Ecuaciones en Derivadas Parciales

Una *ecuación en derivadas parciales (EDP)* es una ecuación diferencial cuya incógnita es una función que depende de más de una variable. El *orden* de una EDP es el orden de la derivada parcial más alta. En este tema vamos a estudiar algunas EDPs lineales de segundo orden.

Las tres ecuaciones básicas: ondas, calor y Laplace/Poisson. Todas las EDPs que estudiaremos provienen de modelos físicos: la vibración vertical de las cuerdas de una guitarra o la membrana de un tambor; la evolución de la temperatura en piezas 1D, 2D o 3D; los equilibrios elásticos y térmicos de los problemas anteriores, etc. Esto proporciona una valiosa intuición del comportamiento que deben tener las soluciones de las EDPs consideradas y podremos interpretar físicamente los resultados obtenidos.

La ecuación de ondas 1D (cuerda vibrante). Consideramos el movimiento ondulatorio vertical de una cuerda vibrante horizontal de longitud L de densidad constante y composición homogénea no sometida a fuerzas externas. Notamos por $u(x,t)$ el desplazamiento vertical respecto la posición de equilibrio del punto $x \in [0,L]$ de la cuerda en el instante $t \in \mathbb{R}$. También podemos considerar una cuerda vibrante de longitud infinita, en cuyo caso $x \in \mathbb{R}$.

La EDP que modela el movimiento es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad x \in (0,L), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aquí, los símbolos u_{tt} y u_{xx} denotan las segundas derivadas parciales respecto el tiempo y la posición, respectivamente. El parámetro $c > 0$ depende de las propiedades físicas del material y será interpretado más adelante como la *velocidad* a la que viajan las ondas en el material considerado.

Ejercicio. Deducir de la EDP $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ que c tiene unidades de velocidad "horizontal" (espacio "horizontal" partido tiempo).

La ecuación del calor 1D. Consideramos la evolución de la temperatura en una barra homogénea de longitud L sin focos ni sumideros de calor internos. Notamos por $u(x,t)$ la temperatura del punto $x \in [0,L]$ en el instante $t \geq 0$. También podemos considerar una barra de longitud infinita, en cuyo caso $x \in \mathbb{R}$.

La EDP que modela la evolución de la temperatura es

$$u_t = k^2 u_{xx}, \qquad x \in (0,L), \qquad t > 0.$$

El parámetro $k^2 = \kappa/c\rho > 0$ depende de la conductividad térmica κ, la densidad ρ y el calor específico c del material que conforma la barra.

Ejercicio. Probar que la función $u : \mathbb{R} \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}} \mathrm{e}^{-x^2/4k^2 t}$$

cumple la ecuación del calor. Calcular $\lim_{t\to 0} u(x,t)$. ¿Qué pasa cuando $t < 0$?

Equilibrios elásticos y térmicos 1D. Equilibrio significa que el estado del cuerpo no cambia, sino que se mantiene estacionario en el tiempo, luego buscamos soluciones $u = u(x)$ que no dependan del tiempo y así desaparecen las derivadas parciales u_t y u_{tt}. En tal caso, las EDPs $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ y $u_t = k^2 u_{xx}$ se reducen a la EDO lineal de segundo orden $u'' = 0$, cuyas únicas soluciones son las funciones lineales de la forma $u(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Queda probado pues que los únicos equilibrios elásticos de una cuerda vibrante o equilibrios térmicos de una barra son los estados (desplazamiento o temperatura) lineales.

Las versiones multidimensionales. Antes de dar las versiones multidimensionales de las ecuaciones anteriores, necesitamos introducir el *operador Laplaciano* Δ. Dada una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que depende de n variables $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, su Laplaciano es la suma de sus n derivadas parciales dobles:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}.$$

Por ejemplo, si la función u depende de una única variable x, entonces $\Delta u = u_{xx}$. En cambio, si depende de dos variables x, y, entonces $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Además, cuando la función dependa de la posición $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y el tiempo t, interpretaremos que el Laplaciano sólo afecta a las variables de posición, sin incluir el término u_{tt}.

Las versiones n-dimensionales de las ecuaciones anteriores son las siguientes.

- *La ecuación de ondas* que modela el movimiento ondulatorio de un cuerpo elástico $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \qquad u = u(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- *La ecuación del calor* que modela la evolución de la temperatura en un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es

$$u_t = k^2 \Delta u, \qquad u = u(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, \qquad t > 0.$$

Desde un punto de vista físico, sólo interesan los casos 1D, 2D o 3D. Es decir, $n \leq 3$. Al igual que en las versiones 1D estamos suponiendo que el cuerpo es completamente homogéneo y que no existen fuerzas exteriores (ecuación de ondas) ni fuentes o sumideros de calor internas (ecuación de calor).

La ecuación de Laplace/Poisson. A partir de las versiones n-dimensionales de las ecuaciones de ondas y calor, vemos que tanto los equilibrios térmicos como los equilibrios elásticos de un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ estan modelados por la llamada *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

La *ecuación de Poisson* es la versión no homogénea de la ecuación de Laplace. Consiste en, dada una función $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, buscar las soluciones de la ecuación

$$\Delta u = -F(\vec{x}), \qquad u = u(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

La ecuación de Poisson admite muchas interpretaciones físicas. Aquí tan sólo mencionamos que modela los equilibrios elásticos de un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sometido a la acción de una fuerza externa $F(\vec{x})$.

Condiciones iniciales y condiciones de frontera. Todas las ecuaciones anteriores tienen infinitas soluciones. Para capturar una solución concreta añadiremos a la ecuación un número adecuado de condiciones adicionales, que pueden ser de dos tipos.

Condiciones iniciales: posición, velocidad y temperatura. Estas condiciones fijan el estado del objeto en el instante inicial. Empezamos por la ecuación de ondas, que es de segundo orden en el tiempo, luego necesita exactamente dos condiciones iniciales; a saber, fijar

- La *posición inicial*: $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ para $\vec{x} \in \Omega$; y
- La *velocidad inicial*: $u_t(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$ para $\vec{x} \in \Omega$.

En cambio, la ecuación del calor es de primer orden en el tiempo, luego basta fijar la *temperatura inicial*: $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$ para $\vec{x} \in \Omega$. Y, para acabar, la ecuación de Laplace/Poisson es estática, luego no tiene sentido fijar el estado inicial del objeto, ya que ese estado es justamente la incógnita del problema. Sería como preguntar de qué color es el caballo blanco de Santiago.

Condiciones de frontera: Dirichlet (valor fijo) y Neumann (flujo fijo). Estas condiciones (también llamadas *condiciones de contorno*) determinan la interacción del objeto con el medio que lo rodea, luego sólo tienen sentido cuando el objeto estudiado tiene frontera. Por ejemplo, la cuerda vibrante infinita no tiene frontera y las cuerdas de una guitarra sí. Hay de dos tipos de condiciones de frontera.

- *Tipo Dirichlet:* Consisten en fijar el valor de la función incógnita en los puntos de la frontera.
- *Tipo Neumann:* Consisten en "fijar el flujo" —es decir, el valor de la derivada en la dirección normal a la frontera— de la función incógnita en los puntos de la frontera.

Diremos que estas condiciones son *homogéneas* cuando el valor (o el flujo) fijado sea igual a cero.

Ejemplo 1. Un PVI de calor 1D en una barra de longitud L con condiciones de frontera de tipo Neumann consiste en las ecuaciones

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0,L) \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in (0,L) \\ u_x(0,t) = h_{\mathrm{l}}(t) & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u_x(L,t) = h_{\mathrm{r}}(t) & \qquad\qquad\quad t > 0 \end{cases}$$

donde la temperatura $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ y los flujos $h_{\mathrm{l}}, h_{\mathrm{r}} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas.

Ejemplo 2. Un problema de Poisson 2D en un cuadrado de lado $2L$ con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas consiste en unas ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = G(x,y) & x \in (-L,L) \quad y \in (-L,L) \\ u(\pm L, y) = 0 & \qquad\qquad\qquad\;\; y \in (-L,L) \\ u(x, \pm L) = 0 & x \in (-L,L) \end{cases}.$$

Ejercicio. Reescribir el ejemplo anterior, pero con condiciones de tipo Neumann homogéneas.

Problema relacionado. (Teoría Junio 2004), salvo la parte de D'Alembert.

Algunas leyes de conservación para las ecuaciones de ondas 1D y calor 1D. Para entender porqué hemos denominado a las condiciones de tipo Neumann como condiciones de "flujo fijo", vamos a explicar una ley de conservación referente a la evolución de la temperatura en una barra.

Sea $u(x,t)$ una solución del problema considerado en el ejemplo 1 e introducimos la función

$$T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x$$

que mide la *temperatura promedio* de la barra en el instante t. Su derivada es

$$T'(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{k^2}{L} \int_0^L u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{k^2}{L} \big[u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=L} = k^2\big(h_{\mathrm{r}}(t) - h_{\mathrm{l}}(t)\big)/L.$$

Las propiedades que hemos usado son: derivada bajo el signo de la integral (primera igualdad), la ecuación del calor (segunda), el teorema fundamental del cálculo (tercera) y las condiciones de frontera (cuarta). Por tanto, la diferencia $h_{\mathrm{r}}(t) - h_{\mathrm{l}}(t)$ nos dice cual es la tasa de variación de la temperatura promedio $T(t)$. En otra palabras, las funciones $h_{\mathrm{r}}(t)$ y $h_{\mathrm{l}}(t)$ nos dicen a qué velocidad se escapa/entra el calor por los extremos de la barra.

Pregunta. ¿Qué signo deben tener $h_{\mathrm{r}}(t)$ y $h_{\mathrm{l}}(t)$ para que tengamos una entrada continua de calor por los extremos derecho e izquierdo, respectivamente? (Respuesta: La primera función debe ser positiva y la segunda negativa.)

Por ejemplo, cuando las condiciones de Neumann son homogéneas: $h_{\mathrm{r}}(t) = h_{\mathrm{l}}(t) \equiv 0$, vemos que la temperatura promedio se mantiene constante, ya que la barra está aislada térmicamente (ni entra, ni sale calor por los extremos).

Pregunta. La temperatura promedio también se conserva, pese a que existe flujo de calor por los extremos, cuando $h_{\mathrm{r}}(t) = h_{\mathrm{l}}(t) \not\equiv 0$. ¿Cómo se explica esto? (Respuesta: El calor que entra por un extremo, escapa por el otro.)

Observación. Si aislamos térmicamente un cuerpo multidimensional, el promedio de su temperatura también se mantiene constante. La prueba utiliza técnicas propias de la asignatura *Cálculo Integral.*

Problemas relacionados. (Conservación de la energía en Ondas 1D), (Una ley de conservación en Calor 1D) y (Una ley de "disipación" en Calor 1D).

Linealidad: superposición, homogeneización y unicidad. Existen varios trucos simples que se pueden aplicar en todos los problemas lineales que aparecen en este tema, pero los explicaremos a través de ejemplos concretos para no dispersarnos.

Superposición. Consideramos los dos PVIs de calor 1D en una barra de longitud L dados por

$$\begin{cases} v_t = k^2 v_{xx} & x \in (0,L) \quad t > 0 \\ v(x,0) = f(x) & x \in (0,L) \\ v_x(0,t) = 0 & \quad t > 0 \\ v_x(L,t) = 0 & \quad t > 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0,L) \quad t > 0 \\ w(x,0) = 0 & x \in (0,L) \\ w_x(0,t) = h_{\mathrm{l}}(t) & \quad t > 0 \\ w_x(L,t) = h_{\mathrm{r}}(t) & \quad t > 0 \end{cases}.$$

Ambos problemas tienen condiciones de frontera de tipo Neumann. La diferencia estriba en que el primero tiene una única condición no homogéna: la temperatura inicial, mientras que el segundo tiene dos: las condiciones de frontera en los extremos de la barra.

Entonces, dadas dos soluciones cualesquiera $v(x,t)$ y $w(x,t)$ de estos problemas, su superposición (suma) $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ es una solución del PVI de calor 1D presentado en el ejemplo 1, que tiene tres condiciones no homogéneas.

En general, podemos "trocear" cualquier problema lineal en varios subproblemas de forma que cada subproblema tenga pocas (quizá incluso sólo una) ecuaciones/condiciones no homogéneas, siendo, por tanto, más simple que el problema original. En tal caso, si conseguimos resolver todos los subproblemas, la superposición (suma) de sus soluciones cumplirá el problema original.

Problema relacionado. En el problema (Principio de superposición en la cuerda vibrante infinita, Pb2 Septiembre 1994) se usa este truco, en conjunción con la fórmula de D'Alembert.

Homogeneización. Este truco es similar al anterior, pero en vez de "trocear" el problema original en varios subproblemas simples, ahora queremos simplificarlo mediante un cambio de variables astuto.

Para fijar ideas, consideramos el PVI de calor 1D en una barra de longitud $L = 1$ con condiciones de frontera de tipo Dirichlet constantes

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0,1) \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & x \in (0,1) \\ u(0,t) = 1 & \quad t > 0 \\ u(1,t) = 2 & \quad t > 0 \end{cases}.$$

La función $v(x) = x + 1$ cumple las condiciones de frontera: $v(0) = 1$ y $v(1) = 2$. Por tanto, si realizamos el cambio de variables $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, el problema original se transforma en

$$\begin{cases} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0,1) \quad t > 0 \\ w(x,0) = x^2 - x - 1 & x \in (0,1) \\ w(0,t) = 0 & \quad t > 0 \\ w(1,t) = 0 & \quad t > 0 \end{cases}$$

que es un problema bastante más simple pues hemos *homogeneizado* las dos condiciones de frontera, sin deshomogeneizar la EDP.

Problemas relacionados. En los problemas (Homogeneizar la EDP, Pb2 Enero 2003), (Calor 1D en una barra con condiciones de Dirichlet constantes) y (Poisson 2D en un rectángulo con condiciones de Dirichlet) se usa este truco (y muchas otras cosas).

Unicidad. No explicamos ahora este truco, pues ya lo haremos siguiendo un caso concreto al final del tema. Concretamente, cuando demostremos la unicidad de soluciones en la ecuación de Poisson con condiciones de contorno de tipo Dirichlet.

Fórmula de D'Alembert para la cuerda vibrante infinita.

Teorema (Fórmula de D'Alembert)**.** *Consideramos el PVI de la cuerda vibrante infinita*

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde la posición inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$ son funciones conocidas. Este PVI tiene una única solución que viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Demostración. La idea principal consiste en realizar el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

para simplificar la EDP. Para eso debemos relacionar las derivadas parciales de la función transformada

$$v(\xi,\eta) = u(x,t)$$

con las derivadas parciales de la función original $u(x,t)$. Aplicamos repetidamente la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta \\
u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = cv_\xi - cv_\eta \\
u_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial v_\xi}{\partial x} + \frac{\partial v_\eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\
u_{tt} &= \frac{\partial u_t}{\partial t} = c\frac{\partial v_\xi}{\partial t} - c\frac{\partial v_\eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + c\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2\big(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\big).
\end{aligned}$$

Por tanto, resolviendo la EDP transformada se obtiene que

$$\begin{aligned}
u_{tt} = c^2 u_{xx} &\iff c^2\big(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\big) = c^2\big(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\big) \\
&\iff v_{\xi\eta} = 0 \\
&\iff v_\xi(\xi,\eta) = r(\xi) \text{ para alguna función } r:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ arbitraria} \\
&\iff v(\xi,\eta) = p(\xi) + q(\eta) \text{ para algunas funciones } p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ arbitrarias} \\
&\iff u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct) \text{ para algunas funciones } p,q:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ arbitrarias.}
\end{aligned}$$

Es decir, la “solución general” de la EDP de la cuerda vibrante infinita posee infinitas soluciones, las cuales dependen de dos funciones arbitrarias, de la misma manera que la solución general de una EDO lineal de segundo orden dependía de dos constantes libres. Por tanto, para hallar la solución del PVI planteado, utilizaremos la misma estrategia seguida con las EDOs: determinar las dos funciones “libres” imponiendo las dos condiciones iniciales. Así pues, imponemos que

$$f(x) = u(x,0) = p(x) + q(x), \qquad g(x) = u_t(x,0) = cp'(x) - cq'(x).$$

Derivando la primera ecuación y multiplicando por c, se obtiene la relación $cp'(x) + cq'(x) = cf'(x)$. Combinando esta última relación con la segunda ecuación resulta que

$$p'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x).$$

Integrando esta última igualdad, se obtiene que

$$p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s + k, \qquad q(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s - k,$$

con lo cual las funciones “libres” $p(x)$ y $q(x)$ quedan determinadas salvo una constante de integración común $k\in\mathbb{R}$. Finalmente,

$$u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s,$$

pues las dos constantes de integración se cancelan entre si. □

Observación. La fórmula $u(x,t) = p(x+ct) + q(x-ct)$ significa que el desplazamiento de la cuerda vibrante infinita consiste en la superposición de dos ondas —cuyos perfiles vienen dados por las funciones $p(x)$ y $q(x)$— viajando en sentidos opuestos a velocidad c. Es recomendable conectarse al enlace http://www-math.mit.edu/daimp/ para ver la animación *Waves* que muestra este fenómeno mediante un applet de JAVA.

Pregunta. Sean $f(x)$ y $g(x)$ la posición y velocidad iniciales de la cuerda. ¿Cuál es la aceleración inicial? (Respuesta: $u_{tt}(x,0) = c^2 u_{xx}(x,0) = c^2 f''(x)$.)

Problemas relacionados. (Principio de superposición en la cuerda vibrante infinita, Pb2 Septiembre 1994) y (Homogeneizar la EDP, Pb2 Enero 2003).

Separación de variables en la ecuación de ondas 1D. El *método de separación de variables* es un método bastante potente y relativamente simple que sirve para resolver varios problemas de EDPs con una única condición (inicial o de frontera) no homogénea. No desarrollaremos una teoría general, sino que lo aplicaremos a tres ejemplos concretos.

En el primer ejemplo resolveremos una ecuación de ondas 1D con condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas. Para simplificar supondremos que la cuerda tiene longitud $L = \pi$ y que la soltamos, sin impulso, desde la posición $f(x) = 1 - 2\cos(3x)$. Notamos por c la velocidad a la que viajan las ondas por la cuerda. Las ecuaciones que modelan este problema son

$$(1)\left\{\begin{array}{lll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0,\pi) & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 1 - 2\cos(3x) & x \in (0,\pi) & \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) & \\ u_x(0,t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \\ u_x(\pi,t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

La idea básica del método consiste en buscar soluciones en forma de variables separadas

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

de la parte homogénea del problema a resolver. En el caso anterior, todas las condiciones y ecuaciones son homogéneas, salvo la referente a la posición inicial, luego su parte homogénea es

$$(1)_{\mathrm{h}}\left\{\begin{array}{lll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in (0,\pi) & t \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) & \\ u_x(0,t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \\ u_x(\pi,t) = 0 & & t \in \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

Al imponer que la función $u(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla:

- La ecuación del ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, se obtiene que $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$, luego
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
- La condición inicial $u_t(x,0) = 0$, vemos que $T'(0) = 0$.
- La condición de frontera $u_x(0,t) = 0$, vemos que $X'(0) = 0$.
- La condición de frontera $u_x(\pi,t) = 0$, vemos que $X'(\pi) = 0$.

Por tanto, obtenemos dos problemas separados:

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{l} T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{array}\right. .$$

En el tema *Ecuaciones Lineales* vimos que la solución del PVF asociado a la función $X(x)$ es

$$\left.\begin{array}{ll} \text{VAPs:} & \lambda = \lambda_n = -n^2 \\ \text{FUPs:} & X(x) = X_n(x) = \cos(nx) \end{array}\right\} \quad n \geq 0.$$

Ahora nos centramos en el problema asociado a la función $T(t)$, pero teniendo en cuenta que $\lambda = \lambda_n = -n^2$. En particular, la solución general de la EDO $T'' + n^2 c^2 T = 0$ es

$$T(t) = c_1 \cos(cnt) + c_2 \sin(cnt), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Al imponer la condición inicial $T'(0) = 0$, vemos que $c_2 = 0$ y $c_1 \in \mathbb{R}$ queda libre. Trás tomar $c_1 = 1$, que es la opción más simple, obtenemos la familia de funciones

$$T(t) = T_n(t) = \cos(cnt), \qquad n \geq 0.$$

Así pues, hemos obtenido que todas las funciones de variables separadas de la familia

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos(nx)\cos(cnt), \qquad n \geq 0$$

son soluciones del problema homogéneo $(1)_\mathrm{h}$. Estas funciones reciben el nombre de *modos normales* y son los modos naturales de vibración de la cuerda. El término natural significa que, debido a la linealidad del problema homogéneo, la vibración de la cuerda siempre será una superposición (suma) de estos infinitos modos normales. En otra palabras, la solución general del problema homogéneo $(1)_\mathrm{h}$ viene dada, al menos a un nivel puramente formal, por la serie

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} a_n u_n(x,t) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nx)\cos(cnt)$$

donde las infinitas amplitudes $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ quedan, de momento, indeterminados. Para resolver esta indeterminación, recuperamos la única condición no homogénea del problema original; es decir, la referente a la posición. Imponiendo que

$$1 - 2\cos(3x) = f(x) = u(x,0) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(nx) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots,$$

se obteniene por inspección directa que $a_0 = 1$, $a_3 = -2$ y las demás amplitudes son nulas, luego

$$u(x,t) = 1 - 2\cos(3x)\cos(3ct)$$

es una solución del problema original. (En realidad es la única, pero no lo probaremos.) Así pues, en este caso la vibración de la cuerda es la superposición de dos modos normales: el cero y el tres.

Ejercicio. Reescribir la solución anterior en forma de dos ondas superpuestas viajando en sentidos opuestos pero a la misma velocidad. ¿Las ondas viajan a velocidad c o a velocidad $3c$? (Indicación: Usar la relación trigonométrica $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.) (Respuesta: A velocidad c.)

Ejercicio. Leer la entrada inglesa de Wikipedia sobre *standing waves*; es decir, sobre ondas estacionarias. Ver alguno de los muchos videos que existen en Youtube sobre *"standing waves"*, en los cuales se visualizan experimentalmente los primeros modos normales de vibración de una cuerda.

También se pueden ver algunos modos normales de vibración de una membrana elástica rectangular en un video titulado *"Science fun"*. El experimento consiste en derramar sal encima de una membrana negra que vibra por el sonido que emite un altavoz situado debajo para comprobar que los modos normales cambian con la frecuencia del sonido.

Ejercicio. Escribir las dos EDOs que se obtienen al imponer que la función $u(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla la EDP $u_{tt} = -ku_t + c^2 u_{xx}$, escogiendo la opción que proporciona una EDO lo más simple posible para la función $X(x)$. Esta EDP recibe el nombre de *ecuación de la cuerda vibrante con fricción*, pues el término $-ku_t$ proviene de una fuerza de fricción proporcional (y opuesta) a la velocidad.

Problemas relacionados. (Ondas 1D con condiciones de Dirichlet homogéneas) y (Ondas 1D con fricción y condiciones de Neumann homogéneas).

Desarrollos de Fourier. En el último paso del ejemplo anterior, hemos conseguido determinar todos los coeficientes libres por inspección directa. Cuando eso no sea posible, utilizaremos las siguientes fórmulas para calcular desarrollos de Fourier (comparar con la asignatura *Cálculo 2*).

- El *desarrollo de Fourier completo* de una función $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L), \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \displaystyle\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x, \\ b_n & = & \displaystyle\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

- El *desarrollo de Fourier en cosenos* de una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\pi x/L), \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x.$$

- El *desarrollo de Fourier en senos* de una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ es

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\pi x/L), \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x.$$

Se puede probar que estos desarrollos en serie son (absoluta, uniformemente) convergentes cuando la función $f(x)$ es suficientemente regular, pero en esta asignatura trabajamos a un nivel puramente formal, sin preocuparnos por la convergencia.

Ejercicio. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1 - \pi^2 x$. Comprobar, integrando por partes, que los coeficientes de su desarrollo de Fourier en senos son

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\pi^2 x)\sin(nx/2)\,\mathrm{d}x = 4\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}, \qquad n \geq 1.$$

Separación de variables en la ecuación del calor 1D.

Objetivo. En este segundo ejemplo del método de separación de variables, veremos que al resolver la ecuación del calor 1D con condiciones de contorno de tipo Dirichlet <u>constantes</u>, la temperatura tiende al equilibrio térmico (en inglés, *steady state*). Homogeneizaremos las condiciones de contorno antes de separar variables mediante un cambio de variables "astuto".

Problema físico. Tenemos una barra de longitud $L > 0$ compuesta por un material de conductividad térmica κ, densidad ρ y calor específico c. Notamos $k^2 = \kappa/c\rho$. La temperatura inicial de la barra viene dada por una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$. Finalmente, mantenemos constante la temperatura de la barra en ambos extremos: $\alpha \in \mathbb{R}$ es la temperatura en el izquierdo y $\beta \in \mathbb{R}$ es la temperatura en el derecho.

Modelo matemático. Las ecuaciones que modelan este problema son

$$\left\{\begin{array}{lll} u_t = k^2 u_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) & \\ u(0, t) = \alpha & & t > 0 \\ u(L, t) = \beta & & t > 0 \end{array}\right. .$$

Pasos del método.

1. Encontrar unas funciones $v(x)$ y $g(x)$ tales que el cambio de variables $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ transforme el problema original en el problema con condiciones de contorno homogéneas

$$(*)\left\{\begin{array}{lll} w_t = k^2 w_{xx} & x \in (0, L) & t > 0 \\ w(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) & \\ w(0, t) = 0 & & t > 0 \\ w(L, t) = 0 & & t > 0 \end{array}\right. .$$

   Expresar $v(x)$ y $g(x)$ en términos de las cantidades α, β, L y de la función $f(x)$.
2. Imponer que $w(x, t) = X(x)T(t)$ cumpla la parte homogénea del problema $(*)$. Escribir el PVF asociado a la función $X(x)$ y el problema asociado a la función $T(t)$.
3. Resolver el PVF asociado a la función $X(x)$.
4. Teniendo en cuenta los VAPs del PVF anterior, resolver el problema asociado a $T(t)$.
5. Calcular los modos normales (es decir, las FUPs) de la parte homogénea del problema $(*)$.
6. Probar que, a nivel formal, la solución del problema original cumple $\lim_{t\to+\infty} u(x, t) = v(x)$.
7. Interpretar físicamente estos resultados.

Desarrollo del método.

1. Al imponer que la función $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ cumpla la EDP $w_t = k^2 w_{xx}$ resulta
$$0 = w_t - k^2 w_{xx} = (u_t - k^2 u_{xx}) - (v_t - k^2 v_{xx}) = 0 - k^2 v''(x) \Longrightarrow v''(x) = 0.$$
Al imponer que la función $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ cumpla las condiciones de contorno queda
$$\begin{cases} 0 = w(0,t) = u(0,t) - v(0) = \alpha - v(0) & \Longrightarrow \quad v(0) = \alpha \\ 0 = w(L,t) = u(L,t) - v(L) = \beta - v(L) & \Longrightarrow \quad v(L) = \beta. \end{cases}$$
La única función $v(x)$ tal que $v''(x) = 0$, $v(0) = \alpha$ y $v(L) = \beta$ es $v(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x/L$. La gráfica de la función $v(x)$ es la linea recta que une los puntos $(0, \alpha)$ y (L, β).
Finalmente, $g(x) = w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - \alpha + (\alpha - \beta)x/L$.
2. Al imponer que la función $w(x,t) = X(x)T(t)$ cumpla:
   - La ecuación del calor $w_t = k^2 w_{xx}$, se obtiene que $X(x)T'(t) = k^2 X''(x)T(t)$, luego
   $$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{k^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
   - La condición de frontera $w(0,t) = 0$, vemos que $X(0) = 0$.
   - La condición de frontera $w(L,t) = 0$, vemos que $X(L) = 0$.

   Por tanto, obtenemos dos problemas separados:
$$(a) \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \qquad (b) \, \{T'(t) - \lambda k^2 T(t) = 0.$$
El problema (a) es un PVF asociado a la función $X(x)$.
3. Sabemos del tema *Ecuaciones Lineales* que la solución del PVF asociado a la función $X(x)$ es
$$\left.\begin{array}{ll} \text{VAPs:} & \lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/L^2 \\ \text{FUPs:} & X(x) = X_n(x) = \sin(n\pi x/L) \end{array}\right\} \quad n \geq 1.$$
4. La solución de problema (b) para $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/L^2$ es $T(t) = T_n(t) = \mathrm{e}^{-n^2k^2\pi^2t/L^2}$, $n \geq 1$.
5. Así pues, los modos normales (las FUPs) de la parte homogénea del problema $(*)$ son
$$w_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2\pi^2k^2t/L} \sin(n\pi x/L), \qquad n \geq 1.$$
Teniendo en cuenta que $X_n(x)$ es una función acotada y $T_n(t)$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, resulta que $\lim_{t\to+\infty} w_n(x,t) = 0$ para toda $x \in (0,L)$ y para todo entero $n \geq 1$.
6. La solución final $w(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n w_n(x,t)$ del problema $(*)$ se determina imponiendo la condición no homogénea
$$g(x) = w(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n w_n(x,0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\pi x/L).$$
Es decir, $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(n\pi x/L)\,\mathrm{d}x$, $n \geq 1$, son los coeficientes del desarrollo de Fourier en senos de la función $g(x)$ en el intervalo $[0,L]$. Por tanto, deshaciendo el cambio de variables, la solución $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ del problema original cumple
$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = v(x) + \lim_{t\to+\infty} w(x,t) = v(x) + \sum_{n\geq 1} b_n \lim_{t\to+\infty} w_n(x,t) = v(x).$$
7. Hemos probado que cuando el tiempo tiende a infinito, la temperatura tiende al equilibrio térmico consistente en que la temperatura viene dada por la recta que une las temperaturas en los extremos. Algo acorde con nuestra experiencia física, la cual nos enseña que el calor tiende a distribuirse de la forma mas uniforme posible.

Ejercicio. Conectarse al enlace http://www-math.mit.edu/daimp/ y entender el applet de JAVA titulado *Heat Equation* que ejemplifica este fenómeno físico.

Ejercicio. Probar que si substituimos las dos condiciones tipo Dirichlet constantes por dos condiciones tipo Neumann homogéneas, entonces se cumple que

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La interpretación física de este resultado es la siguiente. Las condiciones tipo Neumann homogéneas equivalen a la existencia de un aislamiento térmico perfecto en los extremos que impide que el calor escape o entre, luego tan sólo puede redistribuirse internamente. Por tanto, la temperatura tiende a un valor constante y este valor debe coincidir con el promedio de la temperatura inicial.

Problemas relacionados. (Calor 1D en un anillo), (Pb2 Septiembre 1991), (Pb2 Junio 2001) y (Pb4 Enero 2009).

Separación de variables en la ecuación de Poisson 2D en dominios rectangulares.

Objetivo. En este tercer ejemplo del método de separación de variables, vamos a resolver una ecuación de Poisson 2D en un dominio rectangular con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Dos de las cuatro condiciones de contorno no son homogéneas. Antes de separar variables, homogeneizaremos tanto la ecuación de Poisson (es decir, la transformaremos en una ecuación de Laplace) como una condición de contorno, mediante un cambio de variables.

Problema original. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 2y & x \in (0,\pi) & y \in (0,2\pi) \\ u(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) & \\ u(x,2\pi) = 2\pi x^2 & x \in (0,\pi) & \\ u(0,y) = 0 & & y \in (0,2\pi) \\ u(\pi,y) = 1 & & y \in (0,2\pi) \end{cases}$$

Pasos del método.

1. Encontrar unas funciones $v(x,y)$ y $g(y)$ tal que el cambio de variables $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ transforme el problema original en el problema

$$(\triangle)\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 & x \in (0,\pi) & y \in (0,2\pi) \\ w(x,0) = 0 & x \in (0,\pi) & \\ w(x,2\pi) = 0 & x \in (0,\pi) & \\ w(0,y) = 0 & & y \in (0,2\pi) \\ w(\pi,y) = g(y) & & y \in (0,2\pi) \end{cases}$$

2. Imponer que la función $w(x,y) = X(x)Y(y)$ cumpla la parte homogénea del problema $(\triangle)$. Escribir el PVF asociado a la función $Y(y)$ y el problema asociado a la función $X(x)$.
3. Resolver el PVF asociado a la función $Y(y)$.
4. Teniendo en cuenta los VAPs del PVF anterior, resolver el problema asociado a $X(x)$.
5. Calcular la solución general de la parte homogénea del problema $(\triangle)$.
6. Resolver el problema original.

Desarrollo del método.

1. Al imponer que la función $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ cumpla la ecuación $w_{xx} + w_{yy} = 0$ resulta

$$0 = w_{xx} + w_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) - (v_{xx} + v_{yy}) = 2y - (v_{xx} + v_{yy}) \Longrightarrow v_{xx} + v_{yy} = 2y.$$

Al imponer que la función $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$ cumpla las condiciones de contorno correspondientes a los lados inferior, superior e izquierdo queda

$$\begin{cases} 0 = w(0,y) = u(0,y) - v(0,y) = 0 - v(0,y) & \Longrightarrow & v(0,y) = 0 \\ 0 = w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 0 - v(x,0) & \Longrightarrow & v(x,0) = 0 \\ 0 = w(x,2\pi) = u(x,2\pi) - v(x,2\pi) = 2\pi x^2 - v(x,2\pi) & \Longrightarrow & v(x,2\pi) = 2\pi x^2 \end{cases}$$

Necesitamos una función $v(x,y)$ que cumpla estas cuatro condiciones. Para simplificar los cálculos, buscamos esta función en forma de variables separadas: $v(x,y) = \tilde{X}(x)\tilde{Y}(y)$. Entonces, las cuatro condiciones anteriores equivales a

$$\tilde{X}''(x)\tilde{Y}(y) + \tilde{X}(x)\tilde{Y}''(y) = 2y, \qquad \tilde{X}(0) = 0, \qquad \tilde{Y}(0) = 0, \qquad \tilde{X}(x)\tilde{Y}(2\pi) = 2\pi x^2.$$

Vemos que una posible solución es tomar $\tilde{X}(x) = x^2$ y $\tilde{Y}(y) = y$. Es decir, $v(x,y) = x^2 y$ y entonces

$$g(y) = w(\pi,y) = u(\pi,y) - v(\pi,y) = 1 - \pi^2 y.$$

2. Al imponer que la función $w(x,y) = X(x)Y(y)$ cumpla:
   - La ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$ se obtiene que $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, luego
   $$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
   - La condición de contorno $w(0,y) = 0$, se obtiene que $X(0) = 0$.
   - La condición de contorno $w(x,0) = 0$, se obtiene que $Y(0) = 0$.
   - La condición de contorno $w(x,2\pi) = 0$, se obtiene que $Y(2\pi) = 0$.

   Por tanto, obtenemos dos problemas separados:
   $$(a)\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y(0) = 0 = Y(2\pi) \end{cases}.$$
   El problema (b) es un PVF asociado a la función $Y(y)$.
3. Sabemos del tema *Ecuaciones Lineales* que la solución del PVF asociado a la función $Y(y)$ es
   $$\left.\begin{array}{ll} \text{VAPs:} & \lambda = \lambda_n = -n^2/4 \\ \text{FUPs:} & Y(x) = Y_n(x) = \sin(ny/2) \end{array}\right\} \quad n \geq 1.$$
4. La EDO $X''(x) + \lambda_n X(x) = 0$ es lineal, homogénea y a coeficientes constantes. Su polinomio característico es $P(D) = D^2 + \lambda_n$ y sus raíces son $D_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda_n} = \pm n/2$. Por tanto, la solución general de esta ecuación es
   $$X(x) = c_1 \mathrm{e}^{nx/2} + c_2 \mathrm{e}^{-nx/2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Al imponer la condición adicional $0 = X(0) = c_1 + c_2$ obtenemos que $c_2 = -c_1$, luego
   $$X(x) = c_1(\mathrm{e}^{nx/2} - \mathrm{e}^{-nx/2}), \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$
   Tomando $c_1 = \frac{1}{2}$, obtenemos la familia de funciones
   $$X_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{nx/2} - \mathrm{e}^{-nx/2}}{2} = \sinh(nx/2), \qquad n \geq 1.$$
5. Así pues, los modos normales (las FUPs) de la parte homogénea del problema (△) son
   $$w_n(x,y) = X_n(x)Y_n(x) = \sinh(nx/2)\sin(ny/2), \qquad n \geq 1.$$
   En particular, resulta que, por linealidad, todas las series de la forma
   $$w(x,y) = \sum_{n\geq 1} \beta_n w_n(x,y) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \sinh(nx/2)\sin(ny/2)$$
   son soluciones formales de la parte homogénea del problema (△).
6. En el paso anterior los coeficientes β_n habían quedado libres, pero ahora los determinamos —para así obtener la solución final del problema (△)— imponiendo la única condición no homogénea del problema; a saber, la condición de contorno en el lado derecho del rectángulo:
   $$g(y) = w(\pi,y) = \sum_{n\geq 1} \beta_n w_n(\pi,y) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \sinh(n\pi/2)\sin(ny/2) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(ny/2)$$
   donde hemos notado $b_n = \beta_n \sinh(n\pi/2)$. En la sección sobre desarrollos de Fourier vimos que
   $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (1 - \pi^2 y)\sin(ny/2)\,\mathrm{d}y = 4\pi^2\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\frac{1 - (-1)^n}{n}, \qquad n \geq 1$$

son los coeficientes de Fourier del desarrollo en senos de la función $g(y) = 1 - \pi^2 y$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Finalmente, deshaciendo el cambio de variables $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$, la solución final del problema original es

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) = x^2 y + \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{\sinh(n\pi/2)} \sinh(nx/2) \sin(ny/2).$$

Principios del máximo y mínimo para la ecuación de Poisson. Ahora vamos a estudiar el equilibrio elástico de un cuerpo n-dimensional Ω sometido a la acción de una fuerza "vertical" externa $F(\vec{x})$. Supondremos que es un cuerpo finito, luego Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Recordamos que $\partial\Omega$ denota la *frontera* del cuerpo Ω, mientras que $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ es la *adherencia* del cuerpo; es decir, los puntos del interior más los de la frontera.

Ejemplo 3. Si estudiamos una membrana circular de radio r, entonces

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}, \\ \partial\Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}, \\ \overline{\Omega} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}. \end{aligned}$$

Si dibujamos en el espacio $(x,y,u) \in \mathbb{R}^3$ la gráfica de la función $u(x,y)$ que representa el desplazamiento vertical respecto la posición de equilibrio $u \equiv 0$, visualizaremos la deformación de esta membrana elástica. El signo de $F(x,y)$ determina en que sentido actúa la fuerza externa en el punto (x,y) de la membrana: la fuerza "empuja" hacia arriba cuando $F(x,y) > 0$ y "empuja" hacia abajo cuando $F(x,y) < 0$. Si $F(x,y) = 0$, no se ejerce ninguna fuerza externa en el punto (x,y).

Siguiendo con la membrana circular anterior (podemos pensar en un tambor), la intuición física nos dice que cuando la fuerza empuja hacia abajo (por ejemplo, si colocamos un peso encima del tambor), la parte interior de la membrana se "hunde" con lo cual los puntos más altos (máximos en altura) están en el borde. De la misma manera, si la fuerza empuja hacia arriba, la membrana se "eleva" y los puntos más bajos (mínimos de la función altura) permanecen en el borde. Vamos a probar un resultado teórico sugerido por esta interpretación física.

Dijimos al principio del tema que la ecuación de Poisson

$$\Delta u = -F(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \Omega$$

modela la deformación elástica que sufre el cuerpo Ω bajo una fuerza externa $F(\vec{x})$.

Teorema. *Sea $u(\vec{x})$ una función continua en $\overline{\Omega}$ que cumple la anterior ecuación de Poisson. Sean M y m los valores máximo y mínimo que toma esta función en la frontera de Ω. Entonces:*

- *Principio del máximo: $F(\vec{x}) \leq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \Omega \Longrightarrow u(\vec{x}) \leq M \;\; \forall \vec{x} \in \overline{\Omega}$.*
- *Principio del mínimo: $F(\vec{x}) \geq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \Omega \Longrightarrow u(\vec{x}) \geq m \;\; \forall \vec{x} \in \overline{\Omega}$.*
- *Principio del máximo y mínimo: $F(\vec{x}) = 0 \;\; \forall \vec{x} \in \Omega \Longrightarrow m \leq u(\vec{x}) \leq M \;\; \forall \vec{x} \in \overline{\Omega}$.*

Demostración. El segundo y tercer principio se deducen del primero, luego nos centramos en éste.

Por simplicidad, sólo haremos la prueba cuando tenemos la desigualdad estricta $F(\vec{x}) < 0$ para todo punto $\vec{x} \in \Omega$.

Como estamos suponiendo que la función $u(\vec{x})$ es continua en el conjunto compacto $\overline{\Omega}$, sabemos que alcanza su valor máximo global en algún punto $\vec{x}^* \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Si vemos que ese punto no puede estar en el interior Ω, estará en la frontera $\partial\Omega$ y el principio del máximo quedará probado.

Acabaremos la prueba mediante un argumento de reducción al absurdo. Concretamente, vamos a suponer que el punto $\vec{x}^*$ está en el interior y llegaremos a una contradicción. Empezamos notando que si la función $u(\vec{x})$ tiene un máximo (tanto da que sea local o global) en un punto del interior, todas sus segundas derivadas parciales dobles serán menores o iguales a cero en ese punto. Es decir,

$$u_{x_1 x_1}(\vec{x}^*) \leq 0, \; u_{x_2 x_2}(\vec{x}^*) \leq 0, \; \ldots, \; u_{x_n x_n}(\vec{x}^*) \leq 0.$$

Ahora bien, si recordamos que $u(\vec{x})$ cumple la ecuación de Poisson, resulta que

$$u_{x_1 x_1}(\vec{x}^*) + u_{x_2 x_2}(\vec{x}^*) + \cdots + u_{x_n x_n}(\vec{x}^*) = \Delta u(\vec{x}^*) = -F(\vec{x}^*) > 0,$$

lo cual contradice el conjunto de desigualdades anteriores. □

Un uso astuto de estos principios permite probar la unicidad de soluciones para la ecuación de Poisson con condiciones de frontera de tipo Dirichlet. La existencia se prueba con otras técnicas.

Teorema. *Si Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces el problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} \Delta u(\vec{x}) & = & -F(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) & = & G(\vec{x}), & \vec{x} \in \partial\Omega \end{array} \right.$$

no puede tener más de una solución continua en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Supongamos que tenemos dos soluciones $u_1(\vec{x})$ y $u_2(\vec{x})$ del problema y vamos a probar que deben coincidir. La diferencia $u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x})$ cumple

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \Delta u(\vec{x}) & = & \Delta u_1(\vec{x}) - \Delta u_2(\vec{x}) = -F(\vec{x}) + F(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) & = & u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x}) = G(\vec{x}) - G(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. .$$

Ahora podemos aplicar el principio del máximo y mínimo a la función diferencia $u(\vec{x})$, luego

$$m \le u(\vec{x}) = u_1(\vec{x}) - u_2(\vec{x}) \le M \quad \forall \vec{x} \in \overline{\Omega}.$$

Finalmente, basta notar que $m = M = 0$, pues la función $u(\vec{x})$ es identicamente nula en toda la frontera. Eso implica que las soluciones iniciales $u_1(\vec{x})$ y $u_2(\vec{x})$ coinciden tanto en los puntos de la frontera como en los puntos del interior. □

Problema relacionado. (Principio del máximo y mínimo en Poisson 2D)

Principios del máximo y mínimo para la ecuación del calor. Ahora estudiamos la evolución de la temperatura en un cuerpo finito n-dimensional Ω; es decir, Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$.

La intuición física nos lleva a afirmar que, en ausencia de fuentes o sumideros de calor internos, ningún punto del cuerpo se puede calentar o enfriar en exceso, ya que el calor no puede aparecer ni desaparecer de forma mágica. (La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma.) Esta afirmación tiene la siguiente confirmación matemática.

Teorema. *Si $u(\vec{x}, t)$ es una temperatura continua en $\overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ que cumple la ecuación del calor*

$$u_t = k^2 \Delta u, \qquad \vec{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

las temperaturas máxima y mínima se alcanzan en el instante inicial: $t = 0$ o en la frontera: $\vec{x} \in \partial\Omega$.

Por tanto, si tenemos un PVI de calor en un cuerpo finito con condiciones de frontera de tipo Dirichlet y la temperatura inicial "empalma" bien con la temperatura en la frontera, entonces podemos calcular las temperaturas máxima y mínima que experimentará ese objeto sin resolver el problema.

Problema relacionado. (Principio del máximo y mínimo en Calor 1D)

That's all, folks!