t^{m-3} + 5t^2 m(m-1)t^{m-2} + 7t m t^{m-1} + 8t^m \\ &= (m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8)t^m \\ &= (m^3 + 2m^2 + 4m + 8)t^m. \end{aligned}$$

La raíces del polinomio auxiliar $P(m) = m^3 + 2m^2 + 4m + 8$ son $m_1 = -2$ y $m_{2,3} = \pm 2i$. Por tanto,

$$x_h(t) = c_1/t^2 + c_2 \cos(2 \ln t) + c_3 \sin(2 \ln t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la EDO homogénea de Cauchy-Euler $L[x] = 0$.

Ejercicio. Comprobar que el polinomio característico de la EDO a coeficientes constantes que se obtiene a partir de una EDO homogénea de Cauchy-Euler de segundo orden por medio del cambio de variables $s = e^t$ coincide con el polinomio auxiliar.

(Nota: Esto es cierto para EDOs de cualquier orden, pero la prueba es menos directa.)

El caso de raíces múltiples se resuelve de la misma manera que cuando estudiamos las EDOs a coeficientes constantes. La única diferencia es que multiplicaremos las funciones básicas por potencias sucesivas de $s = \ln t$, en vez de usar potencias de t . Debería resultar evidente que el método del polinomio auxiliar se deduce del método del polinomio característico por medio del cambio de variable $t = e^s$, resumiéndose en el siguiente teorema.

Teorema. Para resolver una EDO homogénea de Cauchy-Euler, asociamos a cada raíz de su polinomio auxiliar unas funciones según las siguientes reglas:

- Raíz $m \in \mathbb{R}$ de multiplicidad $k \implies t^m, t^m \ln t, \dots, t^m \ln^{k-1} t$.

- Raíces $\alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ de mult. $k \implies \begin{cases} t^\alpha \cos(\beta \ln t), t^\alpha \ln t \cos(\beta \ln t), \dots, t^\alpha \ln^{k-1} t \cos(\beta \ln t) \\ t^\alpha \sin(\beta \ln t), t^\alpha \ln t \sin(\beta \ln t), \dots, t^\alpha \ln^{k-1} t \sin(\beta \ln t) \end{cases}$.

Y todas esas funciones juntas forman un conjunto fundamental de soluciones de la EDO.

Ejemplo 15. Resolver la EDO $L[x] = t^3 x''' + 3t^2 x'' + tx' = 0$. Como $L[t^m] = m^3 t^m$, el polinomio auxiliar es $P(m) = m^3$ y tiene una única raíz triple: $m = 0$. Por tanto, $x_h(t) = c_1 + c_2 \ln t + c_3 \ln^2 t$.

Problemas de la lista. (Ecuaciones de Cauchy-Euler por monomios), (Ecuaciones de Cauchy-Euler por cambio de variable).

PROBLEMAS DE VALOR EN LA FRONTERA

En esta sección estudiamos los problemas de valor en la frontera (PVFs) lineales de segundo orden. Concretamente, el primer objetivo consiste en resolver PVFs del tipo

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \\ \alpha_{10}x(t_1) + \alpha_{11}x'(t_1) = \beta_1 \\ \alpha_{20}x(t_2) + \alpha_{21}x'(t_2) = \beta_2 \end{cases}$$

donde los instantes t_i , los coeficientes α_{ij} y los términos independientes β_i son datos del problema. Supondremos que las funciones $a_0, a_1, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en el intervalo $I = [t_1, t_2]$.

El segundo objetivo son los PVFs *homogéneos*: $b(t) = 0$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0$, que contienen algún parámetro. Un PVF homogéneo siempre tiene, al menos, la *solución trivial* $x(t) = 0$. Estudiaremos para qué valores del parámetro tienen, además, otras soluciones.

Existencia y unicidad, existencia sin unicidad y no existencia de soluciones. Al contrario que los PVI estudiados hasta ahora, para los cuales existen varios teoremas de existencia y unicidad, un PVF puede tener infinitas, una o ninguna solución. Seguiremos los siguientes pasos para descubrirlo:

1. Expresar la solución general de la EDO en función de dos coeficientes libres; es decir,

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x_p(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Imponer las dos condiciones de frontera, para así obtener un sistema lineal de la forma

$$A\vec{c} = \vec{b}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(Podeis comprobar, por ejemplo, que $b_i = \beta_i - \alpha_{i0}x_p(t_i) - \alpha_{i1}x_p'(t_i)$, $i = 1, 2$.)

3. Discutir y/o resolver el sistema lineal anterior, teniendo en cuenta que cuando el sistema es:
 - Compatible determinado $\implies \exists!$ solución del PVF.
 - Compatible indeterminado $\implies \exists \infty$ soluciones del PVF.
 - Incompatible $\implies \nexists$ solución del PVF.

Ejemplo 16. Resolver el PVF homogéneo $x'' = x$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

En el ejercicio que sigue al ejemplo 5 vimos que la solución general de la EDO $x'' = x$ se puede expresar como una combinación de senos y cosenos hiperbólicos; a saber,

$$x_h(t) = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponemos que esta función cumpla las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = x(0) = 0 \\ (\cosh \pi)c_1 + (\sinh \pi)c_2 = x(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cosh \pi & \sinh \pi \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{0}.$$

Como $\det A = \sinh \pi \neq 0$, vemos que este sistema homogéneo es compatible y determinado. Entonces $\vec{c} = \vec{0}$ es su única solución y, por tanto, el PVF homogéneo tiene una única solución: la trivial.

Ejemplo 17. Resolver el PVF homogéneo $x'' + x = 0$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

La solución general de esta EDO es una combinación de senos y cosenos; a saber,

$$x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponemos que esta función cumpla las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = x(0) = 0 \\ -c_1 = x(\pi) = 0 \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{0}.$$

Como $\det A = 0$, el sistema homogéneo es compatible indeterminado. Sus soluciones son $c_1 = 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}$ libre. Por tanto, el PVF tiene infinitas soluciones: $x(t) = c_2 \sin t$, $c_2 \in \mathbb{R}$ libre; es decir, las soluciones de este PVF forman un sev de dimensión uno generado por la función $\sin t$.

Ejemplo 18. Resolver el PVF no homogéneo $x'' + x = 0$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 1$.

Al imponer que la función $x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ cumpla las condiciones de frontera vemos que

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = x(0) = 0 \\ -c_1 = x(\pi) = 1 \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rango } A = 1 < 2 = \text{rango}(A|\vec{b})$, el sistema es incompatible y el PVF no tiene ninguna solución.

Ejercicio. Resolver el PVF no homogéneo $x'' + x = 0$, $x(0) = 1$ y $x(\pi) = -1$.

(Existen infinitas soluciones: $x(t) = \cos t + c_2 \sin t$, $c_2 \in \mathbb{R}$ libre.)

Ejercicio. Resolver el PVF no homogéneo $x'' = x$, $x(0) = 0$ y $x(\pi) = 1$.

(Existe una única solución: $x(t) = \sinh t / \sinh \pi$.)

PVFs con parámetros. VAPs y FUPs. Nos centramos ahora en los PVFs homogéneos de la forma

$$\begin{cases} x'' + a_1(t; \lambda)x' + a_0(t; \lambda)x = 0 \\ \alpha_{10}x(t_1) + \alpha_{11}x'(t_1) = 0 \\ \alpha_{20}x(t_2) + \alpha_{21}x'(t_2) = 0 \end{cases}$$

donde los instantes t_i y los coeficientes α_{ij} son datos del problema. Ahora, a diferencia de los PVFs anteriores, las funciones $a_1(t; \lambda)$ y $a_0(t; \lambda)$ dependen de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Recordamos que un PVF homogéneo siempre tiene la solución trivial $x(t) = 0$. Queremos saber para qué valores del parámetro λ existen, además, otras soluciones, distintas de la trivial.

Definición. Estos valores son los *VAPS* y las soluciones no triviales son las *FUPS* del PVF. Un VAP es *simple* cuando la dimensión del sev formado por sus FUPS es igual a uno, *doble* cuando es dos, etc.

Seguiremos los siguientes pasos para calcular los VAPs y sus FUPS:

1. Expresar la solución general de la EDO homogénea en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$; es decir,

$$x_h(t; \lambda) = c_1 x_1(t; \lambda) + c_2 x_2(t; \lambda), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Imponer las condiciones de frontera, para así obtener un sistema lineal homogéneo de la forma

$$A_\lambda \vec{c} = \vec{0}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

3. Calcular los (posiblemente infinitos) VAPs resolviendo la *ecuación característica* $\det[A_\lambda] = 0$.

4. Para cada VAP $\lambda = \lambda_*$, calcular sus FUPS resolviendo el sistema $A_{\lambda_*} \vec{c} = \vec{0}$.

Antes de calcular los VAPs y las FUPS de algunos PVFs clásicos, observamos que es posible expresar la solución general de la EDO $x'' = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, como una combinación lineal de:

- Funciones trigonométricas si $\lambda = -\mu^2 < 0$: $x_h(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$.
- Funciones hiperbólicas si $\lambda = \mu^2 > 0$: $x_h(t) = c_1 \cosh \mu t + c_2 \sinh \mu t$.
- Funciones monomiales si $\lambda = 0$: $x_h(t) = c_1 + c_2 t$.

La importancia de estas expresiones radica en que la EDO $x'' = \lambda x$ aparece en casi todos los problemas de separación de variables que estudiaremos en el tema *EDPs*. En particular, conviene saber resolver con soltura todos los PVFs que aparecen en la siguiente proposición.

Proposición. *Tenemos las siguientes familias de VAPs y FUPS de algunos PVFs "clásicos".*

1. *PVF:* $x'' - \lambda x = 0$, $x(0) = x(T) = 0$.
VAPs: $\lambda_n = -n^2 \pi^2 / T^2$, *FUPS:* $x_n(t) = \sin(n\pi t / T)$, para $n \geq 1$.

2. PVF: $x'' - \lambda x = 0$, $x'(0) = x'(T) = 0$.
VAPs: $\lambda_n = -n^2\pi^2/T^2$, FUPs: $x_n(x) = \cos(n\pi t/T)$, para $n \geq 0$.
3. PVF: $x'' - \lambda x = 0$, $x(0) = x'(T) = 0$.
VAPs: $\lambda_n = -(n + 1/2)^2\pi^2/T^2$, FUPs: $x_n(t) = \sin((n + 1/2)\pi t/T)$, para $n \geq 0$.
4. PVF: $x'' - \lambda x = 0$, $x'(-T) = x'(T) = 0$.
VAPs: $\lambda_n^{(c)} = -n^2\pi^2/T^2$, FUPs: $c_n(t) = \cos(n\pi t/T)$, para $n \geq 0$.
VAPs: $\lambda_m^{(s)} = -(m + 1/2)^2\pi^2/T^2$, FUPs: $s_m(t) = \sin((m + 1/2)\pi t/T)$, para $m \geq 0$.

Demostración. 1. Como ya tenemos la solución general $x_h(t)$, empezamos directamente por el segundo paso del método anterior. La expresión de la solución general depende del signo del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto, debemos distinguir tres casos; a saber,

- $\lambda = \mu^2 > 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cosh \mu T & \sinh \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = \sinh \mu T \neq 0 \Rightarrow \nexists \text{VAPs} > 0$.
- $\lambda = 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = T \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ no es VAP.
- $\lambda = -\mu^2 < 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \mu T & \sin \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = \sin \mu T$, luego

$$\det A_\lambda = 0 \iff \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{T}, n \in \mathbb{Z} \iff \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{T^2}, n \geq 1.$$

En la última equivalencia hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 1$. Las dos razones para ello son que n está elevado al cuadrado (por tanto, los enteros negativos son superfluos), mientras que la elección $n = 0$ no tiene sentido, pues estamos en el caso $\lambda < 0$.

Finalmente, calculamos las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$. Tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = x(0) = 0 \\ (-1)^n c_1 = c_1 \cos n\pi + c_2 \sin n\pi = x(T) = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ libre} \end{array} \right\}.$$

Por tanto, $x_n(t) = \sin(\mu_n t) = \sin(n\pi t/T)$ es una FUP de VAP λ_n , para $n \geq 1$.

2. Distinguiamos de nuevo tres casos:

- $\lambda = \mu^2 > 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sinh \mu T & \cosh \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = -\sinh \mu T \neq 0 \Rightarrow \nexists \text{VAPs} > 0$.
- $\lambda = 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_0 = 0$ es un VAP. Además, la solución del sistema $A\vec{c} = \vec{0}$ es $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ libre, luego $x_0(t) = 1$ es la FUP correspondiente.
- $\lambda = -\mu^2 < 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin \mu T & \cos \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = \sin \mu T$, luego

$$\det A_\lambda = 0 \iff \mu = \mu_n = \frac{n\pi}{T}, n \in \mathbb{Z} \iff \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{T^2}, n \geq 1.$$

Hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 1$ por el mismo motivo que antes.

Finalmente, calculamos las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$. Tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \mu_n c_2 = -c_1 \mu_n \sin 0 + c_2 \mu_n \cos 0 = x'(0) = 0 \\ (-1)^n \mu_n c_2 = -c_1 \mu_n \sin n\pi + c_2 \mu_n \cos n\pi = x'(T) = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} c_1 \in \mathbb{R} \text{ libre} \\ c_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Por tanto, $x_n(t) = \cos(\mu_n t) = \cos(n\pi t/T)$ es una FUP de VAP λ_n , para $n \geq 1$.

3. Distinguiamos de nuevo tres casos:

- $\lambda = \mu^2 > 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sinh \mu T & \cosh \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = \cosh \mu T \neq 0 \Rightarrow \nexists \text{VAPs} > 0$.
- $\lambda = 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ no es un VAP.

$$\blacksquare \lambda = -\mu^2 < 0 \Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin \mu T & \cos \mu T \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_\lambda = \cos \mu T, \text{ luego}$$

$$\det A_\lambda = 0 \iff \mu = \mu_n = \frac{(n+1/2)\pi}{T}, n \in \mathbb{Z} \iff \lambda = \lambda_n = -\mu_n^2 = -\frac{(n+1/2)^2\pi^2}{T^2}, n \geq 0.$$

Hemos pasado de $n \in \mathbb{Z}$ a los enteros $n \geq 0$ por lo de siempre.

Finalmente, calculamos las FUPs de VAP $\lambda = \lambda_n = -\mu_n^2$. Tenemos que resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = x(0) = 0 \\ (-1)^{n+1} \mu_n c_1 = -c_1 \mu_n \sin \mu_n T + c_2 \mu_n \cos \mu_n T = x'(T) = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ libre} \end{array} \right\}.$$

Por tanto, $x_n(t) = \sin(\mu_n t) = \sin((n+1/2)\pi t/T)$ es una FUP de VAP λ_n , para $n \geq 0$.

4. Esta última demostración se deja como ejercicio. Es la más difícil.

□

Problemas de la lista. (PVF con VAPs dobles), (Test Enero 1998), (Pb1 Junio 2002), (Pb1 Junio 1993) y (Pb2 Octubre 2008).

OSCILACIONES

En esta sección vamos a estudiar las oscilaciones; es decir, las soluciones de las EDOs lineales a coeficientes constantes de segundo orden de la forma

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = b(t)$$

donde:

- $k \geq 0$ es el *factor de amortiguación* de la oscilación,
- $\omega_0 > 0$, y
- $b(t)$ es el término no homogéneo de la oscilación.

En el tema *Modelos* estudiaremos algunos problemas físicos de carácter oscilatorio. El aspecto que más nos interesa dilucidar es si estas EDOs tienen o no soluciones periódicas. Por tanto, a la luz del siguiente ejercicio, supondremos que si $b(t) \neq 0$, entonces $b(t)$ es periódico de periodo mínimo p .

Ejercicio. Probar que si la EDO anterior tiene alguna solución periódica $x(t)$, entonces el término no homogéneo $b(t)$ también es periódico.

Los resultados de esta sección se resumen en el siguiente cuadro.

Caso	Oscilación	Propiedad fundamental
$k = 0, b(t) \equiv 0$	Harmónica	Todas las soluciones tienen periodo $T = 2\pi/\omega_0$
$k > 0, b(t) \equiv 0$	Libre amortiguada	Todas las soluciones tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$
$k = 0, b(t) \neq 0$	Forzada no amortiguada	$\exists 0, 1$ o ∞ soluciones periódicas
$k > 0, b(t) \neq 0$	Forzada amortiguada	$\exists!$ solución periódica (de periodo p y atractora global)

CUADRO 1. Clasificación de las oscilaciones y sus propiedades

Funciones periódicas y cuasiperiódicas. Una función $x(t)$ es *periódica* cuando se repite en el tiempo de forma cíclica; es decir, cuando existe un *periodo* $p > 0$ tal que

$$x(t+p) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En realidad, una función periódica tiene infinitos periodos, pues si p es un periodo, entonces sus múltiplos $2p, 3p, 4p, \dots$ también lo son. Efectivamente, ya que

$$x(t) = x(t+p) = x(t+2p) = x(t+3p) = \dots$$

Diremos que una función es *p-periódica* cuando $p > 0$ sea su *periodo mínimo*. Las funciones constantes se pueden considerar funciones periódicas de cualquier periodo. La *frecuencia angular* y la *frecuencia temporal* de una función p -periódica son las cantidades $\omega = 2\pi/p$ y $f = 1/p$, respectivamente. La

primera cuantifica la repetición en radianes por segundo y la segunda en ciclos (o vueltas) por segundo. En esta asignatura usaremos la palabra frecuencia para referirnos a la primera.

Ejemplo 19. Las funciones trigonométricas $\cos \omega t$ y $\sin \omega t$ son funciones periódicas de periodo mínimo $p = 2\pi/\omega$ y frecuencia ω . La onda sinusoidal desfasada $A \sin(\omega t + \varphi)$ también.

Pregunta. ¿Cuándo es periódica la “combinación” de funciones periódicas con periodos distintos? Por ejemplo, ¿es periódica la función $x(t) = \cos \omega_1 t + \sin \omega_2 t$? Y en caso afirmativo, ¿de qué periodo?

No damos una demostración rigurosa, pero el principio general para responder estas preguntas es que una “combinación” de funciones periódicas es periódica si y sólo si todas las frecuencias involucradas son *resonantes*; es decir, si y sólo si el cociente de cada pareja de frecuencias es un número racional. De lo contrario, diremos que la “combinación” es una función *cuasiperiódica*.

Ejemplo 20. ¿Es periódica la función $f(t) = \cos(3t/2) + \sin(5t/7)$?

Sí, pues $f(t)$ es una combinación de funciones periódicas de frecuencias $\omega_1 = 3/2$ y $\omega_2 = 5/7$, las cuales son resonantes: $\omega_1/\omega_2 = 21/10 \in \mathbb{Q}$. El periodo mínimo de $f(t)$ es el MCM de los periodos mínimos iniciales: $p = \text{m.c.m.}[2\pi/\omega_1, 2\pi/\omega_2] = \text{m.c.m.}[\frac{4}{3}\pi, \frac{14}{5}\pi] = \frac{2}{15}\pi \text{ m.c.m.}[10, 21] = \frac{420}{15}\pi = 28\pi$.

Ejemplo 21. ¿Es periódica la función $g(t) = \cos \pi t + \sin t$?

No, pues $g(t)$ es una combinación de funciones periódicas de frecuencias $\omega_1 = \pi$ y $\omega_2 = 1$, las cuales no son resonantes: $\omega_1/\omega_2 = \pi \notin \mathbb{Q}$. En cambio, $g(t)$ es cuasiperiódica por definición.

Ejercicio. Usar MATLAB o una calculadora gráfica para dibujar la gráfica de la función cuasiperiódica $g(t) = \cos \pi t + \sin t$ en el rango $0 < t < 100$. ¿Se repite cíclicamente la gráfica? ¿Está acotada?

Problema de la lista. (Funciones periódicas y cuasiperiódicas).

Oscilaciones armónicas: forma amplitud-fase. Nos centramos en las oscilaciones de la forma

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$ son complejas conjugadas: $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$. Por tanto, la solución general de esta EDO homogénea es

$$x_h(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Podemos reescribir la solución general de otra forma denominada *amplitud-fase* que consiste en escribir

$$x_h(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad A \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ es la *amplitud* y $\varphi \in [0, 2\pi)$ es la *fase* determinada por las relaciones

$$\sin \varphi = c_1/A, \quad \cos \varphi = c_2/A.$$

Ejercicio. Probar, usando las fórmulas para la amplitud y la fase, que las dos expresiones anteriores de la solución $x_h(t)$ son equivalentes.

Problema de la lista. (Forma amplitud-fase).

Oscilaciones libres (sub, sobre y críticamente) amortiguadas. Ahora estudiamos la EDO

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = 0.$$

Entonces, las raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2$ son $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$. Para saber cuando las raíces son reales o complejas, distinguimos tres casos, en función del signo del discriminante $k^2 - \omega_0^2$. El resultado final queda resumido en el siguiente cuadro, donde se comprueba que todas las soluciones de una oscilación libre amortiguada tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

Ejercicio. Probar que las dos raíces son negativas en el caso sobreamortiguado.

Ejercicio. En el caso subamortiguado la solución se comporta como una onda sinusoidal de amplitud exponencialmente decreciente. Dibujar su gráfica.

Problema de la lista. (Valores críticos de oscilaciones subamortiguadas).

Subcaso	Nombre	Raíces	Soluciones
$0 < k < \omega_0$	subamortiguada	$\lambda_{1,2} = -k \pm i\omega_*$, $\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$	$x_h(t) = Ae^{-kt} \sin(\omega_* t + \varphi)$
$k = \omega_0$	críticamente amortig.	$\lambda_1 = \lambda_2 = -k < 0$ real doble	$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-kt}$
$k > \omega_0$	sobreamortiguada	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ reales simples	$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

CUADRO 2. Clasificación de las oscilaciones libres amortiguadas

Oscilaciones forzadas no amortiguadas: soluciones periódicas y resonancia. La solución general de la oscilación forzada no amortiguada $x'' + \omega_0^2 x = b(t)$ tiene la forma

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + x_p(t),$$

donde $x_h(t)$ es una función periódica de frecuencia ω_0 y $x_p(t)$ es una solución particular que puede ser o no ser periódica. Entonces, recordando el principio general expuesto en la subsección *Funciones periódicas y cuasiperiódicas* deducimos que:

- Si $x_p(t)$ no es acotada, no existen soluciones acotadas y, por tanto, tampoco existen soluciones periódicas o cuasiperiódicas.
- Si $x_p(t)$ es periódica y su frecuencia es resonante con ω_0 , todas las soluciones son periódicas.
- Si $x_p(t)$ es periódica, pero su frecuencia no es resonante con ω_0 , todas las soluciones son cuasiperiódicas y existe una única solución periódica: $x_p(t)$.

Diremos que ω_0 es la *frecuencia interna o natural* de la oscilación y, cuando el término no homogéneo $b(t)$ sea periódico, diremos que su frecuencia es la *frecuencia externa*. Pensemos en un columpio que empujamos de forma periódica. Cuando no ejercemos ninguna fuerza, el columpio oscila con su frecuencia natural. Pero si lo empujamos en los momentos adecuados (es decir, si nuestros empujones entran en resonancia con el movimiento oscilatorio natural del columpio), la amplitud de sus oscilaciones crecerá sin parar (oscilaciones no acotadas). Este fenómeno se denomina *resonancia no amortiguada* y puede jugar un papel divertido en estructuras mecánicas y aparatos eléctricos.

Ejercicio. Buscar en la Wikipedia y en Youtube material sobre el colapso del puente de Tacoma Narrows. Entender que pasó, aunque no fué un fenómeno puro de resonancia no amortiguada bajo una perturbación periódica. Ya puestos, entender que diferencia hay entre las oscilaciones longitudinales y torsionales de un puente.

Ejercicio. Buscar en la Wikipedia inglesa y en Youtube material sobre la “ground resonance” que puede destruir completamente un helicóptero.

Ejercicio. Buscar en Youtube videos sobre la destrucción de una copa de cristal mediante ondas sonoras resonantes.

Ejemplo 22. Estudiar la existencia de soluciones periódicas en la oscilación forzada no amortiguada

$$x'' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad \omega \neq \omega_0.$$

Como $\omega \neq \omega_0$ sabemos (¿por qué?) que existe una solución particular de la forma

$$x_p(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t$$

donde c_3 y c_4 son unos coeficientes a determinar. Imponiendo que $x_p(t)$ cumpla la EDO vemos que

$$A \sin \omega t = x_p''(t) + \omega_0^2 x_p(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)c_3 \cos \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2)c_4 \sin \omega t.$$

Por tanto, $c_3 = 0$, $c_4 = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$ y la solución general de la EDO no homogénea es

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Esta función es la superposición (suma) de dos ondas de frecuencias ω_0 y ω . Por tanto,

- $\omega/\omega_0 \in \mathbb{Q} \implies$ todas las soluciones son periódicas.
- $\omega/\omega_0 \notin \mathbb{Q} \implies$ todas las soluciones son cuasiperiódicas, pero sólo una es periódica (¿cuál?).

Ejercicio. Consideramos la oscilación del ejemplo anterior en el caso resonante $\omega = \omega_0$. Comprobar que la solución particular obtenida por el método de los coeficientes indeterminados es una combinación de los términos no acotados $t \cos \omega_0 t$ y $t \sin \omega_0 t$. Por tanto, todas las soluciones son no acotadas y no pueden existir soluciones periódicas o cuasiperiódicas.

Ejercicio. Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender los tres applets de JAVA sobre “harmonic frequency responses”.

Problemas de la lista. (Oscilaciones forzadas no amortiguadas) y (Pulsación o batimiento).

Oscilaciones forzadas amortiguadas: factor de amplificación y curvas de respuesta. Ahora estudiamos las oscilaciones de la forma

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = b(t)$$

donde $k, \omega_0 > 0$ y el término no homogéneo $b(t)$ es p -periódico.

Lema. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de la oscilación forzada amortiguada anterior. Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = 0.$$

Demostración. Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de la EDO no homogénea $x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = b(t)$, entonces la diferencia $d(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es una solución de la EDO homogénea asociada, pues

$$\begin{aligned} d'' + 2kd' + \omega_0^2 d &= (x_1 - x_2)'' + 2k(x_1 - x_2)' + \omega_0^2(x_1 - x_2) \\ &= (x_1'' + 2kx_1' + \omega_0^2 x_1) - (x_2'' + 2kx_2' + \omega_0^2 x_2) \\ &= b(t) - b(t) = 0. \end{aligned}$$

La EDO homogénea $d'' + 2kd' + \omega_0^2 d = 0$ es una oscilación libre amortiguada, luego todas sus soluciones tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. Es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$. \square

Teorema. Si el término no homogéneo $b(t)$ es p -periódico, entonces la oscilación forzada amortiguada $x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = b(t)$ tiene una única solución periódica $\bar{x}(t)$. Además, $\bar{x}(t)$ tiene periodo p y es globalmente atractora; es decir, cualquier otra solución $x(t)$ de la oscilación cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \bar{x}(t)) = 0.$$

Eso explica que digamos que $\bar{x}(t)$ es el *régimen permanente* (en inglés, *steady state*) de la oscilación, pues cualquier otra solución se comporta, a largo plazo, como ella. También diremos que la diferencia $x(t) - \bar{x}(t)$ es el *régimen transitorio* (en inglés, *transient state*), pues tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. Este fenómeno se puede apreciar bien jugando con un osciloscopio. Podeis ver algunos videos en Youtube.

Ejercicio. Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender el applet de JAVA sobre “steady states” del apartado *Forced Damped Vibration*.

La última parte del teorema es una consecuencia del lema previo. La primera parte no la probaremos, pero calcularemos la solución periódica $\bar{x}(t)$ en algunos ejemplos.

Ejemplo 23. Calcular el régimen permanente $\bar{x}(t)$ de la oscilación forzada amortiguada

$$x'' + 2kx' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad A, k, \omega_0, \omega > 0.$$

Al igual que en ejemplo anterior, sabemos que existe una solución particular de la forma

$$x_p(t) = c_3 \cos \omega t + c_4 \sin \omega t$$

donde c_3 y c_4 son unos coeficientes a determinar. Notamos que esta solución particular $x_p(t)$ es periódica y, además, sabemos que existe una única solución periódica $\bar{x}(t)$. Por tanto, $\bar{x}(t)$ y $x_p(t)$ son la misma función. Imponiendo que $\bar{x}(t) = x_p(t)$ cumpla la EDO vemos que

$$A \sin \omega t = \bar{x}''(t) + 2k\bar{x}'(t) + \omega_0^2 \bar{x}(t) = ((\omega_0^2 - \omega^2)c_3 + 2k\omega c_4) \cos \omega t + (-2k\omega c_3 + (\omega_0^2 - \omega^2)c_4) \sin \omega t.$$

Resolviendo por Cramer el sistema lineal 2×2 obtenido, queda que

$$c_3 = \frac{-2k\omega A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}, \quad c_4 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2},$$

luego el régimen permanente de esta oscilación forzada amortiguada es

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} (-2k\omega \cos \omega t + (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t).$$

Finalmente, expresando el régimen permanente en forma amplitud-fase obtenemos que

$$b(t) = A \sin \omega t \implies \bar{x}(t) = MA \sin(\omega t + \varphi), \quad M = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}},$$

siendo φ una cierta fase que no nos interesa y M es el *factor de amplificación* que determina como varía la amplitud de la onda sinusoidal que teníamos como término no homogéneo: $A \mapsto MA$.

Ejercicio. Comparar los ejemplos 22 y 23 cuando $k \rightarrow 0$.

Este ejemplo tiene una gran importancia. Entre otras cosas, sirve para entender como se sintoniza una emisora de radio. Empezamos recordando que las leyes de Kirchhoff nos permiten modelar un circuito eléctrico mediante una EDO lineal de segundo orden con un término de amortiguación $2kx'$ que proviene de la resistencia y un término $\omega_0^2 x$ que proviene de la capacitancia. Cuando el circuito recibe una perturbación exterior en forma de onda sinusoidal, el circuito “responde” generando otra onda sinusoidal de la misma frecuencia pero desfasada y de amplitud M veces la amplitud original. Si fijamos la frecuencia natural ω_0 y el factor de amortiguación $k > 0$, la función

$$\omega \mapsto M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

se denomina *curva de respuesta*. Si k es pequeño y $\omega \approx \omega_0$, entonces $M(\omega)$ puede ser muy grande, lo cual significa que nuestro circuito puede amplificar enormemente algunas de las señales recibidas. Moviendo el dial de nuestro receptor de radio modificamos su capacidad; es decir, variamos ω_0 , de forma que en cada posición del dial se sintoniza (amplifica) una emisora (frecuencia) diferente.

Ejercicio. Conectarse al enlace <http://www-math.mit.edu/daimp/> y entender el applet de JAVA sobre curvas de respuesta del apartado *Amplitude Response and Pole Diagram*.

Problemas de la lista. (Factor de amplificación), (Pb1 Septiembre 1994), (Pb2 Julio 2008) y (Pb1 Febrero 1996).