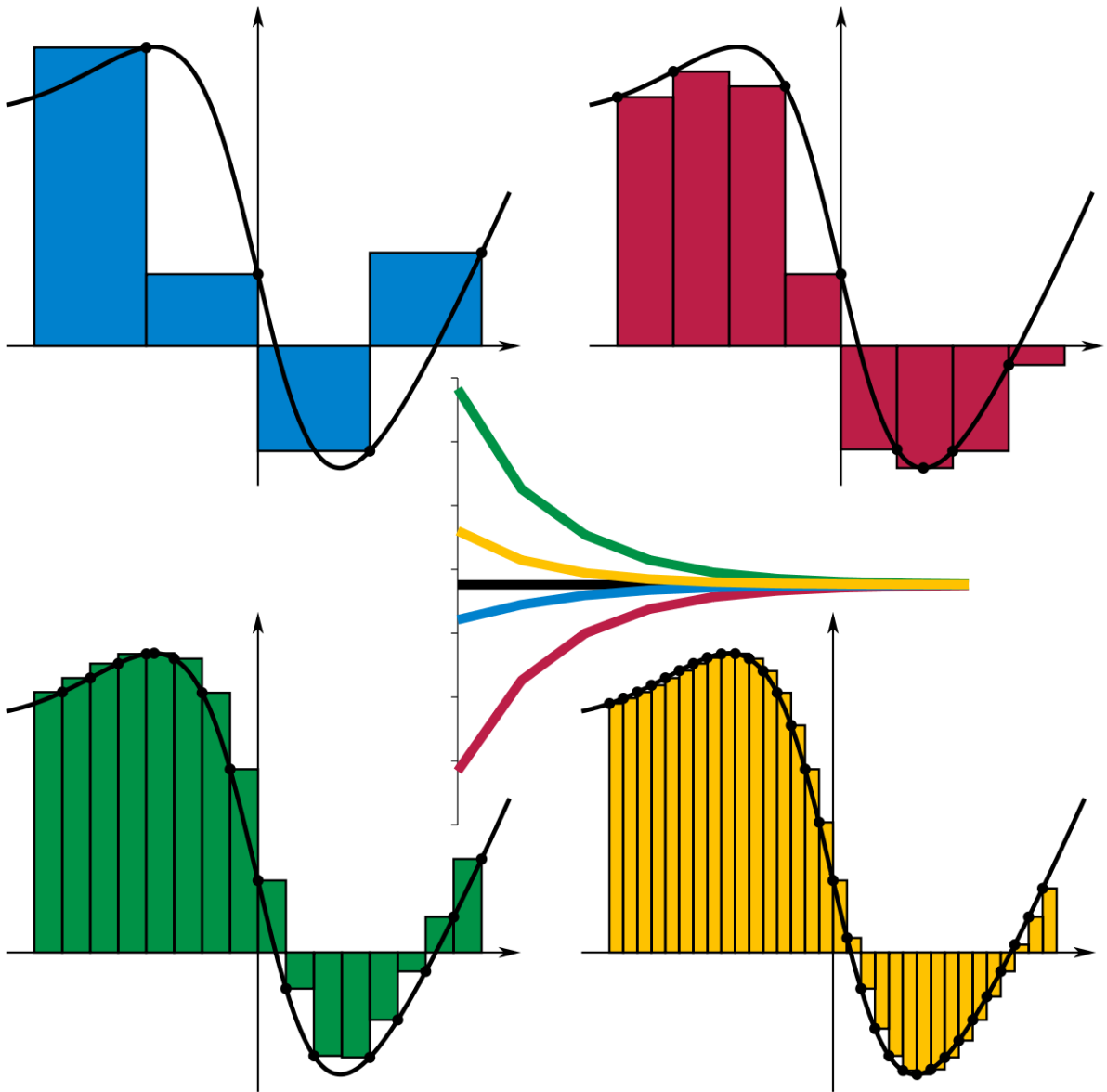

Problemes de Càlcul 1

GETI — ETSEIB



Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

Continuïtat

1. (Funcions elementals) Analitzeu el domini i la gràfica de les següents funcions.

(a) Funcions potencials $f(x) = x^a$ amb exponent $a \in \mathbb{Q}$.

Indicació: Distingiu els casos $a \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) La funció exponencial $f(x) = e^x$.

(c) La funció logaritme $f(x) = \log x$.

(d) Les funcions trigonomètriques $\sin x$, $\cos x$ i $\tan x$.

(e) Les funcions trigonomètriques inverses $\arcsin x$, $\arccos x$ i $\arctan x$.

(f) Les funcions hiperbòliques

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2. (Desigualtats) Determineu els següents subconjunts de $\mathbb{R}$.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 - |2x - |x - 1|| \geq 0\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| - (3x + 3) > 0\}$.

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| = -x\}$.

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1/2\}$.

3. (Dominis) Trobeu el domini de les funcions següents.

(a) $f(x) = \log(\sin x)$.

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{2}+x}}$

(d) $f(x) = \sqrt{|x+2| - |x+1|}$

(e) $f(x) = \log(g(x))$, amb $g(x) = 3 - |2x - |x - 1||$.

(f) $f(x) = \sqrt{\cos 5x}$.

(g) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

(h) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

4. (Transformacions de Möbius) Considereu les funcions

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x+5}.$$

Determineu les funcions inverses, $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, les composicions $(g \circ f)(x)$, $(g^{-1} \circ f)(x)$ i els dominis corresponents.

5. (Dominis i paradoxa) Sigui $g(x) = x^2 - 9$ i considerem les funcions

$$f_1(x) = \left(\sqrt[3]{g(x)}\right)^{-\frac{1}{\log[(g(x))^2]}}, \quad f_2(x) = \left(\sqrt[2]{g(x)}\right)^{-\frac{1}{\log[(g(x))^3]}}.$$

Calculeu els dominis de $f_1(x)$ i de $f_2(x)$ i comproveu que les dues són iguals a la mateixa constant en els seus respectius dominis.

Indicació: Recordeu que $a^b = e^{b \log a}$ per tota base $a > 0$ i per tot exponent $b \in \mathbb{R}$.

6. (Funció signe) La funció signe es defineix com

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Construïu la gràfica de $\text{signe}(x)$ i calculeu els límits següents (en cas que sigui possible):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{signe}(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{signe}(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \text{signe}(x).$$

7. (Funcions definides a trossos, 1) Dibuixeu la gràfica de $f(x)$ i identifiqueu els valors de c per als quals existeix el límit

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

en els casos següents.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \begin{cases} x, & \text{si } x < 1, \\ 3, & \text{si } x = 1, \\ 2 - x^2, & \text{si } 1 < x \leq 4, \\ x - 3, & \text{si } x > 4. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x) &= \begin{cases} 2 \cos x, & \text{si } x < 0, \\ 2 + \sin x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \\ \cos x, & \text{si } x > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

8. (Càlcul de límits, 1) Calculeu, cas d'existir, els límits següents.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}.$$

Indicació: Calculeu els límits laterals per separat.

$$\text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x).$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}.$$

Indicació: Podeu fer servir que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x}.$$

$$\text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cos x.$$

$$\text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x).$$

$$\text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [x] \sin x.$$

Indicació: $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ és la funció part sencera.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{2}{\sin^2 x} \right).$$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}.$

Indicació: Calculeu els límits laterals per separat.

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{1/\sin x}.$

Indicació: La indeterminació 1^∞ es pot calcular fent servir el *principi d'equivalència logarítmica*. Si $\lim_{x \rightarrow c} a(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow c} |b(x)| = +\infty$, llavors

$$\lim_{x \rightarrow c} [b(x)(a(x) - 1)] = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} a(x)^{b(x)} = e^L.$$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{1/\tan^2 x}.$

9. (Càlcul de límits, 2) Calculeu, cas d'existir, els límits següents.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}.$

Indicació: Calculeu els límits laterals per separat.

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x}.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^2 - 3x}}.$

(e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x} \sin x.$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$

Indicació: Feu el canvi de variable $x = t^n$ amb un exponent $n \in \mathbb{N}$ adequat.

10. (Discontinuitats) Determineu i classifiqueu les discontinuïtats de les següents funcions.

(a) $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}.$

(b) $f(x) = \frac{|x+7|}{x+7}.$

(c) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1/x}}.$

(d) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{si } x < 1, \\ x^2, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \tan(\pi x/4), & \text{si } |x| < 1, \\ x, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\pi x/6)}, & \text{si } |x-3| \leq 2, \\ 2, & \text{si } |x-3| > 2. \end{cases}$

(g) $f(x) = \frac{e^{\cot x} - 1}{e^{\cot x} + 1}.$

(h) $f(x) = \frac{|x|}{1 - \sqrt{\log(|x| + 1)}}.$

(i) $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \frac{b}{x}$ amb $a, b \neq 0$.

Indicació: $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ és la funció part sencera.

(j) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

(k) $f(x) = \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} - e^{2-1/x}}$.

(l) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^3 - 2x^2}\right)$.

11. (Asímtotes verticals) Trobeu les asímtotes verticals (si n'hi ha) de les següents funcions.

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

(b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^4 - 16}$.

(d) $f(x) = \sec(\pi x)$.

(e) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$.

(f) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$.

12. (Funcions definides a trossos, 2) Trobeu les constants a i b que fan que les següents funcions siguin contínues a $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4 \sin x}{x}, & \text{si } x < 0, \\ a - 2x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - a^2}{x - a}, & \text{si } x \neq a, \\ 8, & \text{si } x = a. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(bx)}{x^2}, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ \frac{\log(1+ax)}{x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

13. (Continuïtat a l'origen, 1) Estudia la continuïtat en $x = 0$ de les següents funcions.

(a) $f(x) = \begin{cases} x - \frac{2x}{\sqrt{x^4+x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} \sin(e^{1/x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

14. (Continuïtat de la composició) Analitzeu la continuïtat de la funció composta $h(x) = f(g(x))$.

(a) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ i $g(x) = x - 1$.

(b) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$.

15. (Continuïtat a l'origen, 2) Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció tal que

$$(f(x))^2 \leq x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veieu que $f(0) = 0$ i proveu que $f(x)$ és contínua en $x = 0$.

16. (Existència de solucions) Proveu que les equacions següents tenen al menys una solució real.

(a) $x - \sin x - 1 = 0$

(b) $x^{1313} + \frac{169}{13 + x^2 + \sin^2 x} - 247 = 0.$

(c) $x^{180} + \frac{260}{2 + x^2 + \sin^2 x} = 100.$

Indicació: Apliqueu el teorema de Bolzano amb funcions adequades.

17. (Existència abstracta, 1) Siguin $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions contínues tals que $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Proveu que existeix $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

18. (Existència abstracta, 2) Sigui $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funció contínua. Proveu que existeixen $c, d \in [0, 1]$ tals que $f(c) = c$ i $f(d) = 1 - d$.

19. (Déjà vu) Un dissabte a les 8:00 del matí, un home comença a pujar corrent el vessant d'una muntanya cap al campament de cap de setmana. El diumenge a les 8:00 del matí baixa corrent la muntanya. Triga 20 minuts en pujar i només 10 en baixar. En un cert punt del camí de baixada, l'home s'adona que va passar pel mateix punt a la mateixa hora el dia anterior. Demostreu que l'home no va errat.

Indicació: Considereu que $s(t)$ i $r(t)$ són les funcions de posició de pujada i baixada. Apliqueu el teorema de Bolzano a la funció $f(t) = s(t) - r(t)$.

M'ho van explicar i ho vaig oblidar. Ho vaig veure i ho vaig entendre. Ho vaig fer i ho vaig aprendre. —Confucio

Derivació

20. (Càlcul de derivades, 1) Calculeu les derivades de les següents funcions.

(a) $f(x) = \cos \sqrt{\sin(\tan \pi x)}.$

(b) $f(x) = \left(\frac{x+5}{x^2+2} \right)^2.$

(c) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}.$

(d) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3.$

(e) $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}.$

(f) $f(x) = \sec(x/2) \tan(x/2).$

21. (Derivabilitat a l'origen, 1) Considereu les funcions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donades per

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostreu que $f(x)$ és contínua, però no derivable en $x = 0$.

(b) Demostreu que $g(x)$ és derivable en 0 i calculeu $g'(0)$. És $g'(x)$ contínua?

22. (Derivabilitat a l'origen, 2) Considereu la funció $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^5+x^2}}\right), & \text{si } x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\} \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

És $f(x)$ derivable a $(-1, +\infty)$? Calculeu la seva derivada on sigui derivable.

23. (L'Hôpital abstracte, 1) Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable. Calculeu els límits

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h)^2 - f(x-h)^2}{h}.$$

24. (Funció definida a trossos, 3) Existeix algun valor $a > 0$ tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ \frac{e^{5x}+3}{a(e^{5x}+1)}, & \text{si } 0 < x < 1, \end{cases}$$

sigui derivable a l'interval $(-1, 1)$?

25. (Una equació diferencial) Sigui $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable tal que $f'(x) = f(1/x)$.

(a) Proveu que $f(x)$ és dues vegades derivable.

(b) Proveu que existeixen constants a, b, c , no totes zero, tals que

$$ax^2 f''(x) + bx f'(x) + cf(x) = 0.$$

26. (Funcions parelles i senars, 1) Demostreu que la derivada d'una funció senar és parella. És a dir, si $f(-x) = -f(x)$, llavors $f'(-x) = f'(x)$.

27. (Dominis i paradoxes, 2)

- (a) Proveu que $g(c) = \arctan c + \arctan(1/c) = \begin{cases} -\pi/2, & \text{si } c < 0, \\ \pi/2, & \text{si } c > 0. \end{cases}$
- (b) Considerem $c > 0$. Calculeu la derivada de la funció $f(x) = \arctan \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in \mathbb{R}$, i dedueu que

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x + \arctan c, & \text{si } x < 1/c, \\ \arctan x + \arctan c - \pi, & \text{si } x > 1/c. \end{cases}$$

- 28.** (Càlcul de derivades, 2) Considereu la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Siguin $h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions tals que

$$h(0) = 3, \quad h'(x) = \sin^2(\sin(x+1)), \quad k(0) = 0, \quad k'(x) = f(x+1).$$

Calculeu les derivades següents:

- (a) $(f \circ h)'(0)$.
- (b) $(k \circ f)'(0)$.
- (c) $\alpha'(x^2)$, on $\alpha(x) = h(x^2)$.
- 29.** (Perpendicularitat, 1) Demostreu que les gràfiques de $y = x$ i $y = 1/x$ tenen rectes tangents perpendiculars entre si en el seu punt d'intersecció.
- 30.** (Perpendicularitat, 2) Considereu la paràbola $x = y^2$.
- (a) Trobeu totes les rectes normals a la paràbola des dels punts $P_1 = (1/2, 0)$ i $P_2 = (1, 0)$.
- (b) Per a quin valor de $(x_0, 0)$ existeixen dues rectes normals perpendiculars entre si?
- 31.** (Inverses globals, 1) Feu servir la derivada per determinar si les següents funcions tenen inversa global.
- (a) $f(x) = \cos(3x/2)$.
- (b) $f(x) = \log(x-3)$.
- 32.** (Intervals d'injectivitat) Representeu esquemàticament les següents funcions i indiqueu en quins intervals són injectives
- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$.
- (b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.
- 33.** (Inversa global, 2) Considereu la funció $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.
- (a) Trobeu la funció inversa de $f(x)$.
- (b) Feu un estudi esquemàtic de la gràfica de $f(x)$ i de $f^{-1}(x)$ i representeu-les.
- 34.** (Límits per L'Hôpital) Descriviu el tipus de forma indeterminada (si n'hi ha) que s'obté per substitució directa, i calculeu el límit per l'Hôpital, si cal.

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log x.$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}.$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{2/x}.$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}.$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 4^+} [3(x-4)]^{x-4}.$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x)^{x-1}.$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\cos(\pi/2 - x)]^x.$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4} \right).$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{\log x} - \frac{2}{x-1} \right).$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 5}{x}.$
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1-x)}{x}.$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x^2}{x^2 - 1}.$
- (m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$ amb $a, b \neq 0$.
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ amb $a, b \neq 0$.
- (o) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - (\pi/4)}{x - 1}.$
- (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}.$
- (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\sin(\pi x)}.$
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x}.$

35. (L'Hôpital abstracte, 2) Sigui $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció 2 cops derivable amb segona derivada contínua tal que $g(0) = g'(0) = 0$ i $g''(0) = 17$. Sigui

$$f(x) = \begin{cases} g(x)/x, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Trobeu $f'(0)$.

36. (Desigualtat abstracta) Siguin $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tals que $f(a) = g(a)$ i $f'(x) > g'(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Proveu que $f(x) > g(x)$ si $x > a$ i $f(x) < g(x)$ si $x < a$.
- (b) Proveu que la conclusió no és correcta sense la hipòtesi $f(a) = g(a)$.

37. (Asíptotes oblíquues) Calculeu les asíptotes oblíquues de la funció

$$f(x) = x - \frac{2x}{\sqrt{x^4 + x^2}}.$$

38. (Gràfiques de funcions) Dibuixeu les gràfiques (talls amb els eixos, intervals de creixement i decreixement, extrems relatius, punts d'inflexió, asímptotes, etc.) de les següents funcions.

(a) $y = \frac{x+1}{x^2-4}$.

(b) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$.

(c) $y = \sin\left(\frac{x}{x-2}\right)$ per $x > 3$.

(d) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

(e) $y = \frac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1}$.

(f) $y = 2 - \frac{3}{x^2}$.

(g) $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

(h) $y = xe^{x^2+1}$.

(i) $y = (x+1) \log|x+1|$.

(j) $y = x^x$ per $x > 0$.

(k) $y = x \cot x$ per $-2\pi < x < 2\pi$.

(l) $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

39. (Monotonia) Estudieu la derivabilitat i la monotonia de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

40. (Una paradoxa) Fixat un paràmetre arbitrari $a \in \mathbb{R}$, proveu que la funció

$$f(x) = \begin{cases} ax + x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

és derivable a l'origen i que $f'(0) = a$. Proveu que si $|a| < 1$, aleshores $f(x)$ no és monòtona en cap entorn de l'origen.

41. (Extrems absoluts de funcions contínues en intervals compactes) Trobeu els extrems absoluts de les següents funcions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ i $[a, b] = [-1, 1]$.

(b) $f(x) = 3 - |x - 3|$ i $[a, b] = [-1, 5]$.

(c) $f(x) = \tan(\pi x/8)$ i $[a, b] = [0, 2]$.

(d) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 3x + 1, & \text{si } x \in (0, 2], \\ 3 - 2|x + 1|, & \text{si } x \in [-2, 0], \end{cases}$ i $[a, b] = [-2, 2]$.

Què passaria si per $x = 0$ canviem la definició de $f(x)$ a $f(0) = 100$?

42. (Extrems relatius) Calculeu els extrems relatius, i digueu si són màxims o mínims, de la funció

$$f(x) = -(x^2 - x)^{2/3}.$$

43. (Derivació implícita, 1) Calculeu la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ per derivació implícita.

(a) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2 = 12$.

(b) $(\sin(\pi x) + \cos(\pi y))^2 = 2$.

(c) $y = \sin(xy)$.

44. (Derivació implícita, 2) Sigui $y = f(x)$ la funció definida implícitament per l'equació

$$e^{\cos y} + e^{\sin x} = 2 \sin y.$$

Si $g(y)$ és la inversa de $f(x)$ —o sigui $g(f(x)) = x$ —, quan val $g'(\pi/2)$?

45. (Derivació implícita, 3) Sigui $y = f(x)$ la funció definida implícitament per l'equació

$$x = y^3 + 3y^2 + 10y + 2.$$

Calculeu el punt $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f''(x_0) = 0$.

46. (Derivació implícita, 4) Calculeu el pendent de la recta tangent en el punt $(4, 2)$ de la lemniscata donada per

$$3(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2).$$

47. (Derivació implícita, 5) Calculeu la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ de manera implícita. Trobeu el major interval amb la forma $-a < y < a$ o $0 < y < a$ tal que $y = f(x)$ sigui una funció derivable de x . Expresseu la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ en funció de x .

(a) $\tan y = x$.

(b) $\cos y = x$.

48. (Teorema del valor mitjà, 1) Proveu que $\tan x > x$ per tot $x \in (0, \pi/2)$.

49. (Teorema del valor mitjà, 2) Sigui $0 \leq a < b$. Proveu la desigualtat

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

50. (Teorema del valor mitjà, 3) Proveu que $1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8$ sense calcular $\sqrt{66}$.

Indicació: Considereu la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i l'interval $[a, b] = [64, 66]$.

51. (Teorema del valor mitjà de Cauchy) Siguin $f(x)$ i $g(x)$ dues funcions contínues a $[a, b]$ i derivables a (a, b) . Proveu que existeix $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Indicació: Apliqueu el teorema del valor mitjà a la funció auxiliar

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{vmatrix} f(x) - f(a) & f(b) - f(a) \\ g(x) - g(a) & g(b) - g(a) \end{vmatrix} \\ &= (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)). \end{aligned}$$

52. (Existència i unicitat de solucions, 1) Useu el teorema de Bolzano i el teorema de Rolle per demostrar que les equacions següents tenen exactament una solució real.

(a) $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$.

(b) $3x + 1 - \sin x = 0$.

53. (Existència i unicitat de solucions, 2) Proveu que el polinomi $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ té exactament una arrel a l'interval $[-1, 2]$.

54. (Existència de solucions, 2) Considereu el polinomi $p(x) = x^3 - 3x + a$, on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre. Trobeu els valors d' a per als quals podem assegurar que $p(x)$ té un zero a l'interval $[0, 1]$. Quants zeros pot tenir en aquest interval?

55. (Polinomi de Maclaurin, 1) Calculeu el polinomi de Maclaurin de grau 3 de la funció $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$.

Indicació: Podeu fer servir la definició o les taules (generació).

56. (Polinomi de Maclaurin, 2) Fixat un paràmetre $a > 0$ arbitrari, calculeu el polinomi de Maclaurin de grau 4 de la funció

$$f(x) = \sqrt{\cos x + ax^2}.$$

Per quin $a > 0$ té $f(x)$ un mínim relatiu a l'origen?

57. (Fórmula del residu de Lagrange, 1) Proveu que $\tan x > x + x^3/3$ per tot $x \in (0, \pi/2)$.

58. (Fórmula del residu de Lagrange, 2) Acoteu l'error en les aproximacions següents.

(a) $\cos(0.3) \approx 1 - \frac{(0.3)^2}{2!} + \frac{(0.3)^4}{4!}$.

(b) $e \approx 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5!$.

59. (Fórmula del residu de Lagrange, 3) Sigui $f(x) = \log(1 + x)$. Aproximeu el valor de $f(0.5)$ amb un error menor de 10^{-4} .

60. (Polinomi de Maclaurin, 3) Considereu la funció $y = f(x)$, amb $f(0) > 0$, definida de forma implícita per l'equació

$$e^x - xy + y^2 - 5 = 0.$$

Calculeu el polinomi de Maclaurin de grau 2 de $f(x)$.

61. (Funcions parelles i senars, 2) Proveu que si una funció és senar/parell, aleshores el seu polinomi de Maclaurin de grau n només conté potències senars/parells.

62. (Límits per Taylor, 1) Donades les funcions següents, trobeu els seus termes dominants al voltant del punt $x = 0$ i calculeu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) $f(x) = 1 - \cos(1 - \cos x)$ i $g(x) = x^4$.

(b) $f(x) = \sin^3 x - \sin(x^3)$ i $g(x) = \log(1 + x^5)$.

(c) $f(x) = (x + \sin x)^2 + \sin^3 x$ i $g(x) = \sin(x^2) + \tan^2 x \cdot \arctan x$.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + e^{x^2/2} - 2$ i $g(x) = \sin(x^3)$.

- 63.** (Límits per Taylor, 2) Sigui $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable 4 vegades amb derivades contínues tal que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 3$. Calculeu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^6}.$$

- 64.** (Límits per Taylor, 3) Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció 4 cops derivable i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per

$$g(x) = \frac{\sin(9x^2) + xf(x) - 2x}{\log(1+x^3)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -2.$$

Calcula el polinomi de Maclaurin de $f(x)$ de grau 2.

- 65.** (Càlcul de derivada n -èssima, 1) Sigui $f(x) = (1+x^4)e^{x^4}$. Calculeu les derivades $f^{(2026)}(0)$, $f^{(2027)}(0)$ i $f^{(2028)}(0)$. Podeu donar una fórmula explícita per $f^{(n)}(0)$?

Indicació: Feu servir que $f(x) = g(x^4)$ amb $g(u) = (1+u)e^u$.

- 66.** (Càlcul de derivada n -èssima, 2) Considerem les funcions

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos(x^2)}, \quad g(x) = \begin{cases} x^4 f(x), & \text{si } x \neq 0, \\ 2, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Justifiqueu que g és derivable infinites vegades al voltant del punt $x = 0$. Calculeu $g^{(4)}(0)$. Quan val $g^{(n)}(0)$ si n és senar?

L'única manera d'aprendre matemàtiques és fent matemàtiques. —Paul R. Halmos

Integració

67. (Primitives immediates) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x+6}{\sqrt{x}} dx & \text{(b)} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx & \text{(c)} \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx \\ \text{(d)} \int (a+bx^3)^2 dx & \text{(e)} \int (\cos^2 \theta - \sin \theta) d\theta & \end{array}$$

68. (Canvis de variables) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx & \text{(b)} \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx & \text{(c)} \int \frac{\log(2x)}{x \log(4x)} dx \\ \text{(d)} \int x \sqrt[3]{3-4x^2} dx & \text{(e)} \int \sec 2x \tan 2x dx & \text{(f)} \int \frac{x - \sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \\ \text{(g)} \int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} dx & \text{(h)} \int \frac{e^x}{e^x-1} dx & \text{(i)} \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \\ \text{(j)} \int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}} dx & \text{(k)} \int \frac{\sqrt[3]{1+\log x}}{x} dx & \text{(l)} \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx \end{array}$$

69. (Primitives per parts) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int x^3 e^x dx & \text{(b)} \int x \log x dx & \text{(c)} \int x \sqrt{x-5} dx \\ \text{(d)} \int x^2 \cos x dx & \text{(e)} \int \arctan x dx & \text{(f)} \int e^{2x} \sin x dx \\ \text{(g)} \int x \sin^2 x dx & & \end{array}$$

70. (Primitives per parts i recurrència) Proveu les fórmules següents:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx. \\ \text{(b)} \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx. \\ \text{(c)} \int x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c. \\ \text{(d)} \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx. \\ \text{(e)} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c. \\ \text{(f)} \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c. \end{array}$$

Apliqueu les fórmules anteriors per calcular les primitives $\int x^5 \log x dx$ i $\int x^3 e^{2x} dx$.

71. (Primitives de funcions racionals) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int \frac{5x \, dx}{x^2 - 10x + 25} \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{x^2 - 25} \quad \text{(c)} \int \frac{x+1}{(x^2 + 4x + 5)^2} \, dx \\
 & \text{(d)} \int \frac{x \, dx}{(a+bx)^2} \quad \text{(e)} \int \frac{dx}{x^2(a+bx)} \quad \text{(f)} \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} \, dx \\
 & \text{(g)} \int \frac{dx}{x^3(x^3 + 1)}
 \end{aligned}$$

72. (Primitives amb funcions trigonomètriques) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int \sin 2x \cos x \, dx \quad \text{(b)} \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx \quad \text{(c)} \int \sin^3 x \, dx \\
 & \text{(d)} \int \frac{dx}{\cos x} \quad \text{(e)} \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x - \cos x} \quad \text{(f)} \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{1 + \cos^3 x} \, dx \\
 & \text{(g)} \int \frac{\sin^2 x + 1}{3 \cos^2 x + 1} \, dx
 \end{aligned}$$

73. (Primitives de funcions amb arrels) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int \sqrt{4-x^2} \, dx \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} \quad \text{(c)} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16-x^2}} \\
 & \text{(d)} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} \, dx \quad \text{(e)} \int e^{2x} \sqrt{1+e^{2x}} \, dx \quad \text{(f)} \int (x+1) \sqrt{x^2+2x+2} \, dx \\
 & \text{(g)} \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \, dx
 \end{aligned}$$

74. (Miscel·lània) Calculeu les primitives següents:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{(b)} \int \sqrt{4+\tan^2 x} \, dx \quad \text{(c)} \int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} \, dx \\
 & \text{(d)} \int x^2 \log \sqrt{1-x} \, dx \quad \text{(e)} \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} \quad \text{(f)} \int \frac{dx}{x^4 - 2x^2 + 1} \\
 & \text{(g)} \int \frac{dx}{2+3\cos^2 x} \quad \text{(h)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{2x+1}} \quad \text{(i)} \int \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}} \, dx \\
 & \text{(j)} \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \quad \text{(k)} \int \frac{x^3 \, dx}{x^2 + 2x + 1/2}
 \end{aligned}$$

75. (Funció definida a trossos, 3) Considereu la funció contínua $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } 0 \leq x \leq 4, \\ x, & \text{si } 4 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Useu fórmules geomètriques per a calcular la integral $\int_0^8 f(x) \, dx$.

76. (Àrea d'una el·lipse) Calculeu l'àrea d'una el·lipse de semieixos a i b .

77. (Àrea d'un domini pla) Calculeu l'àrea del domini

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2/16 + y^2 \leq 1\}.$$

Indicació: D és l'intersecció d'un cercle de radi dos i una el·lipse de semieixos $a = 4$ i $b = 1$.

78. (Àrea entre dues gràfiques) Trobeu l'àrea delimitada per les gràfiques de les funcions:

(a) $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 2 - x$, per $x \in [0, 1]$.

(b) $f(x) = -x^4 + 4x + 1$ i $g(x) = x + 1$.

(c) $f(x) = 2 \sin x$ i $g(x) = \tan x$, per $x \in [-\pi/3, \pi/3]$.

(d) $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 2x + 1$.

79. (Promig d'una funció, 1) Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = (1 - e^{1-\sin x})|\cos x|$. Calculeu el seu promig

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx.$$

80. (Un truc clàssic) Sigui f una funció contínua en $\mathbb{R}$. Considereu la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\cos x) + f(\sin x)} dx.$$

Feu el canvi de variable $t = \pi/2 - x$ i dedueu que $2I = \pi/2$ i, per tant, que $I = \pi/4$, independentment de la funció f .

81. (Teorema del valor mitjà per a integrals) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua, hi ha un punt $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$. Determineu c per a les integrals $\int_0^3 x^3 dx$ i $\int_0^2 (x - 2\sqrt{x}) dx$.

82. (Promig d'una funció, 2) El promig d'una funció integrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la quantitat

$$\bar{f} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Trobeu el promig de les funcions següents.

(a) $f(x) = 9 - x^2$, $[a, b] = [-3, 3]$

(b) $f(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, \pi]$

(c) $f(x) = \frac{4(x^2 + 1)}{x^2}$, $[a, b] = [1, 3]$.

83. (Regla de Barrow) Calculeu la recta tangent a la gràfica de la funció

$$y = F(x) = \int_0^x \log^2(t + e) dt$$

en el punt d'abscissa $x = 0$.

84. (Un límit per Barrow, 1) Considereu la funció integral $F : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$F(x) = \int_1^x \log t dt.$$

Calculeu $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x)}{\sqrt{x} - 1}$.

85. (Un límit per Barrow, 2) Considereu la funció integral

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt, \quad f(x) = \frac{e^{2x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

Calculeu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{e^{2x+1} - e}$.

Aclariment: La funció $f(x)$ és contínua en $x = 0$ si definim $f(0) = 4$.

86. (Regla de Leibniz, 1) Calculeu $(F^{-1})'(0)$ per a les següents funcions.

(a) $F(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t)) \, dt.$

(b) $F(x) = \int_1^x \sin(\sin t) \, dt.$

(c) $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{-t^2} \, dt$, per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

87. (Regla de Leibniz, 2) Calculeu les derivades de les següents funcions.

(a) $F(x) = \int_a^{x^3} \sin t \, dt.$

(b) $F(x) = \int_{15}^x \left(\int_8^y \frac{dt}{1 + t^2 + \sin t^2} \right) dy.$

(c) $F(x) = \sin \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin^3 t \, dt \right) dy \right).$

(d) $F(x) = \int_{x^2-1}^{4x^3} \cos(t+1) \, dt.$

88. (Integral gaussiana) Considereu la funció integral $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt.$$

(a) Proveu la desigualtat

$$\int_1^x e^{-t^2} \, dt \leq \int_1^x e^{-t} \, dt, \quad \forall x \geq 1.$$

Deduiu que existeix el límit $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

(b) Estudieu la derivabilitat i la gràfica de la funció $F(x)$.

89. (Propietat regularitzadora de la integral) Sigui $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in [0, 2], \\ x^2 + x + 1, & \text{si } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

(a) Trobeu $F : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in [0, 2) \cup (2, 3]$ i $\int_0^3 F(x) \, dx = 6$.

(b) Estudieu la continuïtat i derivabilitat de les funcions $f(x)$ i $F(x)$.

90. (Càlcul d'integrals impròpies) Analitzeu si les següents integrals impròpies són convergents i, en cas afirmatiu, calculeu el seu valor.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_1^\infty \frac{4 \, dx}{x^2 + 1} \quad \text{(b)} \int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx \quad \text{(c)} \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} \\
 & \text{(d)} \int_0^{\pi/2} \tan \theta \, d\theta \quad \text{(e)} \int_1^\infty \frac{1 + \log x}{x^\alpha} \, dx
 \end{aligned}$$

91. (Àrea amb integral impròpia, 1) Trobeu l'àrea compresa entre la gràfica de

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

i la seva asímptota horitzontal.

92. (Àrea amb integral impròpia, 2) Calculeu l'àrea (sense signe) compresa entre la gràfica de la funció $y = f(x) = \log |x|$, l'eix horitzontal i les rectes $x = -e$ i $x = e$.

93. (Estudi d'integrals impròpies) Estudieu la convergència de les següents integrals.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_1^\infty \frac{x^2 \arctan x}{2x^3 + \sin x} \, dx \quad \text{(b)} \int_0^\infty \left(1 - e^{-1/\sqrt{x}}\right) x^\alpha \, dx \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{1 - 2 \cos^5 x}{2 + e^x + \sin x} \, dx \\
 & \text{(d)} \int_0^\infty \frac{1 - x \sin x}{1 + x^3} \, dx \quad \text{(e)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2/7} + x^{7/2}} \, dx \quad \text{(f)} \int_2^\infty \frac{1}{x(\log x)^\alpha} \, dx \\
 & \text{(g)} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^{2\alpha}} \, dx \quad \text{(h)} \int_0^1 \sin(x^\alpha) (\sqrt{1-x})^\alpha \, dx
 \end{aligned}$$

94. (Càlcul de fórmules recurrents) Considereu la integral impròpia

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2 + 1)^{n+3}} \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Raoneu que és convergent per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(b) Proveu la fórmula recurrent $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-1}$ per a tot $n \geq 2$.

(c) Avalueu les integrals $\int_0^\infty \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)^4}$ i $\int_0^\infty \frac{x^3 \, dx}{(x^2 + 1)^5}$.

95. (La funció Gamma d'Euler) Considereu la funció $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx.$$

(a) Proveu que aquesta integral impròpia és convergent per a tot $p > 0$.

(b) Proveu, integrant per parts, que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ per a tot $p > 0$.

(c) Deduïu que $\Gamma(n+1) = n!$ i $\Gamma(n+1/2) = (2n-1)!! 2^{-n} \Gamma(1/2)$ per a tot enter $n \geq 0$.

(d) Proveu que $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$.

96. (Asímtota obliqua d'una funció integral) Proveu que la funció

$$G(x) = x \int_0^x e^{-t} \cos \sqrt{t} \, dt$$

té una asímptota oblíqua quan $x \rightarrow +\infty$ de la forma $y = mx$ amb

$$m = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \sqrt{t} \, dt.$$

97. (Asímtota horitzontal d'una funció integral) Trobeu els exponents $\alpha \in \mathbb{R}$ pels quals la funció

$$F(x) = \int_1^x \frac{(t^2 + 2)^\alpha}{1 + e^t} \, dt$$

té una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$? I quan $x \rightarrow -\infty$?

98. (Un problema complet, 1) Considereu les funcions

$$F_1(x) = (x+2)^{1/\log(x+2)}, \quad F_2(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 16}{1 + \cos^2(t^4)} \, dt, \quad F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

- Calculeu els seus dominis. Veieu que F_1 és constant per $x > -1$ i calculeu el valor d'aquesta constant.
- Calculeu $F(0)$. Veieu que F és derivable en $x = 0$ i calculeu $F'(0)$ i $(F^{-1})'(e)$.
- Trobeu els intervals de creixement i decreixement de $F(x)$ i els seus extrems (màxims i mínims) relatius a l'interval $(-1, \infty)$.
- Sigui $y = mx + n$ la recta tangent a la gràfica de $F(x)$ en $x = 0$. Verifiquem que aquesta recta i la corba d'equació $g(x) = \arctan x + \cos(3x)$ es tallen en un únic punt a $(-1, +\infty)$.
Observació: No és necessari determinar aquest punt.
- Calculeu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) + 8 \sin x - e}{3x^3}.$$

Indicació: Apliqueu una vegada l'Hôpital, opereu el resultat i utilitzeu desenvolupaments de McLaurin de segon grau.

99. (Un problema complet, 2) Considereu la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos(x^2)}.$$

- Estudieu el domini, la continuïtat de la funció i l'existència d'asímtotes verticals.
- Calculeu $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 f(x)$.
- Fixat un exponent $\alpha \in \mathbb{R}$, estudieu la convergència de la integral impròpia

$$\int_0^1 (f(x))^\alpha \, dx.$$

Indicació: Feu servir l'apartat anterior.

- Sigui $g(x) = x^4 f(x)$. Calculeu $g^{(4)}(0)$. Quant val $g^{(2023)}(0)$?

Aprèn a resoldre tots els problemes que ja s'han resolt. —Richard Feynman

Sèries

100. (Una idea de Paul Dirac) Calculeu el terme general de la successió $a_n = -\log_2(\log_2 r_n)$, on

$$r_n = \sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\sqrt{2}}}}$$

és una expressió que conté n arrels quadrades anidades.

101. (Límits de successions) Determineu el límit, cas d'existir, de les següents successions.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} & \text{(b)} a_n = \cos(2/n) & \text{(c)} a_n = \frac{n^p}{e^n} \text{ on } p > 0 \\ \text{(d)} a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n)^n} & \text{(e)} a_n = \frac{\log n^3}{2n} & \text{(f)} a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2} \end{array}$$

102. (Sumes de Riemman) Calculeu el límit

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}, \quad S_n = \sqrt[n]{e} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}.$$

(a) Provant i fent servir que $S_n = \sqrt[n]{e}(1 + S_n - e)$.

Indicació: $\sqrt[n]{e} = e^{1/n} = 1 + 1/n + O(1/n^2)$.

(b) Fent servir una suma de Riemman.

103. (Stolz) Apliqueu el criteri de Stolz per calcular

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Indicació: També podeu escriure el terme general com una suma de Riemann.

104. (Criteri del sandvitx) Proveu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0$.

105. (Convergència de sèries numèriques) Estudieu la convergència.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} & \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1} \\ \text{(d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{(n+1)^2} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2} \\ \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n 3^n} & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!} & \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n} \\ \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} & \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ on } a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{\sqrt{n}} a_n \\ \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s \cos(n\pi)}{(n^2 + 1)^r} \end{array}$$

106. (Interval de convergència computacional) Trobeu l'interval de convergència.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{3}\right)^n & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^n} \\
 \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{n!} x^n \\
 \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-c)^n}{(2n-1)!!} & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} \\
 \text{(j)} \sum \frac{(n!)^2}{2n!} x^n
 \end{array}$$

107. (Un problema complet, 3) Considereu la sèrie de potències $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

- (a) Trobeu el radi i l'interval de convergència de $f(x)$.
- (b) Determineu la sèrie derivada $f'(x)$ i el seu interval de convergència.
- (c) Deduïu una expressió de $f(x)$ en termes de funcions elementals en el domini de convergència corresponent.

Indicació: Calculeu primer l'expressió de $f'(x)$.

- (d) Calculeu la suma $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{4^n} + \frac{3}{9^n} \right)$.

Indicació: Trobeu dos punts $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $S = f(a) + f(b)$.

108. (Interval de convergència abstracte) Sigui a_n una successió decreixent de termes positius tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1}/a_n) = 2.$$

- (a) Veieu que l'interval $[-1/2, 1/2)$ està contingut a l'interval de convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Aclariment: No heu d'estudiar la convergència per $x = 1/2$.

- (b) Doneu un exemple de successió a_n satisfent les condicions esmentades a l'enunciat tal que l'interval de convergència de la sèrie sigui exactament $[-1/2, 1/2)$.
- (c) Doneu un exemple de successió a_n satisfent les condicions esmentades a l'enunciat tal que l'interval de convergència de la sèrie sigui exactament $[-1/2, 1/2]$.

109. (Sèries de potències i equacions diferencials, 1) Proveu que la funció representada per la sèrie de potències corresponent satisfà l'equació diferencial que l'acompanya.

- (a) Sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; equació diferencial $y'' + y = 0$.
- (b) Sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$; equació diferencial: $y'' - xy' - y = 0$.

110. (Sèries de potències i equacions diferencials, 2) Considereu la sèrie de potències

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (x/2)^{2n}.$$

Determineu el seu radi de convergència i proveu que

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0.$$

Observació: $J_0(x)$ és la funció de Bessel de primera classe y ordre zero.

111. (Sèries de potències i equacions diferencials, 3) Trobeu una sèrie de potències $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ tal que

$$(x^2 + 1)y'' = 2y, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 7.$$

112. (Sèries de Taylor per generació) Trobeu la sèrie de Taylor centrada en el punt $c \in \mathbb{R}$ de les funcions següents.

(a) $f(x) = \frac{5}{2x-3}$ i $c = -3$.

(b) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x - 3}$ i $c = 0$.

(c) $f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}$ i $c = 0$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ i $c = 0$.

(e) $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$ i $c = 0$.

(f) $f(x) = \frac{7}{3x+2}$ i $c = 4$. Quan val $f^{(300)}(4)$?

113. (Sèries de Maclaurin per generació) Calculeu les sèries de Maclaurin de les següents funcions.

(a) $f(x) = \log(1+x)$

(b) $f(x) = \cos(x^{3/2})$

(c) $f(x) = \cos^2 x$

(d) $f(x) = e^{-3x}$

(e) $f(x) = \sinh x$

(f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

114. (Sèrie de potències per generació i integració) Trobeu la sèrie de Maclaurin de la funció

$$f(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

115. (Funció generadora de la successió de Fibonacci) Considereu la successió recurrent

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

(a) Apliqueu l'apartat anterior per calcular el radi de convergència de la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1}$.

Indicació: Podeu fer servir, sense provar-la, la desigualtat $a_{n+1} \leq 2a_n$ per tot $n \geq 1$.

- (b) Proveu que si $f(x)$ és la suma de la sèrie anterior, aleshores

$$f(x) - xf(x) - x^2f(x) = 1,$$

i deduiu que

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

- (c) Utilitzeu la descomposició en fraccions simples per deduir un altre desenvolupament en sèrie de $f(x)$ i deduiu que

$$a_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\sqrt{5}}, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \phi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

- 116.** (Aproximació d'integrals) Utilitzeu sèries de Maclaurin per aproximar el valor de les integrals amb un error menor de 10^{-4} .

(a) $I = \int_0^1 e^{-x^3} dx$

(b) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

(c) $I = \int_0^{0.2} \sqrt{1+x^2} dx$

- 117.** (Un límit clàssic relacionat amb Stirling)

- (a) Proveu que si $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció estrictament creixent, llavors

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x) dx < f(2) + \cdots + f(n).$$

- (b) Proveu que $\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$.

Indicació: Apliqueu l'apartat anterior amb $f(x) = \log x$.

- (c) Deduiu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = 1/e$.

Indicació: Apliqueu l'apartat anterior i el criteri del sandvitx.

- 118.** (Funcions parelles i senars, 3) Proveu que si una funció $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ és senar/parell, aleshores la seva sèrie de Fourier només conté sinus/cosinus.

- 119.** (Formula de Leibniz per Fourier)

- (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \pi$.

- (b) Useu l'apartat anterior per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

- 120.** (Problema de Bassel per Fourier)

- (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(b) Useu l'apartat anterior per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2},$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(c) Useu l'apartat anterior per trobar una sèrie numèrica que sumi $\pi^2/8$.

121. (Aplicació del teorema de Dirichlet)

(a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(b) On convergeix aquesta sèrie quan $x = 7\pi/2$? I quan $x = 401\pi$?

122. (Fourier només amb cosinus, 1) Trobeu, si és que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

123. (Fourier només amb cosinus, 2) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \pi/2 \leq |x| \leq \pi, \\ \cos x, & \text{si } |x| < \pi/2. \end{cases}$$

124. (Fourier només amb sinus) Trobeu la sèrie de Fourier de la ona quadrada donada per

$$f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

On convergeix aquesta sèrie quan $x = 7\pi/2$? I quan $x = 401\pi$?

Cinc de cada quatre persones tenen dificultats amb les fraccions. — Steven Wright

MATLAB

Recordeu que abans de resoldre aquests problemes heu de completar el curs online MATLAB Onramp, on aprendreu:

- Les operacions bàsiques suma +, resta -, producte *, quocient / i potència ^;
- Les funcions elementals `abs`, `sin`, `cos`, `tan`, `exp`, `log` i `sqrt`;
- A treballar amb escalars, vectors fila, vectors columna i matrius;
- Les operacions vectoritzades `.*`, `./` i `.^`;
- Les comandes `a:b` o `a:h:b` per crear vectors amb seqüències aritmètiques;
- Les comandes `clear`, `linspace`, `plot`, `hold on`, `hold off`, `min`, `max`, `zeros` i `ones`;
- Els operadors relacionals `<`, `<=`, `>`, `>=`, `==` i `~=`;
- Els operadors lògics `&`, `|` i `~`;
- Els condicionals `if...else...end`;
- Els bucles `for...end`

i més coses.

- 125.** (Guanyem o perdem?) Invertim 1M euros en un fons d'inversió que puja un 10% anualment durant els primer cinc anys i baixa un 40% el sisè any. Després retirem el diners del fons. Hem perdut o guanyat diners? Quina quantitat?

Solució: Hem perdut 33694 euros.

```
>> c0 = 1000000;           %Capital inicial
>> cf = (1 + 0.1)^5*(1 - 0.4)*c0; %Capital final
>> cf - c0
```

- 126.** (Suma finita) Calculeu la suma $S = \sum_{n=1}^{100} \frac{\cos n}{n^3}$.

Solució: La suma és $S \approx 0.448572947508520$.

```
>> format long           %Última vegada que escribim aquesta instrucció
>> n = 1:100;
>> x = cos(n)./n.^3; %Els punts vectoritzen el quocient i la potència
>> sum(x)
```

Advertència: És un error greu oblidar els punts a la tercera línia; és a dir, escriure `x=cos(n)/n^3`;

- 127.** (Productes finits) Calculeu els semifactorials

$$40!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 36 \cdot 38 \cdot 40, \quad 41!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 37 \cdot 39 \cdot 41.$$

Solució: Els semifactorials són $40!! \approx 2.551082656125828 \times 10^{24}$ i $41!! \approx 1.311307045768799 \times 10^{25}$.

```
>> n = 2:2:40;
>> prod(n)
>> n = 1:2:41;
>> prod(n)
```

128. (Successions recurrents, 1) Calculeu el terme x_{30} de la successió recurrent

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1 - x_n^2/2, \quad \forall n \geq 1.$$

Solució: El terme és $x_{30} \approx 0.732095372376809$.

- Primera forma:

```
>> x = zeros(1,30);
>> for n = 1:29 x(n+1) = 1 - x(n)^2/2; end
>> x(30)
```

- Segona forma:

```
>> x = zeros(1,30);
>> for n = 2:30 x(n) = 1 - x(n-1)^2/2; end
>> x(30)
```

129. (Successions recurrents, 2) Calculeu el terme x_{30} de la successió recurrent

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = \cos(n), \quad \forall n \geq 1.$$

Solució: El terme és $x_{30} \approx -1.619223771921757$.

- Primera forma:

```
>> x = ones(1,30);
>> for n = 1:28 x(n+2) = cos(n) - x(n+1) - x(n); end
>> x(30)
```

- Segona forma:

```
>> x = ones(1,30);
>> for n = 3:30 x(n) = cos(n-2) - x(n-1) - x(n-2); end
>> x(30)
```

130. (Gràfica d'una funció, 1) Dibuixeu la gràfica de la funció

$$h(x) = x - 2/x - 3 \log x,$$

en la finestra $(x, y) \in [0, 12] \times [-6, 4]$.

Solució:

```
>> h = @(x) x - 2./x - 3*log(x); %El punt vectoritza el quocient
>> x = linspace(0, 12, 300);
>> y = h(x);
>> plot(x,y)
>> axis([0 12 -6 4]);
>> xlabel('x')
>> ylabel('y=h(x)')
>> title('h(x) = x- 2/x - 3*log(x)');
```

Advertència: La instrucció $y = h(x)$ requereix que la funció h estigui vectoritzada.

131. (Més gràfiques de funcions) Dibuixeu totes les gràfiques de l'última pàgina d'aquest document a les mateixes finestres que hi apareixen.

132. (Zeros de funcions, 1) Localitzeu i aproximeu l'únic zero de la funció

$$f(x) = x^3 - \cos x - 2.$$

Comproveu que el valor obtingut x_0 compleix que $|f(x_0)| < 10^{-15}$.

Solució: Com $f(0) = -3 < 0$ y $f(2) = 6 - \cos 2 > 0$, sabem que $f(x)$ té al menys un zero $x_0 \in [0, 2]$. De fet, dibuixant la gràfica veiem que el zero està dins de l'interval $[1, 1.5]$. Obtenim l'aproximació $x_0 = 1.311594363457141$ i comprovem que $|f(x_0)| \approx 8.8 \times 10^{-16} < 10^{-15}$.

- Primera forma (amb funcions anònimes: $@(x)$):

```
>> f = @(x) x.^3 - cos(x) - 2;      %El punt vectoritza la potència
>> [x0, f0] = fzero(f, [0, 2])
```

Advertència: La comanda **fzero** no requereix que la funció **f** estigui vectoritzada, però dibuixar la gràfica sí que ho requereix.

- Segona forma (Escrivint la funció en un fitxer-M auxiliar):

```
>> [x0, f0] = fzero(@Mifuncio, [0, 2])
```

El fitxer **Mifuncio.m** que conté la funció $f(x)$ és:

```
function y = Mifuncio(x)
y = x.^3 - cos(x) - 2;
```

Advertència: El nom del fitxer-M i el nom de la funció han de coincidir.

133. (Zeros de funcions, 2) Localitzeu i aproximeu l'únic zero de la funció

$$f(x) = x - \cos(x^2).$$

Comproveu que la vostra aproximació x_0 compleix que $|f(x_0)| < 10^{-15}$.

Solució: Com $f(0) = -1 < 0$ i $f(2) = 2 - \cos 4 > 0$, sabem que el zero està dins de l'interval $[0, 2]$. De fet, dibuixant la gràfica veiem que el zero està dins de l'interval $[0, 1]$. Obtenim l'aproximació $x_0 = 0.801070765209218$ i comprovem que $f(x_0) = 0$ amb la precisió de la màquina: $\epsilon \approx 2.22 \times 10^{-16}$.

```
>> f = @(x) x - cos(x.^2);          %El punt vectoritza la potència
>> [x0, f0] = fzero(f, [0, 2])
```

134. (Zeros de funcions, 3) Localitzeu i aproximeu l'únic zero de la funció

$$f(x) = 1 + x(1 + 2x^2)e^x.$$

Comproveu que la vostra aproximació x_0 compleix que $|f(x_0)| < 10^{-15}$.

Solució: Com $f(0) = 1 > 0$ i $f(-1) = 1 - 3e^{-1} < 0$, sabem que $f(x)$ té, al menys, un zero $x_0 \in [-1, 0]$. De fet, dibuixant la gràfica veiem que el zero està dins de l'interval $[-1, -0.8]$. Obtenim l'aproximació $x_0 = -0.928847970039615$ i comprovem que $|f(x_0)| \approx 1.11 \times 10^{-16} < 10^{-15}$.

```
>> f = @(x) 1 + x.*(1+2*x.^2).*exp(x); %Els punts vectoritzen les operacions
>> [x0, f0] = fzero(f, [-1, 0])
```

135. (Zeros de funcions, 4) Aproximeu l'única solució x_* de l'equació

$$e^{-x} \cos x + 1 = 0$$

que està continguda a l'interval $[-\pi, 0]$. Comproveu que la vostra aproximació x_0 té, al menys, set xifres decimals correctes. És a dir, comproveu que $|x_* - x_0| < 10^{-7}$.

Solució: Obtenim l'aproximació $x_0 = -1.746139530408013$ i comprovem que si $\epsilon = 10^{-7}$ llavors $f(x_0 - \epsilon)$ i $f(x_0 + \epsilon)$ tenen signe diferent. Per tant, la solució exacta x_* compleix que $|x_* - x_0| < \epsilon = 10^{-7}$.

```
>> f = @(x) 1 + exp(-x).*cos(x); %El punt vectoriza el producte
>> [x0, f0] = fzero(f, [-pi, 0]);
>> epsilon = 1.e-4;
>> f(x0 - epsilon)*f(x0 + epsilon)
```

136. (Zeros de funcions, 5) Compteu visualment el número de zeros que té la funció

$$f(x) = \cos x + \sin(x/\sqrt{2})$$

a l'interval $[-10\pi, 10\pi]$.

Solució: Té 20 zeros. Un cop hem dibuixat la gràfica, ampliïm una part del dibuix per veure millor els zeros.

```
>> f = @(x) cos(x) + sin(x/sqrt(2));
>> x = linspace(-10*pi, 10*pi, 1000);
>> y = f(x);
>> plot(x, y, '-b', 'LineWidth', 3)
>> hold on
>> plot([-10*pi 10*pi], [0 0], '-k', 'LineWidth', 3)
>> hold off
```

137. (Extrems, 1) Compteu visualment quants màxims i mínims té la funció

$$f(x) = \sin(\sin(\sin(x) + 1) + 1)$$

a l'interval compacte $[-\pi, \pi]$. Aproximeu el valor mínim absolut que pren la funció $f(x)$ a l'interval $[-\pi, \pi]$ i el punt on pren aquest valor.

Solució: La funció $f(x)$ té tres màxims relatius i tres mínims relatius a l'interval $[-\pi, \pi]$. El mínim absolut és $x_0 \approx -1.570796467380063$ i el seu valor mínim absolut és $f_0 = f(x_0) \approx 0.841470984807902$.

- Primera forma (amb funcions anònimes: $\text{@}(x)$):

– Pas 1: Gràfica.

```
>> f = @(x) sin(sin(sin(x) + 1) + 1);
>> x = linspace(-pi, pi, 200);
>> y = f(x);
>> plot(x, y)
```

Veïem que hi ha tres màxims locals i tres mínims locals a l'interval $(-\pi, \pi)$. També veïem que el mínim absolut es troba a un punt $x_0 \in (-2, -1)$ i que l'interval $(-2, -1)$ no conté cap altre mínim relatiu.

– Paso 2: Punt x_0 i valor f_0 .

```
>> [x0, f0] = fminbnd(f, -2, -1)
```

Advertència: Si escribim $[x0, f0] = \text{fminbnd}(f, -\pi, \pi)$ s'obté un altre mínim relatiu.

- Segona forma (escrivint la funció en un fitxer-M auxiliar):

```
>> x = linspace(-pi, pi, 200);
>> y = Sinsinsin(x);
>> plot(x, y)
>> [x0, f0] = fminbnd(@Sinsinsin, -2, -1)
```

El fitxer `Sinsinsin.m` que conté la funció $f(x)$ és:

```
function y = Sinsinsin(x)
y = sin(sin(sin(x) + 1) + 1);
```

- 138.** (Extrems, 2) Localitzeu i aproximeu tots els extrems relatius i els corresponents valors extrems del polinomi cúbic

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

a l'interval compacte $[-1, 2]$.

Solució: El polinomi té un únic mínim relatiu m i un únic màxim relatiu M a l'interval obert $(a, b) = (-1, 2)$. Concretament, $m = 1$ i $M = 1/3$. A més, $p(m) = 1$ i $p(M) \approx 1.1481481481481$. Per calcular M , fem servir que M és un màxim relatiu de $p(x)$ si i només si M és un mínim relatiu de $-p(x)$. El valor mínim/màxim absolut s'assoleix a l'extrem esquerre/dret, ja que $p(a) = -3$ i $p(b) = 3$.

- Primera forma (amb funcions anònimes: $@(x)$):

```
>> p = @(x) x.^3 - 2*x.^2 + x + 1; %Els punts vectoritzen les potències
>> x = linspace(-1, 2, 300);
>> y = p(x);
>> plot(x,y)
>> m = fminbnd(p, -1, 2)
>> M = fminbnd(@(x) -p(x), -1, 2)
>> p([-1 M m 2])
```

Advertència: La comanda `fminbnd` no requereix que la funció `p` estigui vectoritzada, però dibuixar la gràfica sí que ho requereix.

Pregunta: Per què és incorrecte escriure `[M, pM] = fminbnd(@(x) -p(x), -1, 2)?`

- Segona forma (escrivint el polinomi en un fitxer-M auxiliar):

```
>> x = linspace(-1, 2, 300);
>> y = Mipolinomi(x);
>> plot(x,y)
>> m = fminbnd(@Mipolinomi, -1, 2)
>> M = fminbnd(@(x) -Mipolinomi(x), -1, 2)
>> Mipolinomi([-1 M m 2])
```

El fitxer `Mipolinomi.m` que conté el polinomi $p(x)$ és:

```
function y = Mipolinomi(x)
y = x.^3 - 2*x.^2 + x + 1;
```

- Tercera forma (amb comandes que actuen sobre polinomis):

```
>> p = [1 -2 1 1];
>> x = linspace(-1, 2, 300);
>> y = polyval(p, x);
>> plot(x,y)
>> dp = polyder(p);
>> r = roots(dp)
>> polyval(p, [-1 r 2])
```

En avaluar `polyval(p, [-1 r 2])` viem quina component del vector `r` és el mínim y quina és el màxim.

Aclariment: Les comandes que actuen sobre polinomis no es preguntaran.

139. (Integració, 1) Aproximeu el valor de la integral pròpia

$$Q = \int_0^{\pi/3} \log(\cos(x)) \, dx.$$

Solució: La aproximació és $Q \approx -0.218391226896374$.

```
>> f = @(x) log(cos(x));
>> Q = integral(f, 0, pi/3)
```

140. (Integració, 2) Aproximeu el valor de la integral pròpia

$$Q = \int_0^{\pi/2} \sin(x^2) \exp(x^2) \, dx.$$

Solució: La aproximació és $Q \approx 3.516256524902496$.

```
>> f = @(x) sin(x.^2).*exp(x.^2); %Els punts vectoritzen les operacions
>> Q = integral(f, 0, pi/2)
```

Advertència: La comanda `integral` requereix que la funció `f` estigui vectoritzada.

141. (Integració, 3) Aproximeu el valor de la integral impròpia

$$Q = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \log^2 x \, dx.$$

Solució: La aproximació és $Q \approx 1.947522220295560$.

```
>> f = @(x) exp(-x.^2).*(log(x)).^2 %Els punts vectoritzen les operacions
>> Q = integral(f,0,Inf)
```

142. (Integració, 4) Aproximeu l'àrea A compresa entre la gràfica de

$$y = f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$$

i la seva asymptota horitzontal.

Solució: La recta $y = 1$ és l'asíptota horitzontal. A més, $f(x) < 1$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, l'àrea ve donada per la integral impròpia $A = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - f(x)) \, dx \approx 4.442882938158395$.

```
>> f = @(x) 1 - (x.^4 - 1)./(x.^4 + 1); %Els punts vectoritzen les operacions
>> A = integral(f, -Inf, Inf)
```

143. (Un problema complet amb la funció Gamma de Euler) Considereu la funció $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$y = \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx.$$

- (a) Dibuixeu la seva gràfica en la finestra $(p, y) \in [0.2, 4] \times [0, 5]$.
 (b) Aproximeu el seu mínim absolut i el corresponent valor mínim.

Solució:

- (a) La tasca no és fàcil per un tecnicisme. La comanda **integral** necessita que l'integrand **f** accepti arguments vectorials per x , però retorna un escalar per a cada avaluació de p . Per tant, la funció anònima **funGamma** no està vectoritzada. L'hem de vectoritzar amb la comanda **arrayfun**.

```
>> f = @(x,p) x.^(p-1).*exp(-x);
>> funGamma = @(p) integral(@(x) f(x, p), 0, Inf);
>> funGamma_vec = @(p) arrayfun(funGamma, p);
>> p = linspace(0.2, 4, 400);
>> y = funGamma_vec(p);
>> plot(p,x)
>> axis([0.2 4 0 5]);
```

- (b) Veiem que el mínim absolut p_0 està dins de l'interval $[1, 2]$. De fet, $p_0 \approx 1.461630845534756$ i $\Gamma(p_0) \approx 0.885603194411250$.

```
>> [p0, G0] = fminbnd(funGamma, 1, 2)
```

Aclariment: La comanda **fminbnd** no requereix que la funció **funGamma** estigui vectoritzada.

- 144.** (Límits, 1) La fórmula de Stirling afirma que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, on

$$a_n = \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n n!}.$$

Trobeu el primer número natural n tal que $|a_n - 1| < 10^{-2}$.

Solució: La resposta és $n = 9$.

```
>> a = zeros(1,15);
>> for n=1:15 a(n) = (n^n)*sqrt(2*pi*n)/(exp(n)*factorial(n)); end
>> abs(a - 1)
```

- 145.** (Límits, 2) Sabem que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$, on

$$r_n = \sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\sqrt{2}}}}$$

és una expressió que conté n arrels quadrades anidades. Trobeu el primer número natural n tal que $|r_n - 1| < 10^{-3}$.

Solució: La resposta és $n = 10$.

```
>> r = zeros(1,20);
>> r(1) = sqrt(2);
>> for n=2:20 r(n)=sqrt(r(n-1)); end
>> abs(r - 1)
```

The computer is a moron. — Peter Drucker

Estudieu les gràfiques següents:

