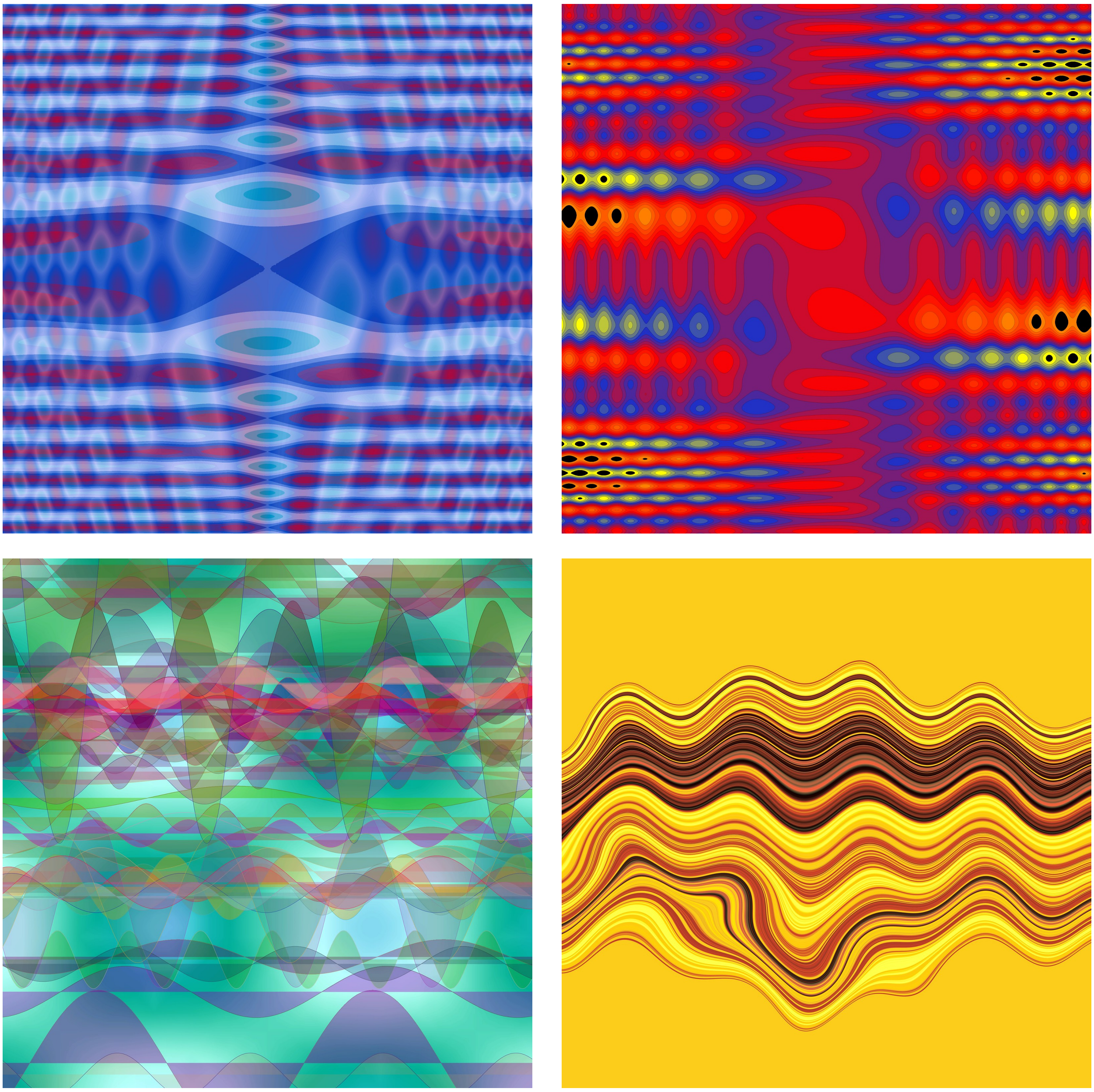
Aprende Cálculo con

(con 333 problemas resueltos en Youtube)

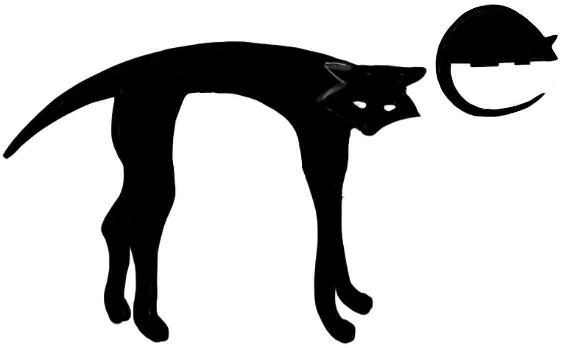
Rafael Ramírez Ros

Departamento de Matemáticas
Universidad Politécnica de Cataluña



Versión 2.0 (agosto de 2021)

https://web.mat.upc.edu/rafael.ramirez/ACcY/



¿π^{e} es mayor o menor que e^{π}?
(Respuesta en el problema 122.)

VERSIÓN 2.0 : agosto de 2021

Las cuatro imágenes de la portada han sido creadas por el usuario parameter_bond de Flickr.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departamento de Matemáticas

Rafael Ramírez Ros
Diagonal 647
08028 Barcelona (España)
mail: `rafael.ramirez@upc.edu`
web: `https://web.mat.upc.edu/rafael.ramirez/ACcY/`

Índice general

Prefacio a la segunda versión

El objetivo de este documento es facilitar, a estudiantes y profesores, la integración de recursos disponibles en Internet dentro de un curso de cálculo de una variable. Está pensado para complementar a una lista de problemas convencional, no para sustituirla. He seleccionado unos 400 vídeos de Youtube de diferentes canales y he intentado dotar a esa selección de la estructura y estilo de presentación propias de una lista clásica de problemas. La lista resultante tiene 333 problemas. He añadido unos 100 problemas a la primera versión de este documento publicada en 2020. Espero añadir más en 2022.

El documento tiene cinco secciones iniciales y seis capítulos principales.

En cada una de las secciones iniciales se presenta una serie (“playlists” en la terminología de *Youtube*) diferente de vídeos, cada serie de un autor diferente, que cubre los conceptos teóricos de una parte del curso. Recomiendo ver las tres primeras series, de estilos y duraciones muy dispares. La cuarta serie es demasiado abstracta para estudiantes de Ingeniería, pero es ideal para estudiantes de Matemáticas. La quinta serie está pensada para estudiantes que nunca han visto los números complejos.

Los seis capítulos principales son *Números*, *Funciones*, *Derivación*, *Integración*, *Sucesiones* y *Series*. Cada capítulo empieza con un breve resumen del tema y una lista de las cosas que hay que saber. Después vienen los problemas. Cada problema va precedido de un descriptor que resume su contenido y va seguido de uno (o más) enlace(s) a vídeos de *Youtube* donde se resuelve el problema con un nivel de detalle variable. También se dan enlaces a entradas de *Wikipedia* y a otros documentos que considero interesantes.

Los enlaces a vídeos van precedidos del símbolo . También se dice de qué canal proviene el vídeo y tras el símbolo se informa de la duración del vídeo. Algunos vídeos forman parte de series. Los enlaces a series van precedidos del símbolo . Los enlaces a entradas de *Wikipedia* van precedidos del símbolo W. Los enlaces a documentos de Internet (todos en formato PDF y gratuitos) van precedidos del símbolo . Los enlaces a libros completos (también en formato PDF y gratuitos) van precedidos del símbolo . Los enlaces a documentos interactivos van precedidos del símbolo .

No soy el autor de ninguno de los vídeos enlazados. La lista casi completa de canales de Youtube que he enlazado (y sus autores) está en la página VII. Mi más sincera admiración por todos ellos.

Espero que este trabajo resulte útil. Contendrá errores pese a ser la segunda versión, ya que he añadido muchos problemas nuevos. Toda comunicación de errores será bienvenida.

Rafael Ramírez Ros
`rafael.ramirez@upc.edu`
Barcelona, agosto de 2021

Me lo contaron y lo olvidé. Lo vi y lo entendí. Lo hice y lo aprendí. (Confucio)

No deberían existir las matemáticas aburridas. (Edsger Dijkstra)

Comentarios & consejos

Esfuerzo personal:

Intentad resolver los problemas antes de mirar los vídeos. De lo contrario, no conseguiréis la fluidez y la agilidad mental que solo se adquieren después de muchas horas de trabajo en solitario (a veces divertido, otras frustrante) delante de una hoja de papel en blanco. La asignatura se llama *Cálculo*, luego debéis calcular.

Dificultad:

Los problemas de esta recopilación son, en promedio, más difíciles que los problemas de una lista convencional. Se debe a que los “Youtubers” sienten una especial predilección por los problemas atractivos (y, por tanto, relativamente difíciles) que generan un gran número de visiones. Los problemas marcados con el símbolo ☣ son especialmente duros. Algunos provienen de competiciones matemáticas de renombre (Olimpiadas Matemáticas, Exámenes Putnam, etcétera).

Estructura:

Todo curso de Matemáticas tiene una estructura acumulativa. La comprensión de cada tema requiere el dominio de los conceptos y resultados de los temas anteriores. En particular, los problemas del último tema (*Series*) requieren usar todas las herramientas previas (límites, derivación, integración y sucesiones) y, por tanto, son bastante más difíciles. Estáis avisados.

Uniformidad:

Se echa un poco en falta, pues los vídeos enlazados provienen de fuentes con diferentes estilos y diferentes niveles de dificultad, detalle, claridad, rigor y calidad de producción.

Extensión:

No se espera que un estudiante resuelva todos los problemas y mire todos los vídeos. Hay demasiados. Mi objetivo es que cada lector realice una selección acorde a sus necesidades.

Escepticismo:

Hay un proverbio japonés que dice: *Si vas a creer todo lo que leas, mejor no leas*. Adaptadlo a los vídeos de esta recopilación. Algunos contienen pruebas poco rigurosas, argumentos incompletos o errores técnicos. Debéis mirarlos con una sana dosis de escepticismo.

Descriptores:

Están puestos para que resulte fácil relacionar los problemas de diferentes versiones de este documento. La numeración puede cambiar, los descriptores no.

Idioma:

Casi todo el material referenciado está en inglés, pues es el idioma de referencia de la Ciencia. Los mejores materiales, vídeos, entradas de Wikipedia, etcétera, suelen estar en inglés.

Medio:

Este material está pensado, organizado y formateado para ser consumido desde una pantalla con acceso a Internet. He usado una fuente de buen tamaño, he apurado los márgenes del documento y las figuras son grandes por deferencia a las personas que lo lean desde un móvil. El documento impreso no contiene las URLs de los vídeos, pero es posible encontrarlos si se escriben sus nombres en la casilla de búsqueda específica del canal que contiene a cada uno.

Huecos:

No he conseguido encontrar un número adecuado de problemas de algunas partes del curso. Concretamente, hay pocos problemas de clasificación de discontinuidades y sobre estudios de derivabilidad. No he seleccionado casi ningún problema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), por ser un tópico inusual en cursos de introducción al cálculo de una variable.

Infiltrados:

Diez problemas de la lista no enlazan a ningún vídeo. Los he incluido por considerarlos interesantes e instructivos. Avisadme si encontráis vídeos que los cubran.

Primer tema:

Es un poco extraño. Aborda tópicos que no suelen tratarse en cálculo: números famosos (π, e, $\sqrt{2}$ y φ), factoriales y semifactoriales, funciones “floor” y “ceil”, fracciones continuas, órdenes de magnitud, triángulo de Pascal y algo de números complejos. Se puede obviar en una primera lectura, pues es una miscelánea de problemas de “cultura general”.

Problemas importantes:

Están marcados con el símbolo STOP y son de dos tipos. Primero, problemas que sirven para obtener fluidez de cálculo y comprobar que se entienden los conceptos. Segundo, resultados y conceptos clásicos fundamentales, como la irracionalidad de π y e, la divergencia de la suma de los recíprocos de los números primos, las fórmulas de Machin, de Wallis, de Faulhaber y de Stirling, la primera derivación implícita de la historia por Newton, el método de Newton, el cálculo de raíces de polinomios por Newton, el cálculo de límites por L'Hôpital y por Taylor, el estudio de sólidos de revolución, las funciones de Gudermann, Beta y Gamma de Euler, W de Lambert, las fracciones continuas, los órdenes de magnitud, el paso a variable continua, las constantes de Euler-Mascheroni y Ramanujan, el teorema de reordenación de Riemann, el problema de Basilea y 723 de Ramanujan, las leyes de Benford y Snell, el algoritmo de Chudnovsky, la determinación de intervalos de convergencia, el sueño del sofomoro, etcétera. Todos esos resultados son un reto y algunos no los presento de forma rigurosa. Abordadlos siendo conscientes que no se espera que os resulten sencillos.

Computación:

Los problemas marcados con el símbolo 🖩 requieren usar calculadora u ordenador. La computación es un arma potentísima que todo estudiante debe incorporar a su arsenal. El futuro es computacional. Yo uso el sistema algebraico computacional GP/PARI que permite operar con números que tienen una cantidad arbitrario de cifras. Es un software libre y gratuito. Se puede instalar el casi cualquier Sistema Operativo. Algunos de los resultados aquí mostrados no se pueden obtener sin un software especializado como ése. Los dibujos de este documento han sido creados usando el sistema de computación numérica MATLAB. Es un software comercial, pero la UPC dispone de una licencia de campus que permite instalarlo en los dispositivos de todos sus estudiantes y profesores.

Bombas:

He incluido los problemas marcados con el símbolo 💣 por el asombro que provocan más que por su encaje en el programa. Chocando con π, sumas de raíces cúbicas de números "conjugados", un reloj confuso, algunas aplicaciones famosas del análisis dimensional (por ejemplo, determinar el radio de la onda de choque de una bomba atómica o de un agujero negro), la solución de Paul Dirac, dos derivadas confusas, comparando potencias, particiones con partes distintas, el efecto de la relatividad en satélites GPS, el polinomio de Wilkinson, el cuerno de Gabriel, la máquina quitanieves, los porcentajes de acierto en baloncesto, todas las demostraciones visuales, el conjunto de Cantor, el copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpiński, apilando bloques, la hormiga paciente, la fila de coches, una sucesión de rectángulos, una fracción mágica, una relación entre π y 5, dos formas de calcular una suma, ¿qué función puede ser? y un sorprendente problema de probabilidad son ejemplos de esos problemas. Disfrutadlos sin presión.

Paradojas:

Los problemas marcados con el símbolo ❗ son "demostraciones" de hechos absurdos (del tipo $1 = 0$) para remarcar ciertas ideas erróneas que algunos estudiantes tienen sobre el concepto de límite y cómo trabajar con el infinito. Intentad descubrir los errores que contienen.

Problemas abstractos:

Los problemas marcados con el símbolo $\forall\exists$ que hay al final de cada uno de los capítulos principales tienen una alta carga de abstracción y presentan conceptos (como, por ejemplo, la continuidad uniforme) que no suelen formar parte de los cursos de introducción al cálculo de una variable para Ingenieros. Son de carácter opcional en una primera lectura. De hecho, están pensados para aquellos estudiantes de Ingeniería que se pregunten qué #%!& se hace en una carrera de Matemáticas.

Índices:

El documento acaba con dos índices. En primer lugar, un índice clásico, para facilitar la búsqueda de problemas (y, por tanto, vídeos) donde se usen determinadas conceptos, resultados o técnicas. En segundo lugar, el índice de personas, donde los nombres de Leonhard Euler e Isaac Newton no aparecen todas las veces que deberían para no aburrir por repetición.

Canales de Youtube

He ordenado estos canales por el número de subscriptores, pero esa métrica no es la más importante. Los aspectos a tener en cuenta para que un autor guste son su estilo (¿se ve su cara?, ¿explica bien?, ¿dónde escribe?, ¿motiva sus ideas?, ¿tiene una voz agradable?), sus contenidos (¿teoría o problemas?, ¿fáciles o difíciles?, ¿importantes o banales?, ¿divertidos o aburridos?) y el rigor de sus argumentos (¿demuestra sus afirmaciones?, ¿domina el tema?).

Os animo a que busquéis otros canales y me contéis vuestros descubrimientos.

Khan Academy, canal de Salman Khan con *6.78M* subscriptores[1]
Es el canal de educación más popular de todo Youtube. Es una fuente masiva de clases para todas las edades y de casi todas las materias. Tiene una serie de 199 vídeos Calculus que cubre nuestro programa de cálculo en una variable en los primeros 110 vídeos. Lo enlazo pocas veces.

3Blue1Brown, canal de Grant Sanderson con *3.89M* subscriptores
Animaciones de una calidad pasmosa creadas en Python. Grant cuenta que tarda unas tres semanas en preparar cada vídeo. Debe dormir poco. Su serie de doce vídeos *The essence of Calculus* es altamente recomendable. Más adelante, resumo los contenidos de cada vídeo.

Numberphile, canal de Brady Haran con *3.82M* subscriptores
En todos sus vídeos aparecen invitados con una gran pasión por las matemáticas, incluyendo a ganadores de medallas Field y otros matemáticos famosos explicando sus trabajos. Su marca de fábrica consiste en escribir con rotuladores sobre un papel marrón grueso. No es la tecnología más avanzada, pero cumple sobradamente el objetivo.

MIT OpenCourseWare, canal de muchos autores con *3.2M* subscriptores
El MIT es el centro de educación superior más prestigioso en áreas tecnológicas. En este canal hay tanto clases magistrales de teoría como clases de problemas más cortas. Me gusta la serie de 18 vídeos Highlights of Calculus del profesor Gilbert Strang. Más adelante, resumo su contenido.

Por cierto, Edwin Herman y Gilbert Strang tienen una colección de libros de cálculo con licencia abierta (gratuitos) editados por OpenStax que podéis encontrar aquí: volume 1, volume 2 y volume 3. Son casi 3000 páginas con multitud de ejemplos, figuras y problemas con soluciones.

MindYourDecisions, canal de Press Talwakar con *2.43M* subscriptores
Uno de los canales con más vídeos incluidos en esta recopilación. Material tremendamente claro. Quizá en su elección de problemas priman las ideas felices. Press ha escrito varios libros que recopilan los problemas de sus vídeos.

Derivando, canal de Eduardo Sáenz de Cabezón con *1.2M* subscriptores
El único canal en español y uno de los más divertidos. Eduardo es un comunicador que desprende entusiasmo. Es un canal divulgativo. Explica muchos qués, pero no tantos porqués.

[1] Datos recopilados el 30 de agosto de 2021

Stand-up Maths, canal de Matt Parker con *901K* subscriptores
Divulgación matemática que quiere divertir y entusiasmar. Matt ha escrito varios libros en esa dirección, como, por ejemplo, *Humble Pi: A Comedy of Maths Errors*, que recopila varias pifias matemáticas hilarantes y algunas dramáticas.

Zach Star, canal de Zach Star con *884K* subscriptores
Contenido divulgativo pensado para convencer de la utilidad y aplicabilidad de las matemáticas al "mundo real". Zach presenta paradojas, puzzles, teorías y guías.

blackpenredpen, canal de Steve Chow con *754K* subscriptores
El autor resuelve problemas matemáticos chocantes en una pequeñísima pizarra Vileda con rotuladores negros, rojos y azules. Son vídeos que se parecen bastante a una clase normal. El nivel es alto y Steve es bastante friki. Por cierto, Steve ha creado varias listas de problemas (con 100 problemas cada una) que después resuelve en vídeos de toma única (suelen durar unas seis horas cada uno) y publica en su canal. Las listas de problemas están aquí. En este curso nos interesan tres listas. La primera con 100 derivadas, la segunda con 100 primitivas y la tercera con 100 series. Tiene otra con 100 problemas de Cálculo 2 (cálculo en varias variables, cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales) que puede ser útil en cursos más avanzados.

Michel van Biezen, canal de Michel van Biezen con *744K* subscriptores
Es un canal con más de 4000 vídeos relativamente cortos sobre cuestiones de Física, Matemáticas, Química, etcétera. Michel usa una pizarra Vileda y lleva pajarita. Sus contenidos son, probablemente, los que más se parecen a una clase magistral. Se centra en cuestiones clásicas, evitando problemas extravagantes extraídos de competiciones matemáticas.

Mathologer, canal de Burkard Polster y Marty Ross con *717K* subscriptores
Burkard explica problemas de un nivel de dificultad superior al nivel de un estudiante de primero, pero lo vive como nadie y sus cálculos en "autopilot" molan mucho.

Welch Labs, canal de Stephen Welch con *342K* subscriptores
Un canal que proporciona recursos de matemáticas, ciencia y "machine learning". Su serie de 13 vídeos *Imaginary numbers are real* es una magnífica introducción a los complejos.

Michael Penn, canal de Michael Penn con *175K* subscriptores
Es uno de los canales con menos subscriptores, pero es el que más me gusta. Lo enlazo en, aproximadamente, la tercera parte de los problemas. El autor resuelve los problemas planteados en una pizarra con tiza y borrador. Son los vídeos que más se parecen a una clase normal. El nivel es alto y Michael va rápido, pero es muy bueno explicando. Le gustan los problemas de competiciones matemáticas (Olimpiadas nacionales e internacionales, Putnam, etcétera), luego no son fáciles. Le obsesiona el orden y la claridad, algo bueno en un profesor de matemáticas. Es un tipo serio, su carácter está en el extremo opuesto a los de Eduardo, Bukard o Matt.

Think Twice, canal de ??? con *101K* subscriptores
Animaciones cortas sin voz ni cara. No sé quién es el autor. Visualmente muy atractivo. Da gusto ver esos vídeos.

SyberMath, canal de ??? con *37.4K* subscriptores
Un autor desconocido explica con acento ruso (o turco) problemas de cierto nivel escribiendo en una tablet. Son vídeos cortos, autocontenidos, que van al grano. Prima la elección de problemas con alguna idea feliz.

Programa

Tema 1. Números

- Números: π, e, $\sqrt{2}$, primos, φ, Fibonacci, factoriales, combinatorios, Catalan, etc.
- Conceptos: valor absoluto, funciones *floor* y *ceil*, fracciones continuas, cardinalidad, etc.
- Resultados: teorema del binomio, desigualdades importantes, etc.

Tema 2. Funciones

- Funciones elementales: potencias, exponencial, logaritmo, trigonométricas e hiperbólicas
- Cálculo de límites: cancelación, racionalización y cambios de variables.
- Continuidad
- Teoremas: Bolzano, valor intermedio y Weierstrass

Tema 3. Derivación

- Derivadas
- Gráficas
- Teoremas: Rolle, valor medio y Taylor
- Cálculo de límites: L'Hôpital y Taylor
- Optimización

Tema 4. Integración

- Cálculo de primitivas
- Integrales definidas
- Teoremas: valor medio para integrales, Barrow, fundamental de cálculo y Leibniz
- Integrales impropias
- Aplicaciones de las integrales

Tema 5. Sucesiones

- Inducción
- Sucesiones

Tema 6. Series

- Series numéricas
- Series de potencies
- Series de Taylor

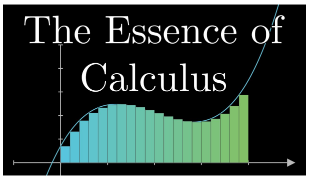
The Essence of Calculus (por Grant Sanderson)

1) Math has the tendency to reward you when you respect its symmetry
2) This is math, everything is made up
(Grant Sanderson)

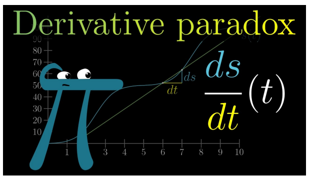
Recomiendo a todo estudiante de cálculo que vea esta serie de doce vídeos (unas tres horas y media de duración total) impecablemente producida por Grant Sanderson. En la serie se explican todas las grandes ideas detrás de los principales resultados del cálculo de una variable continua. (Es decir, no se aborda el estudio de sucesiones y series, que son conceptos del cálculo de una variable discreta.) Entender esas ideas es un paso previo a ponerse a calcular alocadamente derivadas y primitivas, pues ese conocimiento enriquecerá vuestra habilidad para resolver problemas.

Grant usa un paquete de Python diseñado por el mismo para realizar estas fabulosas animaciones. Nunca se ve su cara. Tiene otra serie de quince vídeos, titulada Essence of Linear Algebra, que os puede resultar útil para estudiar esa asignatura. Su canal 3Blue1Brown contiene abundante material de mayor nivel matemático.

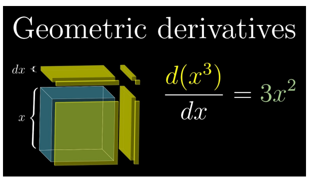
A continuación, resumo que hace Grant en cada vídeo de la serie The Essence of Calculus.



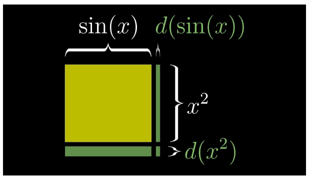
Introduction (⏲ 17:04)
Introduce las sumas de Riemann (suma de muchas áreas pequeñas) mediante la deducción de la fórmula del área del círculo. Resalta la mejora de la aproximación al disminuir la base de los rectángulos. Afirma que muchos problemas duros se reducen a sumar muchos números pequeños y, en particular, a calcular áreas debajo de una gráfica. Enfatiza la utilidad de las funciones integrales. Avanza la idea detrás del teorema fundamental del cálculo.



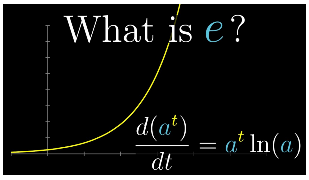
The paradox of the derivative (⏲ 17:56)
Advierte sobre la paradoja de la expresión “cambio instantáneo”, pues todo cambio se mide sobre un lapso de tiempo no nulo. Define la derivada como un límite y ve que eso genera simplificaciones e implica que la derivada coincide con la pendiente de la recta tangente. Explica que sentido tienen los símbolos $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}f$. Usa la notación de Leibniz $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, en detrimento de la notación de Lagrange $f'(x)$.



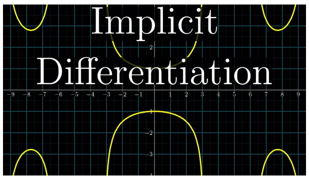
Derivative formulas through geometry (⏲ 18:42)
Deduce las fórmulas de algunas derivadas mediante razonamientos geométricos. Por ejemplo, deduce $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$ estudiando el área de un cuadrado, $\mathrm{d}(x^3) = 3x^2\,\mathrm{d}x$ estudiando el volumen de un cubo, $\mathrm{d}(x^{-1}) = -x^{-2}\,\mathrm{d}x$ estudiando rectángulos de área constante igual a uno y $\mathrm{d}(\sin\theta) = (\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ mediante trigonometría clásica. El principio básico que trasmite en este vídeo es que antes de derivar por primera vez a una función, hay que fijarse en su significado intrínseco.



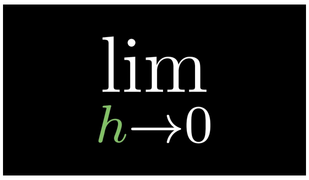
Visualizing the chain rule and product rule (⏲ 16:51)
Obtiene las relaciones entre la derivada y las operaciones funcionales más importantes: suma, producto y composición. En cada caso usa un razonamiento geométrico diferente. Deduce la derivada de la suma estudiando las gráficas de las dos funciones involucradas, la derivada del producto estudiando el área de un rectángulo y la regla de la cadena $\frac{\mathrm{d}(g \circ h)}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}(h(x))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)$ usando tres escalas diferentes: una para x, otra para $h = h(x)$ y la última para $g = g(h) = g(h(x))$.



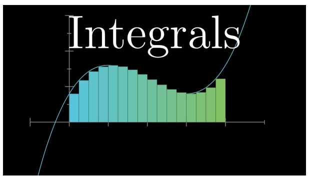
What's so special about Euler's number e? (⏲ 13:50)
Advierte que no se puede derivar respecto una variable discreta. Lamenta que no es capaz de obtener las derivadas de las funciones exponenciales con razonamientos geométricos, luego usa razonamientos algebraicos y numéricos. Deduce que $\mathrm{d}(a^x) = \alpha a^x \,\mathrm{d}x$, donde $\alpha = \alpha(a)$ es una constante misteriosa que solo depende de la base a. Define el número e como la única base para la cual α es uno, luego $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$. Deduce que $\alpha(a)$ es el logaritmo neperiano de a. [*Advertencia:* Grant usa la notación $\ln a$, en vez de $\log a$.] Finalmente, nos da un principio general. Es recomendable expresar $a^x = \mathrm{e}^{x \log a}$, para así trabajar siempre en base e.



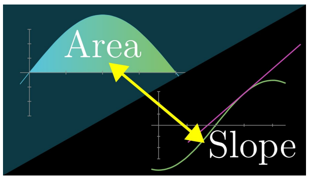
Implicit differentiation, what's going on here? (⏲ 15:33)
Define el concepto de curva definida mediante una ecuación implícita en el plano (x, y). Plantea el reto de calcular rectas tangentes a curvas implícitas. Explica el formalismo del cálculo de derivadas implícitas. Justifica ese formalismo mediante razonamientos geométricos, que requieren tratar con funciones de dos variables. Finalmente, deduce la derivada del logaritmo natural mediante derivación implícita.



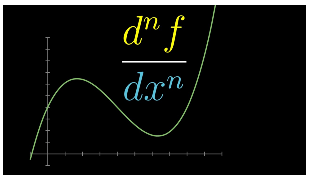
Limits, L'Hôpital's rule, and epsilon delta definitions (⏲ 18:26)
Define formalmente la derivada como: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \text{lím}_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Deja claro que no le gusta el término "infinitamente pequeño". Motiva y establece la definición de límite usando el formalismo ϵ–δ. Ilustra la definición en dos casos: cerca de una discontinuidad evitable y cerca de una discontinuidad de salto. [Consejo: Intentad entender esta parte.] Presenta la regla de l'Hôpital $\text{lím}_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ de forma muy transparente.



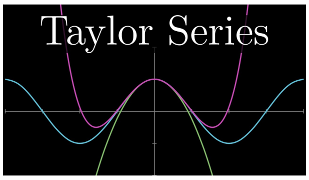
Integration and the fundamental theorem of calculus (⏲ 20:45)
Aborda el desafío de determinar la distancia recorrida $s(T)$ desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante final $t = T$ a partir del conocimiento de la velocidad $v(t)$ en todo el intervalo $[0, T]$. Justifica que $s(T)$ es el área debajo de la gráfica de la velocidad e introduce la notación $\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$. Resalta que $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}T} = v(T)$. Introduce el concepto de primitiva (antiderivada en su terminología). Explica cómo determinar la constante de integración a partir de la condición inicial $s(0) = 0$. Enuncia la regla de Barrow $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, donde F es una primitiva de f. Acaba con una disgresión sobre velocidades y áreas negativas.



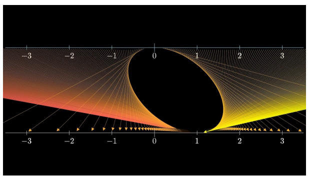
What does area have to do with slope? (⏲ 12:38)
Plantea el problema de calcular el promedio de una cantidad continua $f(x)$ a lo largo de un intervalo $[a, b]$. Argumenta que la respuesta es el cociente del área debajo de la gráfica de $f(x)$ entre la longitud del intervalo $[a, b]$. Interpreta ese cociente como la pendiente de la secante a una primitiva de f en los puntos $x = a$ y $x = b$. Es decir, obtiene otra vez la regla de Barrow $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Finalmente, afirma, como un principio general, que para generalizar un concepto de variable discreta al contexto de la variable continua, las sumas se transforman en integrales: $\sum \leftrightarrow \int$.



Higher order derivatives (⏲ 5:38)
Introduce derivadas de orden superior y la notación de Leibniz: $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. (En cambio, nosotros usamos la notación de Lagrange: $f^{(n)}(x)$.) Interpreta la segunda derivada como una cantidad ligada al crecimiento de la primera derivada. También interpreta la segunda derivada como una aceleración y la tercera derivada como sobreaceleración (en inglés, *jerk*) en problemas de movimiento.



Taylor series (⏲ 22:19)
Motiva el uso de los desarrollos de Taylor como una forma sencilla y metódica de aproximar funciones complicadas (a saber, no polinomiales) mediante funciones más sencillas (a saber, polinomios). Calcula los polinomios de grados dos, tres y cuatro que mejor aproximan a la función coseno cerca del origen. Advierte de la aparición de ciertos factoriales en el proceso. Se maravilla de como la información de una función en un solo punto sirve para determinar el comportamiento de la función en un entorno del punto. Introduce la fórmula para calcular el polinomio de Taylor de grado n de una función $f(x)$ es un punto $x = a$. Aplica la fórmula a la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ en el origen. Da una interpretación geométrica del término $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) = \frac{1}{2}f''(a)$ como el área de un pequeñísimo triángulo que aparece al estimar la diferencia $F(x) - F(a)$ cuando $x \approx a$ y F es una primitiva de f, ver problema 226. Levanta la liebre del problema de sumar los infinitos términos de la serie de Taylor y acaba mencionando el radio de convergencia.



What they won't teach you in calculus (⏲ 16:22)
Este vídeo es un remate final, de carácter opcional. Presenta una herramienta geométrica para interpretar y visualizar funciones: las transformaciones. Interpreta la derivada como el factor de escala que aplica localmente la transformación (es decir, la función). Acaba con una disgresión sobre el número áureo y su fracción continua que sobrepasa el nivel del resto de la serie.

Highlights of Calculus (por Gilbert Strang)

What is essential in calculus and what is kind of routine and practice?
(Gilbert Strang)

Gilbert Strang es un matemático estadounidense que impartía clases en el MIT. Ahora está jubilado. Varias de esas clases son universalmente accesibles a través de la iniciativa MIT OpenCourseWare. Tiene una serie (creo que inacabada) de 18 vídeos sobre los aspectos esenciales del cálculo. Al igual que la serie de Grant Sanderson, se centra en la variable continua: límites, continuidad, derivación e integración. Son clases de pizarra, grabadas especialmente para la ocasión.

Esta serie es más larga que la de Grant Sanderson, pues Gilbert es un firme creyente de los principios pedagógicos “repite lo que has explicado hasta que se entienda” y “no expliques con prisas”. Son unas diez horas de vídeos fáciles de seguir. Debido a eso, puede ser una serie útil para aquellos estudiantes que llegan a la Universidad sin una buena base de cálculo y tienen dificultades para seguir unas clases donde los profesores presuponen que los estudiantes saben bastantes cosas.

(Gilbert Strang tiene otra serie de 35 vídeos donde explica un curso entero de álgebra lineal.)

A continuación, resumo que hace Gilbert Strang en cada vídeo de la serie Highlights of Calculus.

Introduction to Highlights of Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 4:56)

Cuenta que su objetivo en esta serie es presentar solo los aspectos más esenciales del cálculo. Quiere mantener un estilo directo, conciso y alejado de tecnicismos.

Big Picture of Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 37:46)

Enfatiza que el gran reto del cálculo consiste en relacionar los valores que toma una función $y = f(x)$ con los valores que toma su pendiente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$. Hablaremos de cálculo diferencial cuando pasamos de la primera a la segunda y de cálculo integral cuando hagamos el proceso inverso. Lista ejemplos de pares de funciones así relacionadas: distancia y velocidad, altura y pendiente, etcétera. Avanza que $f(x)$ da el área debajo de la gráfica de $f'(x)$. Muestra el caso del movimiento uniformemente acelerado.

Big Picture: Derivatives del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 30:04)

Lista las primeras derivadas: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$. Distingue entre pendiente promedio: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y pendiente instántanea: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Define la segunda pendiente como el límite de la primera cuando Δx tiende a cero. Prueba, calculando el límite, que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$. Compara las gráficas del seno y su derivada.

Max and Min and Second Derivative del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 38:30)

Introduce la segunda derivada $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, vista como aceleración en problemas de mecánica. Interpreta la segunda derivada como la curvatura de la gráfica. Define concavidad y convexidad. Explica que la primera derivada se anula en los extremos (máximos y mínimos), mientras que la segunda derivada se anula en los puntos de inflexión. Dibuja la gráfica de la cúbica $f(x) = x^3 - x^2$, ver el problema 111. Plantea y resuelve un problema de optimización, ver el problema 164.

[The Exponential Function](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 38:53)

Introduce y lista las principales propiedades de la función exponencial. Define la exponencial como la única función que cumple $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$ y, además, $y(0) = 1$. Deduce que entonces

$$\mathrm{e}^x = y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

aunque evita hablar en términos precisos de la convergencia. Comprueba que $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$. Introduce el número $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \sum_{n \geq 0} 1/n! \approx 2.71828$. Dibuja la gráfica de $y = \mathrm{e}^x$. Finalmente, afirma que

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

[Derivative of $\sin x$ and $\cos x$](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 34:38)

Calcula, usando varias fórmulas de trigonometría clásica, las derivadas del seno y coseno. Primero, obtiene los importantes límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Después, usa esos límites para probar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x,$$

ver el problema 93.

[Product Rule and Quotient Rule](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 36:14)

Prueba las fórmula de derivada del producto y del cociente. Deduce la fórmula $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ para varios valores del exponente: $n \in \mathbb{Z}$ y $n = 1/2$.

[Chains f(g(x)) and the Chain Rule](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 35:20)

Enuncia la regla de la cadena y la aplica a ejemplos de dificultad creciente. Termina estudiando la gráfica de la función $y = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, que recibe el nombre de curva (o campana) de Gauss.

[Limits and Continuous Functions](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 36:26)

Habla difusamente del concepto de límite. Presenta la lista de indeterminaciones que pueden aparecer al calcular límites:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad +\infty - \infty, \qquad 1^\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0.$$

(Gilbert olvida la última.) Explica que la raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$ es continua, pero no derivable, en $x = 0$. Después define el concepto de continuidad y da la definición formal en términos de ϵ y δ. Finalmente, argumenta que $y = \sin(1/x)$ no es continua en $x = 0$.

[Inverse Functions and the Logarithm](#) del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 34:10)

Define la función inversa y advierte que la función original debe ser inyectiva para poder invertirla. Explica la relación entre las gráficas de una función y su inversa. Resuelva un par de ejemplos simples, ver problema 49. Define el logaritmo natural $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $x = \log y$, como la función inversa de la función exponencial $y = \mathrm{e}^x$ y prueba las dos propiedades fundamentales del logaritmo:

$$\log(y_1 \cdot y_2) = \log y_1 + \log y_2, \qquad \log(y^n) = n \log y.$$

Resalta que no importa qué nombre le demos al argumento del logaritmo. En particular, usualmente escribiremos $y = \log x$, pues queremos que el argumento de la función sea la abcisa y su valor sea la ordenada. [*Advertencia:* Gilbert, como Grant, usa la notación $\ln x$, en vez de $\log x$.]

Derivatives of $\log y$ and $\arcsin y$ del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 25:50)
Explica cómo se calcula la derivada de la función inversa. Calcula las derivada del logaritmo natural y del arco seno aplicando ese método, ver problema 97.

Growth Rates & Log Graphs del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 32:59)
Explica los conceptos de orden de magnitud y escalas logarítmicas, ver problemas 23 y 60. Dibuja las gráficas de varias funciones importantes en las escalas lin-lin, lin-log, log-lin y log-log, ver el problema 61.

Linear Approximation/Netwon's Method del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 31:40)
Explica cómo usar la aproximación lineal $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ para evaluar funciones complicadas cerca de puntos donde tienen un valor sencillo, ver problema 128. Motiva la geometría detrás del método de Newton para calcular raíces de funciones, ver problema 131.

Power Series/Euler's Great Formula del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 30:49)
Tras calcular las series de Maclaurin de la exponencial, el seno y el coseno, comprueba la fórmula de Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$, ver problema 303. Escribe la suma de una serie geométrica y la serie de $\log(1 - x)$.

Big Picture: Integrals del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 37:21)
Motiva, de forma muy clara, el teorema fundamental del cálculo. Interpreta la función integral como el área debajo de la gráfica. Comprueba en un ejemplo concreto que ese área coincide con la primitiva de la función.

Six Functions, Six Rules, and Six Theorems del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 38:05)
Resume los aspectos fundamentales del curso. Lista las seis funciones más importantes (potencias, exponencial, seno, coseno, logaritmo y, una nueva, la función escalón), seis reglas (derivada de suma, producto, cociente, función inversa y composición y la regla de L'Hôpital) y seis teoremas (teorema fundamental de cálculo, teorema del valor intermedio, teorema de Weierstrass, teorema del valor medio, teorema de Taylor con la fórmula del residuo de Lagrange y teorema del binomio). Es una buena forma de repasar que uno ha entendido los aspectos fundamentales de esta asignatura, sucesiones y series aparte.

Differential Equations of Growth del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 34:20)
Resuelve las EDOs lineales de primer orden, homogéneas y no homogéneas, de la forma

$$y' = cy + s.$$

Expresa la solución general como la suma de una solución particular y la solución general de la EDO homogénea. Explica cómo determinar la solución asociada a una condición inicial. Finalmente, escribe, motiva y resuelve la ecuación logística.

Differential Equations of Motion del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 32:12)
Resuelve las EDOs lineales de segundo orden a coeficientes constantes de la forma

$$my'' + 2ry' + ky = 0$$

mediante el método del polinomio característico. Explica qué forma tiene la solución general en los tres posibles casos: raíces reales diferentes, raíz real doble y raíces complejas conjugadas. Presenta algunos problemas físicos que dan lugar a ese tipo de ecuaciones.

Single Variable Calculus (por David Jerison)

1) You only compute a second derivative when you are forced to.
2) Look before you L'Hôp!
(David Jerison)

David Jerison es un matemático estadounidense que imparte clases en el MIT. Concretamente, ha impartido muchas veces la teoría de la asignatura *Single Variable Calculus*, que es un curso de introducción al cálculo de una variable. Sus clases del cuatrimestre de otoño de 2007 son universalmente accesibles a través de la iniciativa MIT OpenCourseWare. Son clases de pizarra, grabadas en directo, respondiendo muchas preguntas de los estudiantes.

David explica la teoría en 39 clases de aproximadamente 50 minutos cada una, aunque falta la grabación de cuatro clases y en tres o cuatro fue sustituido por un compañero. Es un profesor excelente, tiene oficio. Va despacio, se centra en los conceptos y tiene respuestas para todas las preguntas que le hacen. Se nota que no es la primera vez que escucha esas preguntas.

La serie se puede encontrar en el siguiente enlace:
MIT 18.01 Single Variable Calculus, Fall 2007 del canal *MIT OpenCourseWare* (35 vídeos)

No comento cada vídeo de forma individual, pues son muchos. Tan solo resalto que he extraído unos 25 problemas de su curso, luego no os libraréis de ver alguno de sus vídeos. También comento que entre todas las series que os listo, donde se tratan aspectos más conceptuales que computacionales, es la que contiene más justificaciones rigurosas y la que más se parece a una clase normal. Bueno, de hecho, es una clase normal.

Finalmente, resalto la gran diferencia entre el enfoque americano (que comparten las tres series que he recomendado) y el europeo (que veréis en primera persona en vuestras clases).

El enfoque americano prima la comunicación pausada de ideas y conceptos a costa de dedicar poco tiempo a problemas computacionalmente exigentes, que se espera hagan los estudiantes por su cuenta. Por eso, si comparáis sus clases con las vuestras, probablemente pensaréis que los problemas que vosotros hacéis en clase son un poco más difíciles y se hacen un poco más rápido. La consecuencia más palpable de esta diferencia es que, a igualdad de horas de clase, un curso americano (se entiende que en una Universidad puntera, como es el MIT) cubre más temas, pero con menos profundidad.

Cada estilo tiene sus ventajas e incovenientes.

Real Analysis (por Michael Penn)

This is a good place to stop
(Michael Penn)

Michael Penn es un matemático estadounidense que imparte clases en el Randolph College situado en Lynchburg, Virginia. Empezó a subir vídeos de matemáticas a Youtube en julio de 2019 y dos años después ya tiene más de cien mil suscriptores. La calidad de producción de sus vídeos ha mejorado ostensiblemente. La calidad pedagógica se mantiene constante a gran altura.

Tiene una serie titulada *Real Analysis* de 59 vídeos donde desarrolla los resultados fundamentales de un curso de cálculo en una variable para estudiantes de Matemáticas dando demostraciones completas de la mayor parte de resultados. El nivel de abstracción es elevado, lo cual hace que solo recomiende la serie a aquellos estudiantes especialmente motivados en descubrir cómo son las clases de la carrera de Matemáticas.

Michael explica muy bien. Es claro, serio y conciso, aunque algunas veces peca de un formalismo excesivo.

La serie se puede encontrar en el siguiente enlace:

Real Analysis del canal *Michael Penn* (59 vídeos)

No comento cada vídeo de forma individual, pues son muchos. He extraído de esta serie todos los problemas abstractos marcados con el símbolo $\forall\exists$ que hay al final de cada sección.

Complex Numbers are Real (por Stephen Welch)

He thinks that, just like him, you should not only be good at math, but enjoy doing it.
(Stephen Welch)

La reacción habitual de un estudiante que oye hablar por primera vez de los números complejos y le dicen que hay un número, que se escribe i, que es la raíz de menos uno, es de total incredulidad. Los profesores, debido a la presión de cumplir con el temario, no invertimos mucho tiempo en convencer a los estudiantes escépticos de que eso tiene sentido y es útil.

Si sentís ese tipo de escepticismo y queréis disiparlo, os aconsejo que veáis la divertida serie de nueve vídeos (en realidad son trece, pero los últimos cuatro tratan conceptos más allá de nuestro objetivo actual) de Stephen Welch.

Los vídeos están hechos, en su mayor parte, manualmente, con papelitos recortados. Pero está bien pensada y ayuda a entender que los matemáticos de hace siglos también sufrieron para entender y aceptar los números complejos. De ahí el nombre.

A continuación, resumo que hace Stephen en cada vídeo de la serie.

Part 1: Introduction del canal *Welch Labs* (5:46)

Llama nuestra atención sobre el hecho de que la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales, lo cual parece estar en contradicción con un resultado llamado “teorema fundamental del álgebra”. Defiende la idea de inventar nuevos números que ayuden a solventar esta aparente contradicción, de la misma forma que ya se hizó antes al introducir los números negativos.

Part 2: A Little History del canal *Welch Labs* (5:15)

Relata las competiciones para resolver ecuaciones cúbicas entre varios matemáticos (del Ferro, Fior, Tartaglia y Cardano) del siglo XVI. Resalta que toda ecuación cúbica tiene, al menos, una raíz real (esto es una consecuencia del teorema de Bolzano, aunque él no lo menciona). Escribe la fórmula que conocían esos matemáticos para encontrar soluciones de ecuaciones cúbicas. Explica que en el caso de la ecuación cúbica $x^3 = 15x + 4$ la solución obtenida es el “número”

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

lo cual desconcertaba a los matemáticos de la época, que sabían por ensayo y error que $x = 4$ es “la única” solución. La pregunta inmediata es:

¿Qué # %!& es $\sqrt{-121}$?.

Part 3: Cardan’s Problem del canal *Welch Labs* (4:41)

Cuenta que, para solventar esa paradoja, Bombelli propone dos cosas. Primera, extender los números reales introduciendo la unidad imaginaria $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Segunda, operar con expresiones que contengan i como si nada, pero recordando que $\mathrm{i}^2 = -1$. Eso solventó la dificultad de tratar con las expresiones $2 \pm \sqrt{-121} = 2 \pm 11\mathrm{i}$, pero aún faltaba calcular sus raíces cúbicas.

Part 4: Bombelli's Solution del canal *Welch Labs* (⏲ 2:56)

Explica que cuando se impone que $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = a \pm b\mathrm{i}$, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a(a^2 - 2b^2) & = 2 \\ b(3a^2 - b^2) & = 11 \end{cases}$$

que no es fácil de resolver. Sin embargo, como "sabemos" que la solución es

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 4,$$

necesariamente $a = 2$ y $b = 1$. Comprueba que, efectivamente, $(2 \pm \mathrm{i})^3 = 2 \pm 11\mathrm{i} = 2 \pm \sqrt{-121}$, lo cual resuelve el problema. Resalta que aunque la unidad imaginaria i no aparece ni en la formulación del problema (buscar soluciones de $x^3 = 15x + 4$) ni en su solución final ($x = 4$), es esencial para resolver el problema. El propio Bombelli pensó que ese proceso era tramposo y sus ideas se abandonaron.

Part 5: Numbers are Two Dimensional del canal *Welch Labs* (⏲ 4:37)

Justifica que los números complejos se dibujen en el plano complejo $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$, donde la dirección imaginaria es perpendicular a la dirección real. Nos hace ver que multiplicar por i consiste en girar noventa grados o, como queremos ser ingenieros, $\pi/2$ radianes.

Part 6: The Complex Plane del canal *Welch Labs* (⏲ 3:37)

Explica cómo sumar y multiplicar números complejos a nivel algebraico:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i}) \times (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

Part 7: Complex Multiplication del canal *Welch Labs* (⏲ 4:25)

Motiva la interpretación geométrica del producto de números complejos. Introduce la notación polar (también llamada exponencial) $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, donde $r = |z|$ es el módulo y $\theta = \operatorname{Arg} z$ es el argumento. (Él usa otra notación, pero nosotros usaremos esta.) Explica cómo multiplicar y dividir en forma polar:

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = (r \cdot \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}, \qquad \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \left(\frac{r}{\rho}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}.$$

Part 8: Math Wizardry del canal *Welch Labs* (⏲ 4:39)

El cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo z se puede realizar de varias formas. Una de ellas consiste en factorizar polinomios. Otra, basada en la geometría, consiste en usar la fórmula

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}} \\ z = r\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}} \\ x^n = z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\varphi_k\mathrm{i}}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Part 9: Closure del canal *Welch Labs* (⏲ 5:40)

Lista los conjuntos de números $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, explicando qué problema solventa cada una de estas ampliaciones. Informa que ya se necesitarán más ampliaciones, pues los números complejos forman un conjunto cerrado bajo las operaciones de suma, resta, producto, cociente, potencias y raíces n-ésimas. No menciona, pero quizá debería, que también es un conjunto que contiene todas las raíces de todos los polinomios a coeficientes complejos. Eso es el teorema fundamental del álgebra.

Nota final: Si os ha gustado la serie, podéis echarle un vistazo al documento (gratuito, pero no de licencia abierta) *Imaginary Numbers Are Real* que contiene varios problemas y sus soluciones.

Números

What's up, Doc?
(Bugs Bunny)

¿Qué hay que saber?

Este tema se puede obviar en primera lectura. Es una miscelánea de resultados de "cultura general", más que un tema estándar en un curso de cálculo.

Trabajamos con cinco conjuntos de números:

- El conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales (que no contiene al cero);
- El conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ de los números enteros;
- El conjunto $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ de los números racionales;
- El conjunto $\mathbb{R} = \{\ldots, -4, -\pi, -2.5, -1, -1/3, 0, 1/1/13, 1, \sqrt{2}, 2.5, 4, \ldots\}$ de los números reales, que se representa como una recta continua sin agujeros; y
- El conjunto $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$ de los números complejos, que se representa como un plano, siendo a la abcisa (coordenada horizontal) y b la ordenada (coordenada vertical).

Las relaciones de inclusión entre estos conjuntos están esquematizadas en la figura 1.

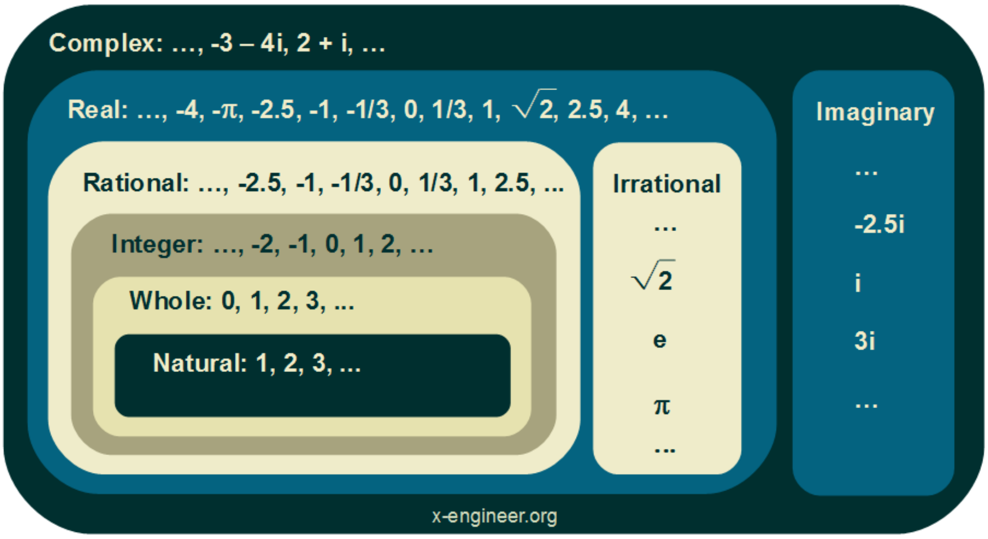


FIGURA 1. Relaciones entre los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Los números irracionales son los números reales que no son racionales. Probaremos rigurosamente que $\sqrt{2}$, π y e son irracionales en los problemas 6, 221 y 326–328), respectivamente.

Hay muchos más tipos de números. Algunos tipos que no trataremos son los construibles (con regla y compás), los algebraicos, los trascendentes, los computables, los normales, etcétera. El estudiante interesado puede echar un vistazo al siguiente vídeo.

All the Numbers del canal *Numberphile* (⏲ 14:26)

Supongo que los lectores ya saben que son los números naturales, enteros, racionales y reales, pero algunos pueden no haber tenido contacto previo con los números complejos. Por eso, listo algunas referencias sobre complejos, algunas en formato escrito, otras en formato audiovisual.

Hay una bonita serie de trece vídeos sobre la historia y la utilidad de los números complejos en el canal Welch Labs. Los últimos vídeos sobrepasan el nivel de este curso, pero podéis ver los primeros nueve (unos 43 minutos en total). He resumido el contenido de cada vídeo en una sección anterior. Stephen Welch también ha publicado un documento, que es una versión escrita y extendida de los vídeos, con una amplia lista de problemas y sus correspondientes soluciones.

Imaginary Numbers Are Real del canal *Welch Labs* (13 vídeos)
Imaginary Numbers Are Real de Stephen Welch (*96* páginas)

También podéis echarle un vistazo al siguiente documento interactivo, que contiene muchos elementos gráficos que ayudan a visualizar los conceptos y operaciones principales. El documento termina con un cuestionario de diez preguntas para comprobar hasta qué punto habéis entendido la materia.

Los números complejos de María José García Cebrian

Finalmente, podéis consultar el material que uso yo para explicar los números complejos. Tiene tres partes. En primer lugar, unas transparencias donde presento conceptos y resultados. En segundo y tercer lugar, dos colecciones de problemas resueltos, escritos a mano y con muchos colores.

Números complejos de Rafael Ramírez Ros (*21* páginas)
Problemas Resueltos de Números Complejos de Rafael Ramírez Ros (*14* páginas)
Más Problemas Resueltos de Números Complejos de Rafael Ramírez Ros (*17* páginas)

En cualquier caso, al acabar el tema se espera que sepáis:

- Para qué sirven los números complejos;
- Representar los números complejos en el plano complejo;
- Relacionar la forma binómica $z = a + b\mathrm{i}$ con la forma polar $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$;
- Sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos;
- Calcular potencias y raíces de números complejos; y
- Entender la interpretación geométrica de todas esas operaciones.

Las introducciones serias a los números complejos terminan enunciando el siguiente resultado.

TEOREMA (Teorema Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio (a coeficientes complejos) de grado n tiene al menos una raíz. (De hecho, tiene exactamente n raíces contadas con multiplicidad.)*

Fundamental theorem of algebra

La prueba de este teorema está un poco por encima del nivel del curso, pero podéis entender la idea principal de una de las muchas demostraciones existentes. Esa idea está esbozada en el vídeo:

Fundamental Theorem of Algebra del canal *Numberphile* (⏲ 15:25)

Finalmente, menciono un breve, pero intenso, documento escrito por Oliver Knill, que es la base de una conferencia de una hora que impartió en la Universidad de Harvard. Solo para que

An Hour with Complex Numbers de Oliver Knill (*15* páginas)

Problemas

1. *(El desafío de los 6s)* Para cada dígito decimal: $n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, llega al resultado 6 usando n exactamente tres veces con la combinación adecuada de las siguientes seis operaciones: sumas, restas, productos, cocientes, raíces cuadradas y factoriales.

Por ejemplo, cuando $n = 2$ tenemos varias posibilidades:

$$2 + 2 + 2 = 6, \qquad [2 + (2/2)]! = 6.$$

How To Solve The 6s Challenge del canal *MindYourDecisions* (⏲ 8:07)

2. *(El número π: Aproximaciones geométricas)* Los primeros algoritmos conocidos para aproximar el valor del número

$$\pi \approx 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164$$

fueron de tipo geométrico. En primer lugar, Arquímedes aproximó π calculando los perímetros de polígonos regulares (inscritos y circunscritos) con un número creciente de lados en el siglo III a. C. Después, Liu Hui lo hizo calculando las áreas de esos mismos polígonos en el siglo III d. C.

a) Sea ℓ_n (respectivamente, L_n) la longitud del perímetro del polígono regular de n lados inscrito (respectivamente, circunscrito) en la circunferencia de diámetro uno. Prueba que

$$\ell_6 = 3, \qquad L_6 = 6/\sqrt{3} \approx 3.4641.$$

Deduce que $3 < \pi < 3.4641$.
Archimedes' Method del canal *Michel van Biezen* (⏲ 7:29)

b) Prueba que

$$\ell_n = \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Deduce que la sucesión (ℓ_n) es creciente y sus términos tienden al número π. Calcula, usando un ordenador o una calculadora, los valores de ℓ_1, ℓ_{10}, ℓ_{100}, ℓ_{1000} y ℓ_{10000}. ¿Cuántos dígitos correctos tiene cada aproximación?
Calculating π (feat. Archimedes) del canal *Sen Zen* (⏲ 9:57)

c) Prueba que el área de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio 1 es

$$a_n = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Deduce que la sucesión (a_n) es creciente y sus términos tienden al número π. Calcula, usando un ordenador o una calculadora, los valores de a_1, a_{10}, a_{100}, a_{1000} y a_{10000}. ¿Cuántos dígitos correctos tiene cada aproximación?
Calculating the value of Pi del canal *Think Twice* (⏲ 3.14)

d) Comprueba, usando un ordenador o una calculadora, que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi - a_n}{\pi - \ell_n} = 4.$$

¿Cuál de las dos aproximaciones geométricas (perímetros o áreas) es mejor?

W Pi

5 Facts You Should Know About π del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:53) [para saber más]

3. *(El número π: Aproximación por el método de Monte Carlo)* Si tenemos un círculo de radio r inscrito dentro de un cuadrado de lado $2r$, se cumple que

$$\frac{\text{área del círculo}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Crea un código que genere $S \gg 1$ puntos aleatorios, pero uniformente distribuidos, dentro del cuadrado y cuente el número C de ellos que están contenidos en el círculo. Comprueba que

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{C}{S}$$

y que esta aproximación "mejora" conforme aumenta S.
[*Advertencia:* Debido a la componente aleatoria del experimento, la elección de S no determina intrínsecamente el valor de C.]
W Monte Carlo method
Approximating Pi (Monte Carlo) del canal *Think Twice* (⏲ 2:07)

4. *(Chocando con π)* Se podría argumentar que este problema no encaja en en el programa, pero es tan divertido que lo he añadido a la lista. El problema consiste en ver el primer vídeo (casi 7M visitas) abajo enlazado, donde se presenta el qué. Los estudiantes interesados pueden, además, ver los otros dos vídeos, que explican el porqué de formas diferentes. Los tres vídeos se basan en un artículo original de Gregory Galperin de 2003.
Playing pool with π de G. Galperin (*20* páginas)
The most unexpected answer to a counting puzzle del canal *3Blue1Brown* (⏲ 5:12)
Why do colliding blocks compute pi? del canal *3Blue1Brown* (⏲ 15:15)
How colliding blocks act like a beam of light...to compute pi del canal *3Blue1Brown* (⏲ 14:40)

5. *(El número e: Primera aparición histórica)* Jacob Bernoulli descubrió la constante e en 1683, cuando estudiaba una cuestión sobre interés compuesto.

a) Prueba que si invertimos un euro, partimos el año en $n \geq 1$ periodos iguales y en cada periodo el interés es la n-ésima parte del $100\,\%$ anual, entonces acabamos el año con

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{euros.}$$

b) Sabemos que la sucesión (c_n) es creciente y sus términos tienden al número

$$\mathrm{e} \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766\,3.$$

Calcula, usando un ordenador o una calculadora, los valores de c_1, c_{10}, c_{100}, c_{1000} y c_{10000}. ¿Cuántos dígitos correctos tiene cada una de esas aproximaciones?

[*Nota:* Estudiaremos la velocidad con que c_n tiende a e con más rigor en el problema 259.]
W e (mathematical constant)
e (Euler's Number) del canal *Numberphile* (⏲ 10:41)

6. *(Raíz de dos)* Las medidas (en mm.) de la serie A de la norma ISO 216/DIN 476 son

Nombre	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
Alto	1189	841	594	420	297	210	148	105	74
Ancho	841	594	420	297	210	148	105	74	52

Al dividir el alto entre el ancho en todas estas hojas se obtiene $\sqrt{2}$, salvo un pequeño error pues la precisión máxima es un milímetro. ¿Cuál es el objetivo de esa proporción? ¿Qué normalización tiene el tamaño A0? Prueba que $\sqrt{2}$ es irracional.

W Formato de papel

W Square root of 2

Root 2 del canal *Numberphile* (⏲ 8:48)

∀∃ **7.** *(Raíces de números primos)* Prueba que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

Proof that square root of prime number is irrational del canal *Khan Academy* (⏲ 7:27)

8. *(Número áureo)* El número áureo

$$\varphi \simeq 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628$$

es el único número real positivo que cumple

$$\varphi^2 = \varphi + 1.$$

a) Obtén expresiones exactas de φ, $1/\varphi$, φ^2 y $1/\varphi^2$ en términos de $\sqrt{5}$.
b) Prueba que $\varphi \notin \mathbb{Q}$.
c) Prueba que

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

d) Deduce (aunque no sea de forma rigurosa) la fórmula con infinitas raíces cuadradas anidadas

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

e) Deduce (aunque no sea de forma rigurosa) la fórmula con infinitas fracciones anidadas

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

W Golden ratio

The Golden Ratio (why it is so irrational) del canal *Numberphile* (⏲ 15:12)

9. *(Números de Fibonacci)* Los números de Fibonacci F_n forman la sucesión de números tales que cada uno es la suma de los dos anteriores , empezando por 0 y 1. Es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \forall n \geq 2.$$

a) Prueba que $\varphi^n = \varphi \cdot F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 1$.
b) Prueba que todas las potencias φ^n, con $n \neq 0$, son irracionales.
c) Prueba que si $G_n = \left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)/\sqrt{5}$ entonces $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ y $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Deduce que $F_n = G_n$ y que los números racionales F_{n+1}/F_n tienden a φ.

W Fibonacci number

La sucesión de Fibonacci y la razón áurea del canal *Derivando* (⏲ 6:06)

10. *(Números factoriales)* Los elementos de un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ elementos se pueden ordenar de

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

formas distintas. Por definición, $0! := 1$. El símbolo $n!$ se lee "n factorial" o "factorial de n".

a) Calcula los factoriales de los números menores o iguales que 10.

b) Lista las 6 posibles formas de ordenar los elementos del conjunto $\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}$.

c) ¿Por qué hemos definido $0! = 1$?

Zero Factorial del canal *Numberphile* (⏲ 7:35)

zero factorial, why 0! should be 1, 4 reasons del canal *blackenredpen* (⏲ 12:57)

d) Prueba que

$$\frac{(10!+9!)(8!+7!)(6!+5!)(4!+3!)(2!+1!)}{(10!-9!)(8!-7!)(6!-5!)(4!-3!)(2!-1!)} = 11.$$

Generaliza esta identidad a fracciones de factoriales más largas.

Factorial Fractions del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:56)

e) Usa la versión generalizada de la desigualdad AM-GM dada en el problema 24 para probar que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[*Nota:* Veremos cómo aproximar $n!$ con relativa precisión en el problema 266.]

Which is larger?? del canal *Michael Penn* (⏲ desde 4:28 hasta 9:54) [por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$]

W Factorial

11. *(Números semifactoriales)* El semifactorial (o doble factorial) de un número $n \in \mathbb{N}$ es

$$n!! := \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-4)(n-2)n, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-4)(n-2)n, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

a) ¿Qué es mayor: $n!!$ o $(n!)!$?

b) Prueba que $(2n)!! = 2^n n!$ y $(2n-1)!! = (2n)!/2^n n!$.

W Double factorial

double factorial!! del canal *blackpenredpen* (⏲ 14:40)

12. *(Números combinatorios y triángulo de Pascal)* El número de formas de escoger $k \geq 1$ elementos a partir de un conjunto de $n \geq k$ elementos es igual a

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k}.$$

Además, por definición, $\binom{n}{0} = 1$ para todo $n \geq 0$. El símbolo $\binom{n}{k}$ se lee "n sobre k".

a) Lista los diez subconjuntos de tres elementos del conjunto $\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle, \bigstar, ✠\}$.

b) Calcula $\binom{6}{4}$.

c) Prueba las fórmulas

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

d) Deduce que los números combinatorios se pueden calcular recursivamente mediante la fórmula anterior, que forman el triángulo de Pascal de la figura 2 y que este triángulo es simétrico.

[*Nota:* La definición de $\binom{n}{k}$ se puede extender a valores arbitrarios $n = \alpha \in \mathbb{R}$, ver el problema 142.]

W Binomial coefficient

Pascal's Triangle del canal *Numberphile* (⏲ 12:32)

The mathematical secrets of Pascal's triangle del canal *TED-Ed* (⏲ 4:49)

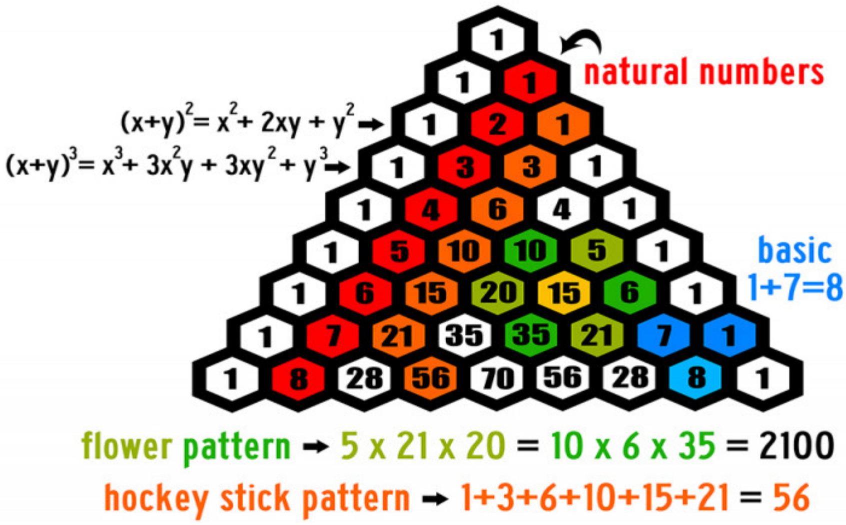


FIGURA 2. Los números combinatorios forman el triángulo de Pascal, donde cada número es la suma de los dos superiores. Por ejemplo, $8 = 7 + 1$.

13. *(Teorema del binomio)* Dados dos números reales a y b y una potencia $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Debido a esto los números combinatorios también se denominan coeficientes binomiales.

a) Escribe las fórmulas correspondientes a $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Entiende porqué el coeficiente que precede a $a^{n-k}b^k$ es igual a $\binom{n}{k}$.
[*Indicación:* Échale un vistazo al vídeo de Matt Parker abajo enlazado.]

c) Entiende la visualización geométrica del teorema del binomio en los casos $n = 1, 2, 3$ dada en la figura 3. ¿Qué dimensión tienen los dibujos del caso $n = 4$?

d) Prueba que la suma de todos los coeficientes binomiales que aparecen en el teorema es 2^n.

e) Compara la fila n-ésima del triángulo de Pascal con las cifras de 11^n. ¿Qué pasa? ¿Por qué?

W Binomial theorem

Matt Parker Explains: Binomial Coefficients del canal *Stand-up Maths* (⏲ 11:48)

Geometry of Binomial Theorem - Visual Representation del canal *Think Twice* (⏲ 1:57)

14. *(Números de Catalan)* El n-ésimo número de Catalan se define como

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \qquad \forall n \geq 0.$$

a) Prueba la expresión alternativa

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \qquad n \geq 1,$$

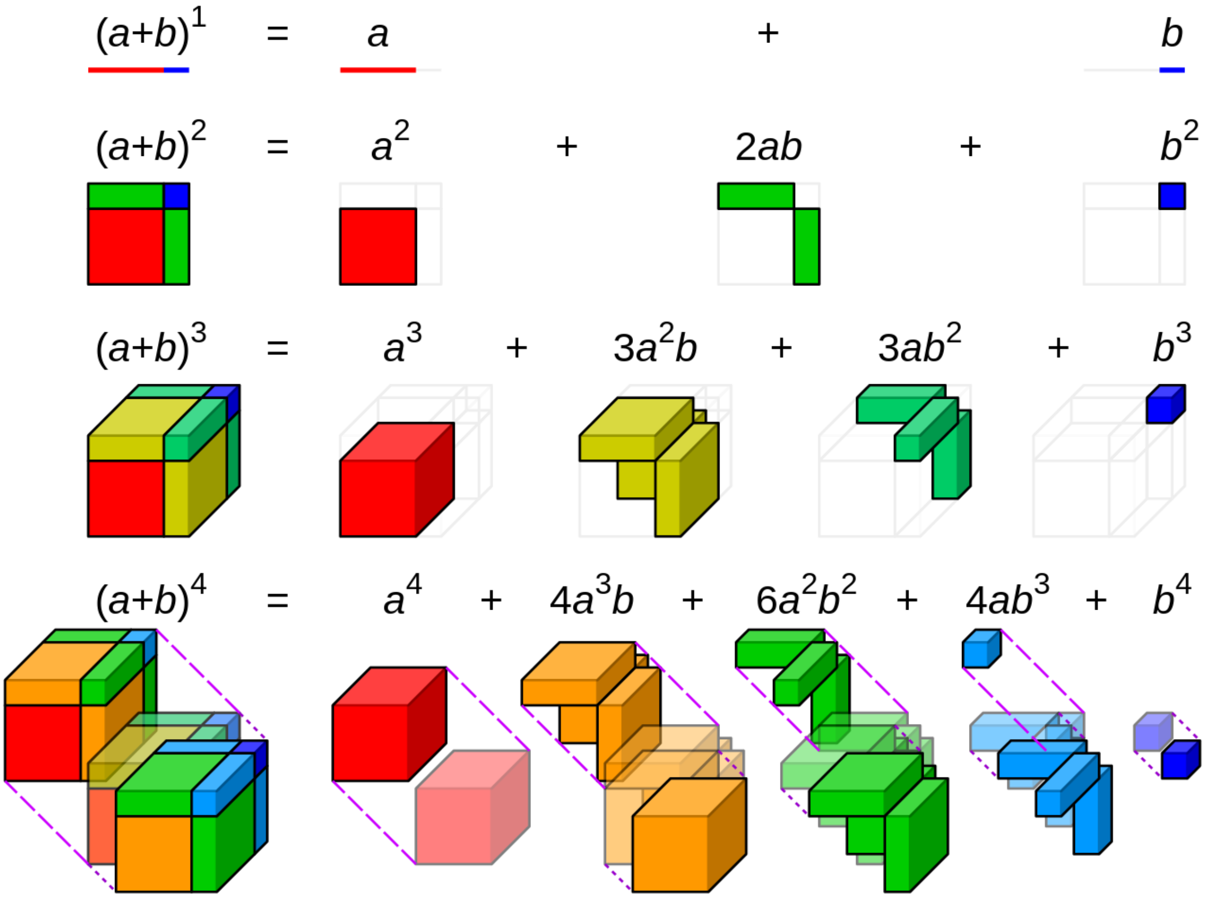


FIGURA 3. Visualización del teorema del binomio para $1 \leq n \leq 4$. (Imagen extraída de Wikipedia.)

y deduce que C_n es un número natural

b) Prueba que $C_0 = 1$ y $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.

W Catalan number

¿Sabes qué son los números de Catalan? del canal *Derivando* (⏲ 6:52)

15. *(Valor absoluto & desigualdad triangular)* Dado un número real x, su valor absoluto es

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a) Prueba que

$$\text{máx}(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \qquad \text{mín}(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

son el máximo y el mínimo de x e y, respectivamente.

b) Prueba que $|x| = \sqrt{x^2} = \text{máx}(x, -x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Prueba la desigualdad triangular

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Proof: Triangle Inequality Theorem del canal *Wrath of Math* (⏲ 5:29)

d) Prueba la desigualdad triangular inversa

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Proof: Reverse Triangle Inequality Theorem del canal *Wrath of Math* (⏲ 8:52)

e) Prueba que si $c \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ entonces

$$|x - c| < \delta \Leftrightarrow x \in (c - \delta, x + \delta).$$

Absolute value
Triangle inequality

16. *(Dos ecuaciones con valores absolutos)*

a) Resuelve la ecuación

$$|2x - 1| = 3|4 - 8x| - 12.$$

b) Resuelve la ecuación

$$|3x + 6| + |x - 1| = 10.$$

A few surprisingly tricky equations del canal *Michael Penn* (⏲ 13:18)

17. *(Dos inecuaciones con valores absolutos)*

a) Determina los números $x \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$2 \leq |3x + 5| \leq 10.$$

b) Determina los números $x \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$\big||3x - 1| + 4\big| < 8.$$

Two absolute value inequalities del canal *Michael Penn* (⏲ 9:04)

18. *(Área de un región plana)* Calcula el área de la región encerrada por la curva

$$|2x - 1| + |2x + 1| + \frac{4|y|}{\sqrt{3}} = 4.$$

[*Indicación:* Prueba que la curva es simétrica respecto ambos ejes de coordinadas.]

not as bad as it seems... del canal *Michael Penn* (⏲ 10:20)

19. *("Floor" & "ceil")* Dado un número $x \in \mathbb{R}$, diremos que

- `floor(x)` $= \lfloor x \rfloor$ es el mayor entero que es menor o igual que x;
- `ceil(x)` $= \lceil x \rceil$ es el menor entero que es mayor o igual que x; y
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de x.

a) Calcula el `floor` y el `ceil` de los números 2, 2.4, 2.9, -2.4, -2.9 y -2.

b) Calcula el valor de las siguientes expresiones:

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor, \quad \lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor, \quad \lceil x \rceil + \lceil -x \rceil, \quad \{x\} + \{-x\}.$$

c) Calcula la única solución de la ecuación $x\lfloor x \rfloor = 10$.

Floor and ceiling functions
Solving a crazy iterated floor equation del canal *Michael Penn* (⏲ desde 1:45 hasta 9:05)

20. *(Una ecuación cuadrática "floor")* Considera la ecuación

$$\lfloor x^2 + 1 \rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

a) Prueba que no hay ninguna solución en los intervalos

$$(-\infty, 1/2), \qquad [2, 5/2), \qquad [5/2, 3), \qquad [3, +\infty).$$

b) Encuentra todas las soluciones en $[1/2, 2)$.

A quadratic floor equation del canal *Michael Penn* (⏲ 13:26)

21. *(El problema 723 de Ramanujan)* Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor.$$

Ramanujan's 723rd problem del canal *Michael Penn* (⏲ 21:00)

A really interesting floor problem! del canal *Michael Penn* (⏲ 8:23) [con un método alternativo]

22. *(Fracciones continuas)* Dado un número $x \in \mathbb{R}$, generamos una sucesión de números racionales (llamados convergentes)

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

que aproximen cada vez mejor al número x en tres pasos:

- Calculamos los números reales $x_0 = x$, $x_n = 1/\{x_{n-1}\}$ para $n \geq 1$, mientras $x_{n-1} \neq 0$;
- Calculamos los números enteros $e_n = \lfloor x_n \rfloor$ para $n \geq 0$; y
- Calculamos los numeradores y denominadores de los convergentes:

$$p_n = e_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = e_n q_{n-1} + q_{n-2}, \qquad \forall n \geq 1.$$

(Convenimos que los valores iniciales son $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = e_0$ y $q_0 = 1$.)

Se puede comprobar que

$$\frac{p_n}{q_n} = e_0 + \cfrac{1}{e_1 + \cfrac{1}{e_2 + \cfrac{1}{\ddots \, e_{n-2} + \cfrac{1}{e_{n-1} + \cfrac{1}{e_n}}}}}.$$

Por simplicidad, notaremos por el símbolo $[e_0; e_1, e_2, \ldots, e_n]$ a la fracción anidada de la derecha.

El proceso acaba en un número finito de pasos si y solo si $x \in \mathbb{Q}$, en cuyo caso se llega a un valor $x_N \in \mathbb{N}$ que no permite continuar y $x = p_N/q_N = [e_0; e_1, \ldots, e_N]$. De lo contrario, el proceso continúa indefinidamente, $e_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$ y se puede demostrar que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \to +\infty} [e_0; e_1, e_2, \ldots, e_n] =: [e_0; e_1, e_2, e_3, \ldots].$$

a) Prueba que $1473/50 = [29; 2, 5, 1, 3]$.

b) ¿Qué número racional es igual a $1.036036036036036036\ldots$?

c) Comprueba, mediante calculadora u ordenador, la veracidad de las siguientes afirmaciones.

x	$\pi \approx 3.1415926535$	$\varphi \approx 1.6180339887$
e_0	$3 = 3.0000000000$	$1 = 1.0000000000$
p_1/q_1	$\frac{22}{7} = 3.1428571428$	$\frac{2}{1} = 2.0000000000$
p_2/q_2	$\frac{333}{106} = 3.1415094339$	$\frac{3}{2} = 1.5000000000$
p_3/q_3	$\frac{355}{113} = 3.1415929203$	$\frac{5}{3} = 1.6666666666$
p_4/q_4	$\frac{103993}{33102} = 3.1415926530$	$\frac{8}{5} = 1.6000000000$

CUADRO 1. Primeros convergentes de π y φ. Varios de esos primeros convergentes de π se han usado históricamente como aproximaciones.

I) Fracciones continuas famosas:

$$\begin{aligned} \varphi &= [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots], \\ \sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots], \\ \mathrm{e} &= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots], \\ \pi &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots]. \end{aligned}$$

[*Nota:* En la última identidad no hay ningún patrón cíclico.]

II) Los números de Fibonacci dan los convergentes del número áureo: $p_n/q_n = F_{n+2}/F_{n+1}$.

III) Los convergentes p_n/q_n tienden mucho más rápido a π que a φ, ver el cuadro 1. [*Nota:* Se sabe que φ es el número "más irracional" que existe; es decir, el peor aproximado por sus convergentes.]

W Continued fraction

Infinite fractions and the most irrational number del canal *Mathologer* (⏲ 13:28)

23. *(Órdenes de magnitud)* Dadas dos expresiones $f(n)$ y $g(n)$ definidas para $n \in \mathbb{N}$, diremos que

$$f(n) \ll g(n) \qquad (\text{cuando } n \to +\infty)$$

si $g(n)$ es "mucho más grande" que $f(n)$ al tomar n "suficientemente grande".

El objetivo de este problema es comprobar empíricamente que

$$\sqrt[3]{n} \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll n^3 \ll 2^n \ll \mathrm{e}^n \ll 10^n \ll n! \ll n^n \qquad (\text{cuando } n \to +\infty).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, considera las expresiones

$$\begin{array}{lllll} f_0(n) = \sqrt[3]{n}, & f_1(n) = \sqrt{n}, & f_2(n) = n, & f_3(n) = n^2, & f_4(n) = n^3, \\ f_5(n) = 2^n, & f_6(n) = \mathrm{e}^n, & f_7(n) = 10^n, & f_8(n) = n!, & f_9(n) = n^n. \end{array}$$

Sea $e_j(n)$ el exponente tal que $f_j(n) = 10^{e_j(n)}$. Calcula, sin usar calculadoras ni ordenadores, el valor aproximado (en siete casos, el valor exacto) de los exponentes $e_j(n)$ para $n = 1000 = 10^3$. [*Indicación:* $2^{10} \approx 1000$, $\mathrm{e}^3 \approx 20$ y $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n/\mathrm{e}^n$ si n es grande (fórmula de Stirling).]

W Order of magnitude

Growth Rates & Log Graphs del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 6:00)

24. *(Desigualdad RMS-AM-GM-HM)* Dados dos números positivos a y b, podemos calcular muchos tipos de medias. Algunas famosas son:

- La media armónica: $\mathrm{HM}(a,b) = \dfrac{2}{1/a + 1/b}$;
- La media aritmética: $\mathrm{AM}(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$;
- La media geométrica: $\mathrm{GM}(a,b) = \sqrt{ab}$; y
- La (raíz de la) media cuadrática: $\mathrm{RMS}(a,b) = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

a) Prueba la desigualdad RMS-AM-GM-HM que dice

$$\min(a,b) \leq \mathrm{HM}(a,b) \leq \mathrm{GM}(a,b) \leq \mathrm{AM}(a,b) \leq \mathrm{RMS}(a,b) \leq \max(a,b).$$

b) Prueba que las anteriores desigualdades son igualdades si y solo si a y b son iguales.

c) Aventura cuales son las definiciones de estas medias si empezamos con n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en vez de con solo dos números positivos a y b.

[*Nota:* En el problema 265 definiremos la media aritmético-geométrica $\mathrm{AGM}(a,b)$ y veremos que está entre la medias aritmética y geométrica.]

W HM-GM-AM-QM inequalities

RMS-AM-GM-HM Inequality del canal *MindYourDecisions* (8:23)

Arithmetic mean vs Geometric mean - Visual proof del canal *Think Twice* (1:38)

25. *(Interpretación geométrica del producto de números complejos)*

a) ¿Cuál es el número complejo tal que multiplicar por él tiene el mismo efecto que la rotación anti-horaria de $\pi/6$ radianes?

b) Calcula el coseno del ángulo de 75 grados (o sea, $\pi/4 + \pi/6$ radianes).

Complex number fundamentals del canal *3Blue1Bronw* (desde 32:10 hasta 52:20)

26. *(Una identidad con arcos tangentes)* Calcula el producto $(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$ y deduce que

$$\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi.$$

A nice inverse trigonometric identity del canal *Michael Penn* (desde 7:30 hasta 14:30)

27. *(La fórmula de Machin)* Queremos obtener la fórmula que usó John Machin para calcular los primeros 100 decimales de π en 1706 con pluma y papel. Otras generalizaciones de esa fórmula se han usado para calcular muchos más decimales de π. (El algoritmo usado para conseguir el récord de 50 billones de decimales del 29 de enero de 2020 se comenta en el problema 294.)

a) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \arctan\left(\frac{d}{c}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Calcula el producto $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$ y deduce que

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \arctan\left(\frac{d}{c}\right) = \arctan\left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right).$$

b) Deduce que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

c) Deduce que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right).$$

d) Prueba la fórmula de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

W Machin-like formula

Computing π: Machin-like formula del canal *Oscar Veliz* (⏲ 11:20)

28. *(Un poco de geometría)* Si los dos catetos de un triángulo rectángulo miden $2+\sqrt{3}$ y $3+2\sqrt{3}$, prueba que su hipotenusa mide $a+b\sqrt{3}$ para algunos valores $a, b \in \mathbb{N}$.

Half of a deathly area... del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 6:21)

29. *(Generalizaciones del factorial)* Dado un número $n \in \mathbb{N}$, considera las siguientes cantidades:

- *Factorial:* $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, ya definido en el problema 10.
- *Semifactorial:* $n!!$, ya definido en el problema 11.
- *Factorial del factorial:* $(n!)! = \prod_{k=1}^{n!} k$.
- *Subfactorial:* $!n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$.
- *Primordial:* $n\# = \prod_{p \leq n \text{ primo}} p$.
- *Super factorial (Sloane):* $\mathrm{sf}(n) = \prod_{k=1}^{n} k!$.
- *Super factorial (Pickover):* $n\$ = n! \uparrow\uparrow n!$, donde $x \uparrow\uparrow n$ se define en el problema 73.
- *Factorial exponencial:* $\mathrm{ef}(n) = n^{(n-1)^{(n-2)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.
- *Hiper factorial:* $\mathrm{H}(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k$.

a) Calcula el valor de estas cantidades para $n=4$ y ordena los valores de menor a mayor. [*Advertencia:* Una de estas cantidades es enorme y, probablemente, no podrás calcularla.]

b) Ordena estas cantidades en orden de magnitud creciente cuando $n \to +\infty$.

7 factorials you probably didn't know del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:58) [solo a)]

30. *(La constante de Ramanujan)* Calcula los números $0 < \epsilon_{163} < \epsilon_{67} < \epsilon_{43} < \epsilon_{19} < 1$ tales que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sqrt{19}\pi} &= 12^3(3^2-1)^3 + 744 - \epsilon_{19}, \\
\mathrm{e}^{\sqrt{43}\pi} &= 12^3(9^2-1)^3 + 744 - \epsilon_{43}, \\
\mathrm{e}^{\sqrt{67}\pi} &= 12^3(21^2-1)^3 + 744 - \epsilon_{67}, \\
\mathrm{e}^{\sqrt{163}\pi} &= 12^3(231^2-1)^3 + 744 - \epsilon_{163}.
\end{aligned}$$

Puedes usar cualquier medio a tu alcance: lápiz y papel, calculadoras, ordenadores, etcétera. El reto es obtener al menos el orden de magnitud de cada uno de esos números. (El número $\mathrm{e}^{\sqrt{163}\pi}$ es la constante de Ramanujan. No existe un número mayor que 163 con ese tipo de propiedades.)

[*Nota histórica:* Las sorprendentes propiedades del número $e^{\sqrt{163}\pi}$ fueron descubiertas en 1859 por Charles Hermite. El divulgador Martin Gardner escribió en 1975 un artículo de broma donde afirmó que $e^{\sqrt{163}\pi} \in \mathbb{N}$ y que Srinivasa Ramanujan lo había predicho—de ahí su nombre.]

W Heegner number

163 and Ramanujan Constant del canal *Numberphile* (⏲ 11:29)

31. *(Sumar raíces cúbicas de números "conjugados")*

a) Prueba que $\sqrt[3]{8+3\sqrt{21}} + \sqrt[3]{8-3\sqrt{21}} \in \mathbb{N}$.

WOW! A Most Amazing Answer del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:05)

b) Prueba que $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} \in \mathbb{N}$.

believe in the math, not wolframalpha del canal *balckpenredpen* (⏲ 14:49)

c) Prueba que $\sqrt[3]{2+11\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2-11\mathrm{i}} \in \mathbb{N}$.

Imaginary Numbers Are Real [Part 4] del canal *Welch Labs* (⏲ 2:56)

32. *("Demostración": $1=-1$)* Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$$

"Prove" 2 = 0 Using Square Roots del canal *MindYourDecisions* (⏲ 3:02)

33. *("Demostración": $3=0$)* Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".

Supongamos que $x^2+x+1=0$, luego $x+1=-x^2$. Entonces:

$$x^2+x+1=0 \overset{\div x}{\Longrightarrow} x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow -x^2+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=1.$$

Como $x=1$, sustituimos en la ecuación de partida y obtenemos que $3=1^2+1+1=0$.

"Prove" 3 = 0. Can You Spot The Mistake? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:27)

∀∃ **34.** *(Cardinalidad de conjuntos)* Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si y solo si existe una función biyectiva $f : A \to B$. En tal caso, escribiremos que $|A| = |B|$.

a) Prueba que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

b) Prueba que si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces $|(a, b)| = |(0, 1)| = |\mathbb{R}|$.

W Cardinality

Equinumerosity del canal *Michael Penn* (⏲ 18:38)

∀∃ **35.** *($\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no es numerable)* Un conjunto A es numerable si y solo si existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to A$. Es decir, cuando podemos "contar" todos sus elementos.

a) Prueba que $\mathbb{Q}$ es numerable: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

b) Prueba, usando el argumento diagonal de Cantor, que $\mathbb{R}$ no es numerable: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

W Cantor's diagonal argument

Infinity is bigger than you think del canal *Numberphile* (⏲ 7:59)

∀∃ **36.** *(Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)* Prueba que dados dos números reales arbitrarios $a < b$, existe algún número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$ usando la siguiente propiedad arquimediana:

$$\forall y \in \mathbb{R} \text{ con } y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < y.$$

The density of $\mathbb{Q}$ del canal *Michael Penn* (⏲ desde 13:00)

Funciones

¡Multiplícate por cero! (Eat my shorts!)
(Bart Simpson, traducido por Aguirre de Cárcer)

¿Qué hay que saber?

Este tema se descompone en tres partes: funciones, límites y continuidad.

En la primera parte, se introducen los conceptos básicos asociados a las funciones: dominio, rango, imagen y anti-imagen; se listan las operaciones básicas con funciones: suma, resta, producto, cociente, composición e inversión; y se recuerdan las funciones elementales con las que trabajaremos el resto del curso: potencias, polinomios, exponenciales, logaritmos, las seis funciones trigonométricas y sus inversas y las seis funciones hiperbólicas y sus inversas. Es una buena idea tener presentes las gráficas de todas esas funciones, pues son el armazón sobre el cual se construyen todas las demás.

En la segunda parte, se explica la definición ϵ–δ de límite y se presenta la lista de indeterminaciones que pueden aparecer al calcular límites:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad +\infty - \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0.$$

También se enuncian los cuatro límites más importantes del curso:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}.$$

En la tercera parte, se define el concepto de función continua, se afirma que todas las funciones elementales son continuas en sus respectivos dominios y se clasifican las discontinuidades en tres tipos: evitables, de salto y de segunda especie. Se presentan los teoremas básicos sobre funciones continuas: el teorema de Bolzano, el teorema del valor intermedio y el teorema de Weierstrass (o teorema de los valores extremos). Finalmente, se motiva el método de bisección a partir del teorema de Bolzano.

Este tema se corresponde con el contenido de los dos primeros capítulos del libro:

Calculus: Volume 1 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*875* páginas)

Al acabar el tema se espera que sepáis:

- Calcular dominios, rangos, imágenes y anti-imágenes de funciones elementales;
- Estudiar la inyectividad, exhaustividad y biyectividad de funciones;
- Componer e invertir funciones;
- Manejar potencias, exponenciales, logaritmos y las funciones trigonométricas e hiperbólicas;
- Calcular algunos límites por cancelación, racionalización y cambio de variable;
- Estudiar la continuidad de una función dada, clasificando todas sus discontinuidades;
- Saber aplicar los tres teoremas básicos sobre funciones continuas; y
- Ser capaz de dibujar las gráficas de algunas funciones patológicas como, por ejemplo, $y = \mathrm{e}^{1/x}$, $y = \cos(3^{1/x})$, $y = \sin(1/x)$, $y = x\sin(1/x)$, etcétera.

Problemas

37. *(El orden de las operaciones)* Consideramos la función

$$f(x) = x - \left(\sqrt{x+1} + 2\right) + \left(x - \sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x-4}.$$

Calcula manualmente el valor de $f(8)$.

MIT Test Question (1869) del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:27)

38. *(Una función con valores absolutos)* Dibuja la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \big||x-1| - 4\big|.$$

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ tiene la ecuación $f(x) = a$ exactamente tres raíces diferentes?

An Absolute Value Equation With Three Solutions del canal *SyberMath* (⏲ 8:37)

39. *(Transformaciones de una gráfica)* En el cuadro 2 se listan las relaciones entre la gráfica de una función $y = f(x)$ arbitraria y las gráficas de ciertas funciones transformadas.

a) ¿Por qué los cambios en la abcisa x generan cambios “opuestos”en el eje horizontal, mientras que los cambios en la ordenada y generan cambios “directos” en el vertical?

b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de la función transformada $y = cf(b(x+a)) + d$ cuando $a, d \in \mathbb{R}$ y $c, b \neq 0$? Explica el orden en que se deben realizar las transformaciones.

c) Dibuja la gráfica de las parábolas transformadas horizontalmente

$$y = (x+1)^2, \quad y = (x-1)^2, \quad y = (2x)^2, \quad y = (x/2)^2, \quad y = (-x)^2$$

y las parábolas transformadas verticalmente

$$y = x^2 + 1, \quad y = x^2 - 1, \quad y = 2x^2, \quad y = x^2/2, \quad y = -x^2$$

a partir de la gráfica de la parábola $y = x^2$.

d) Dibuja la gráfica del valor absoluto transformado $y = -|x+2| - 3$.

e) En el vídeo abajo enlazado se aplican mal estas ideas al dibujar la gráfica de la función

$$y = -2(x-3)^2 + 4.$$

¿Dónde está el error?

Transformo mi función de José R. Galo Sánchez

Shifting, Stretching, and Reflecting Functions del canal *Professor Dave Explains* (⏲ 7:51)

Cambio en la función	Efecto en la gráfica
$f(x+\alpha)$	Desplazamiento horizontal α unidades a la izquierda
$f(x-\alpha)$	Desplazamiento horizontal α unidades a la derecha
$f(\beta x)$	Contración horizontal por un factor β
$f(x/\beta)$	Expansión horizontal por un factor β
$f(-x)$	Reflexión respecto al eje vertical: izquierda $\leftrightarrow$ derecha
$f(x)+\alpha$	Desplazamiento vertical α unidades hacia arriba
$f(x)-\alpha$	Desplazamiento vertical α unidades hacia abajo
$\beta f(x)$	Expansión vertical por un factor β
$f(x)/\beta$	Contracción vertical por un factor β
$-f(x)$	Reflexión respecto al eje horizontal: arriba $\leftrightarrow$ abajo

CUADRO 2. Transformaciones fundamentales de una gráfica. Aquí, $\alpha > 0$ es un término aditivo y $\beta > 1$ es un factor multiplicativo.

40. *(Puntos sobre gráficas transformadas)* Sea $y = f(x)$ una función tal que su gráfica pasa por el punto $P = (5, -3)$. Encuentra algún punto en cada una de las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = f(x-3)+2, \qquad y = \frac{f(-x)+9}{2}, \qquad y = 2f(3x-1)+4, \qquad y = f(2-x)+7.$$

Transforming a point on a graph: Examples del canal *Michael Penn* (⏲ 5:25)

41. *(Aplicación de transformaciones dadas)* Encuentra la función $g(x)$ tal que su gráfica se obtiene a partir de las gráfica de $f(x) = x^2 + 2x$ mediante cada una de las siguientes cadenas de transformaciones (en ese orden):

a) Desplazamiento a la izquierda 3 unidades y arriba 4 unidades.
b) Desplazamiento arriba 1 unidad y reflexión respecto al eje horizontal.
c) Expansión vertical por un factor 3, reflexión respecto al eje vertical y desplazamiento a la derecha 1 unidad.
d) Contracción horizontal por factor 3, desplazamiento a la derecha 3 unidades y desplazamiento arriba 1 unidad.

Transformations of a graph from a written description del canal *Michael Penn* (⏲ 6:58)

42. *(Funciones pares e impares)* Una función $y = f(x)$ es par cuando $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y es impar cuando $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es par la función $y = x^n$?
b) ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es impar la función $y = x^n$?
c) ¿Qué se puede decir de las gráficas de las funciones pares e impares?
d) Prueba que la suma (o la resta) de dos funciones pares (respectivamente, impares) también es par (respectivamente, impar).
e) Prueba que el producto (o el cociente) de dos funciones pares (respectivamente, impares) es par (respectivamente, par), mientras que el producto (o el cociente) de una función impar y otra par, es impar.
f) Prueba que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede descomponer como la suma de una función par $E(x)$ y otra impar $O(x)$. Aplica el resultado a la función exponencial $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Indicación: Resuelve el sistema formado por las ecuaciones

$$f(x) = E(x) + O(x), \qquad f(-x) = E(-x) + O(-x) = E(x) - O(x).$$

g) Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$$f(x) = 3x^2 - 12, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}, \qquad f(x) = x + x^2, \qquad f(x) = \frac{x}{x^3 + \sqrt[3]{x}}.$$

Recognizing odd and even functions del canal *Khan Academy* (⏲ 12:24) [a), b) & c)]
Write e^x as a sum of an even and an odd function del canal *blackpenredpen* (⏲ 7:03) [f)]
Even and Odd Functions: Examples del canal *Michael Penn* (⏲ 4:22) [g)]

43. *(Composición múltiple)* Considera las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = 1 - x, \qquad h(x) = g(f(x)).$$

a) Calcula $h(x)$, $h^2(x) = h(h(x))$ y $h^3(x) = h(h(h(x)))$.
b) Calcula h compuesta con ella misma 2021 veces: $h^{2021}(x)$.

Mexican Regional Mathematical Olympiad | 2006 Q6 del canal *Michael Penn* (⏲ 4:59)

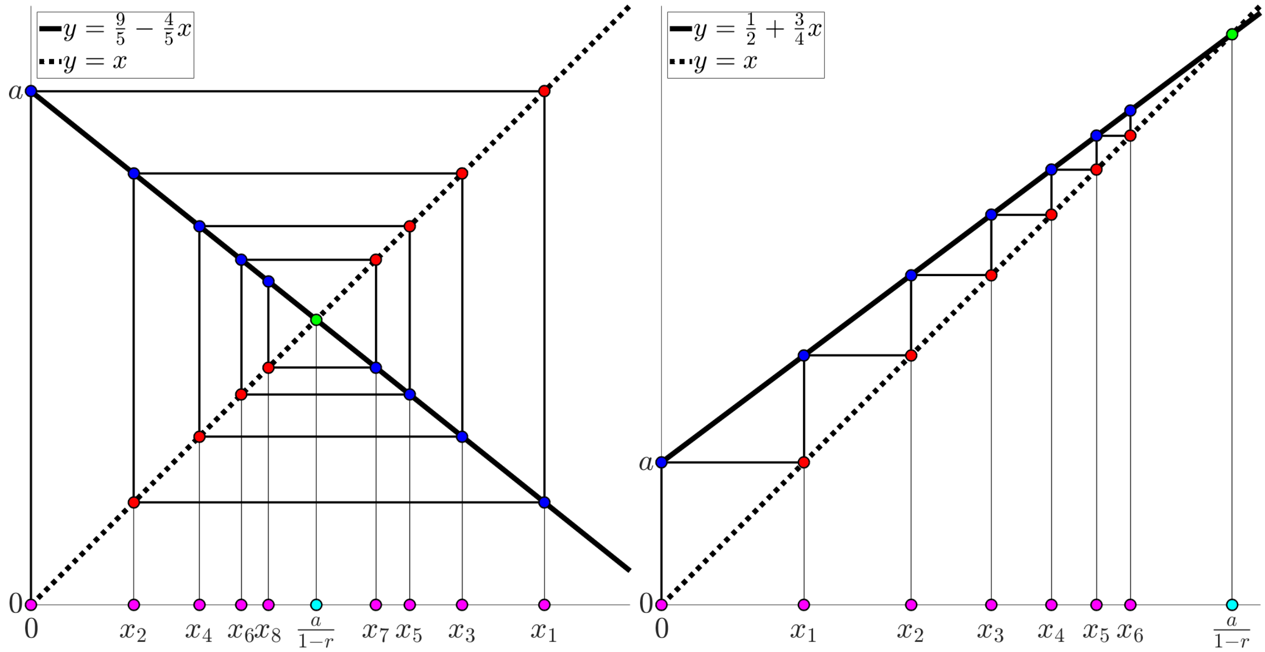


FIGURA 4. Representación gráfica de la sucesión $x_n = g^n(0)$ con $g(x) = a + rx$ en los dos casos convergentes. Izquierda: Ejemplo con $-1 < r < 0$. Derecha: Ejemplo con $0 < r < 1$.

44. *(Suma visual de una serie geométrica)* Queremos determinar cuándo es convergente (y, en caso afirmativo, sumar) la serie geométrica de razón $r \neq 0$ y primer término $a > 0$. Es decir, la serie

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots .$$

a) Considera la función lineal $y = g(x) = a + rx$. Prueba que:
   I) Las gráficas de las funciones $y = g(x)$ e $y = x$ se cortan en el punto de abcisa $a/(1-r)$ cuando $r \neq 1$ y son dos rectas paralelas cuando $r = 1$; y
   II) $g^{n+1}(x) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + r^{n+1}x$, para todo $n \geq 0$.

b) Considera la sucesión que empieza en $x_0 = 0$ y después se define de forma recurrente como

$$x_{n+1} = g(x_n) = g^{n+1}(0) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n, \qquad \forall n \geq 1.$$

   Argumenta visualmente las siguientes propiedades.
   I) Si $r \geq 1$, entonces la sucesión es creciente y no acotada, luego es divergente.
   II) Si $0 < r < 1$, entonces la sucesión es creciente y converge al valor $S = a/(1-r)$.
   III) Si $-1 < r < 0$, entonces la subsucesión formada por los términos pares x_{2n} es creciente, la subsucesión formada por los términos impares x_{2n+1} es decreciente y ambas subsucesiones convergen al valor $S = a/(1-r)$.
   IV) Si $r \leq -1$, entonces las subsucesiones formadas por los términos pares/impares son creciente/decreciente y no acotadas, luego ambas son divergentes.

   [*Indicación:* Los dos casos convergentes están representados en la figura 4.]

Geometric Series | Explained Visually del canal *Think Twice* (⏲ desde 1:39)

45. *(Transformaciones de Möbius)* Las transformaciones de Möbius son las funciones racionales de la forma

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

donde $ad \neq bc$.

a) Calcula el dominio de $g(x)$.

b) Calcula la función inversa $g^{-1}(x)$ y comprueba que también es una transformación de Möbius.

c) Determina la única función racional que cumple la ecuación funcional

$$f\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = x^2.$$

d) Calcula los límites laterales $\lim_{x\to 2^\pm} f(x)$ sin usar la expresión de la función $f(x)$. Es decir, usando tan solo la ecuación funcional que satisface.

A Quick and Easy Functional Equation del canal *SyberMath* (⏲ 6:48)

46. *(Dos ecuaciones funcionales con transformaciones de Möbius)* Considera las funciones

$$g(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad h(x) = \frac{x-3}{x+1}.$$

a) Calcula las composiciones

$$g^2(x) = g(g(x)), \quad g^3(x) = g(g(g(x))), \quad h^2(x) = h(h(x)), \quad h^3(x) = h(h(h(x))).$$

Comprueba que tanto g^3 como h^3 son la función identidad.

b) Determina la única función $f(x)$ que cumple la ecuación funcional

$$f(x) + f(g(x)) = x.$$

A fun functional equation!! del canal *Michael Penn* (⏲ 11:12)

c) Determina la única función $f(x)$ que cumple la ecuación funcional

$$f(h(x)) + f(h^2(x)) = x.$$

A Functional Equation from Putnam and Beyond del canal *SyberMath* (⏲ 12:06)

47. *(Una ecuación funcional con algo de álgebra lineal)* Determina la única función $f(x)$ que cumple la ecuación funcional

$$3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x, \qquad \forall x \neq 0.$$

Indicación: Encuentra la matriz A tal que $A \begin{pmatrix} f(-x) \\ f(1/x) \\ f(x) \\ f(-1/x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 1/x \\ -1/x \end{pmatrix}$.

A Cool Functional Equation del canal *SyberMath* (⏲ 12:42)

48. *(Una función recursiva)* Consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida así:

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{si } n \geq 1000; \\ f(f(n+5)), & \text{si } n < 1000. \end{cases}$$

a) Calcula el valor $f(84)$ con lápiz y papel.

b) Escribe una función recursiva `Doll(n)` en Python que permita evaluar esta función.

The Russian Doll Problem del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:43)

49. *(Gráfica de la función inversa)* Justifica que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función biyectiva y

$$\mathcal{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\right\}, \qquad \mathcal{H} = \left\{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : x = f^{-1}(y)\right\}$$

son las gráficas de la función original y de su inversa, entonces $\mathcal{H}$ se obtiene aplicando a $\mathcal{G}$ la simetría axial respecto la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) Sea $A = f(r) = \pi r^2$ la función que, dado un radio $r > 0$, proporciona el área A del círculo de radio r. Calcula la función inversa $r = f^{-1}(A)$. Dibuja las gráficas de ambas funciones.

b) Sea $C = f(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ la función que, dada una temperatura F en la escala Fahrenheit, proporciona la temperatura C en grados centrígrados (también llamados grados Celsius). Calcula la función inversa $F = f^{-1}(C)$. Dibuja las gráficas de ambas funciones.

Inverse Functions and the Logarithm del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 6:30 hasta 16:25)

50. *(Un reloj confuso)* Dada un número entero $n \geq 2$, consideramos la función lineal a trozos

$$f : [0,1] \to [0,1], \qquad f(x) = \{nx\} = \text{parte fraccionaria de } nx.$$

a) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

b) Prueba que el conjunto

$$C = \big\{(x,y) \in [0,1]^2 : y = f(x), x = f(y) \text{ y } x \neq y\big\}$$

tiene exactamente $n^2 - n$ elementos.

c) Tenemos un reloj tradicional con dos agujas (una para las horas y otra para los minutos) que, por un defecto de fabricación, son indistinguibles entre sí. Utiliza el apartado anterior para probar que hay exactamente $132 = 12^2 - 12$ momentos en un rango de doce horas donde no es posible saber qué hora es al mirar el reloj.

Can you always determine the time? del canal *Zach Star* (⏲ 9:46)

51. *(Potencias)* Dada una base $x > 0$ y un exponente $\alpha \in \mathbb{R}$, la potencia x^α se define en varios pasos.

- Si $\alpha = 0$, entonces $x^0 = 1$.
- Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, entonces x^n se obtiene multiplicando la base x por ella misma n veces:

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ veces}}.$$

- Si $\alpha = 1/q$ con $q \in \mathbb{N}$, entonces la raíz q-ésima $u = x^{1/q}$ es el único $u > 0$ tal que $u^q = x$.
- Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}_+$, entonces $x^{p/q}$ es la raíz q-ésima elevada a p. Es decir, $x^{p/q} = \big(x^{1/q}\big)^p$.
- Si $\alpha = -p/q \in \mathbb{Q}_-$, entonces $x^{-p/q}$ es el inverso de $x^{p/q}$. Es decir, $x^{-p/q} = 1/x^{p/q}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $x^\alpha = \lim\limits_{p/q \to \alpha} x^{p/q}$.

a) En algunos casos, la potencia x^α también está bien definida cuando la base es nula o negativa. Concretamente, el dominio de la función $f(x) = x^\alpha$ es una de las siguientes cuatro posibilidades:

$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad [0, +\infty), \qquad \mathbb{R}_+ = (0, +\infty).$$

Explica para qué valores del exponente α se obtiene cada una de ellas.

b) Dibuja las gráficas de las funciones $y = x^\alpha$ para $\alpha = -1, -1/2, 0, 1/3, 1/2, 1, 2, 3$.

c) Prueba que las identidades

$$(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$$

son ciertas para todo par de bases $x, y > 0$ y todo par de exponentes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Encuentra contraejemplos donde fallen si alguna de las bases es negativa.

W Exponentiation

Irrational exponent del canal *blackpenredpen* (⏲ 6:40)

52. *(Aplicaciones del análisis dimensional)* Se podría argumentar que este es un problema de Física, pero lo considero tan importante para un estudiante de Ingeniería que lo he añadido a la lista. La dimensión de una cantidad física puede expresarse como el producto de potencias de exponentes racionales de las dimensiones físicas básicas mostradas en el cuadro 3. Es decir, la dimensión de cualquier cantidad física Q tiene la forma

$$\dim Q = \mathsf{T}^a \mathsf{L}^b \mathsf{M}^c \mathsf{I}^d \Theta^e \mathsf{N}^f \mathsf{J}^g$$

donde $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Q}$ son sus exponentes dimensionales. Por ejemplo, las dimensiones del área A, la aceleración de la gravedad g, la constante de gravitación universal G, la densidad volumétrica ρ y la energía E son

$$\dim A = \mathsf{L}^2, \quad \dim g = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}, \quad \dim G = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^3\mathsf{M}^{-1}, \quad \dim \rho = \mathsf{L}^{-3}\mathsf{M}, \quad \dim E = \mathsf{T}^{-2}\mathsf{L}^2\mathsf{M}.$$

a) Supón que el volumen V y el área superficial A de una esfera depende del radio R de la esfera. Concretamente, supón que existen unos exponentes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ y unas constantes de proporcionalidad adimensionales $k_1, k_2 > 0$ tales que

$$V = k_1 R^{\alpha_1}, \qquad A = k_2 R^{\alpha_2}.$$

Determina el valor de α_1 y α_2 igualando las dimensiones físicas en las dos fórmulas anteriores. [*Nota:* Veremos que $k_1 = 4\pi/3$ en el problema 204. Veremos que $k_2 = 4\pi$ en el problema 207.]

b) Supón que el periodo p de las pequeñas oscilaciones de un péndulo depende de la masa m, de la longitud ℓ y de la aceleración de la gravedad g. Concretamente, supón que existen unos exponentes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y una constante de proporcionalidad adimensional $k > 0$ tales que

$$p = k m^\alpha \ell^\beta g^\gamma.$$

Determina el valor de α, β y γ igualando las dimensiones físicas en la fórmula anterior. [*Nota:* En alguna asignatura posterior veréis que la constante de proporcionalidad es $k = 2\pi$ cuando se usan las unidades del S.I.]

c) Supón que el periodo p de la órbita de una planeta entorno a una estrella depende de la masa M de la estrella, el radio R de la órbita (suponemos que es casi circular) y la constante de gravitación universal G. Concretamente, supón que existen unos exponentes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y una constante de proporcionalidad adimensional $k > 0$ tales que

$$p = k M^\alpha R^\beta G^\gamma.$$

Determina el valor de α, β y γ igualando las dimensiones físicas en la fórmula anterior. [*Nota:* La fórmula obtenida es la tercera ley de Kepler. En un curso de Mecánica Celeste se comprueba que la constante de proporcionalidad es $k = 2\pi$ cuando se usan las unidades del S.I.]

d) Supón que el radio de Schwarzschild R de un agujero negro depende de la masa M del agujero, de la velocidad de la luz c y de la constante de gravitación universal G. Concretamente, supón que existen unos exponentes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y una constante de proporcionalidad adimensional $k > 0$ tales que

$$R = k M^\alpha c^\beta G^\gamma.$$

Determina el valor de α, β y γ igualando las dimensiones físicas en la fórmula anterior. [*Nota:* El astrónomo alemán Karl Schwarzschild obtuvo esa fórmula en 1916. En un curso de Relatividad General se comprueba que la constante de proporcionalidad es $k = 2$ cuando se usan las unidades del S.I.]

e) Supón que el radio R de la onda de choque de una bomba atómica depende del tiempo t que ha transcurrido desde la explosión, de la energía total liberada E y de la densidad ρ de la atmosfera

Dimensión	Símbolo	Unidades S.I.
Tiempo	T	Segundo [s]
Longitud	L	Metro [m]
Masa	M	Kilogramo [kg]
Corriente eléctrica	I	Amperio [A]
Temperatura absoluta	Θ	Kelvin [K]
Cantidad de sustancia	N	Mol [mol]
Intensidad luminosa	J	Candela [cd]

CUADRO 3. Las dimensiones físicas básicas y sus unidades en el S.I.

(o fluido) donde se produce la explosión. Concretamente, supón que existen unos exponentes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ y una constante de proporcionalidad adimensional $k > 0$ tales que

$$R = kE^{\alpha}t^{\beta}\rho^{\gamma}.$$

Determina el valor de α, β y γ igualando las dimensiones físicas en la fórmula anterior.

[*Nota:* El matemático británico Geoffrey I. Taylor determinó experimentalmente en 1945 el valor de k a partir de las fotografías publicadas en algunas revistas. La fórmula que obtuvo era un secreto de estado de los EEUU.]

W Dimensional analysis

Bomb Blast Radius del canal *Numberphile* (⏲ 14:54) [solo el apartado e)]

53. *(Funciones exponenciales)* Una vez hemos establecido cómo se calculan las potencias, podemos estudiar la funciones exponenciales $y = a^x$ con base positiva: $a > 0$.

a) Dibuja las gráficas de las funciones $y = 2^x$, $y = \mathrm{e}^x$ y $y = 10^x$.

b) Dibuja las gráficas de las funciones $y = 2^{-x}$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ y $y = 10^{-x}$.

c) ¿Qué relación hay entre las gráficas de los dos apartados anteriores?

W Exponentiation

Graphing exponential, logarithmic functions del canal *Michel van Biezen* (77 vídeos)

Esta serie tiene 77 vídeos, pero basta mirar los vídeos #30, #31, #32 y #33.

54. *(Una respuesta dorada)* Calcula el único valor $x > 0$ tal que $4^x + 6^x = 9^x$.

A Golden Answer del canal *MindYourDecisions* (⏲ 3:14)

55. *(Polinomio elevado a polinomio)* Encuentra las seis soluciones positivas de la ecuación

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1.$$

Simple Problem STUMPS PhotoMath! del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:59)

56. *(Funciones logarítmicas)* Dada una base $b > 0$ tal que $b \neq 1$ y un argumento $x > 0$, el logaritmo de x en la base b es la cantidad y así definida:

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x.$$

Si la base es $b = 10$, hablamos de logaritmo común; si la base es $b = \mathrm{e}$, hablamos de logaritmo natural y no escribimos la base; y si la base es $b = 2$, hablamos de logaritmo binario.

[*Advertencia:* Notamos indistintamente por $\log x$ o $\ln x$ al logaritmo natural.]

a) Dibuja las gráficas de los logaritmos $y = \log_2 x$, $y = \log x$ y $y = \log_{10} x$ en la misma figura.

b) Prueba las siguiente reglas básicas para trabajar con logaritmos:

- Logaritmo del producto: $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$;
- Logaritmo de la potencia: $\log_b(x^n) = n \log_b x$;
- Cambio de base: $\log_b x = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$.

c) Mira el vídeo abajo enlazado de una clase "online" sobre logaritmos, dada en directo por Grant Sanderson para unas 4000 personas, y responde a las preguntas allí planteadas.

d) Calcula la suma

$$\frac{1}{\log_2(100!)} + \frac{1}{\log_3(100!)} + \cdots + \frac{1}{\log_{99}(100!)} + \frac{1}{\log_{100}(100!)}.$$

Logarithm
Logarithm Fundamentals del canal *3Blue1Brown* (⏲ 1:32:55)

57. *(Una elegante solución de Paul Dirac)* Simplifica la expresión

$$-\log_2\left[\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}\right)\right].$$

Expresa el resultado en función del número $n \in \mathbb{N}$ de raíces cuadradas anidadas.
[*Nota:* El enunciado del problema original era "Forma cualquier número natural usando tres doses y las operaciones matemáticas que aparecen en un calculadora científica".]
Make Any Number From Four π's! del canal *MindYourDecisions* (⏲ desde 1:27 hasta 2:48)

58. *(Una ecuación con logaritmos)* Prueba que la ecuación

$$\sqrt[3]{2021 x^{\log_{2021} x}} = x^3$$

tiene exactamente dos raíces $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y calcula su producto $p = x_1 x_2$.
[*Indicación:* $y = \log_{2021} x$ cumple una ecuación de segundo grado.]
Don't worry about solving this one!! del canal *Michael Penn* (⏲ 6:39)

59. *(Un logaritmo irracional)* Prueba por reducción al absurdo que $\log_2(3)$ es irracional.
Proof for fun, log base 2 of 3 is irrational del canal *blackpenredpen* (⏲ 4:38)

60. *(Escalas logarítmicas)* Una escala logarítmica en base $b > 0$ con origen en O y unidad de longitud $L > 0$ consiste en situar los números reales positivos en una recta horizontal infinita (por ambos lados) mediante la siguiente regla. El número 1 se sitúa en O, el número b^α con $\alpha > 0$ se sitúa αL unidades a la derecha de O y el número $b^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$ se sitúa αL unidades a la izquierda de O.

a) Explica cómo generar la escala de la figura 5 calculando solo los siguientes tres logaritmos:

$$\log_{10} 2 \approx 0.30103, \qquad \log_{10} 3 \approx 0.47712, \qquad \log_{10} 7 \approx 0.84510.$$

b) Prueba que la escala logarítmica en base $b' > 0$ con origen O' y unidad de longitud $L' > 0$ coincide con la escala anterior cuando $O' = O$ y $(b')^L = b^{L'}$. En particular, esto significa que todas las escalas logarítmicas son iguales, salvo traslaciones del origen y escalados en la unidad de longitud.

Logarithmic scale
Logarithmic scale del canal *Khan Academy* (⏲ 11:14)

61. *(Gráficas en escalas logarítmicas)* Dibuja las gráficas de las funciones

$$y = 10^x, \qquad y = x, \qquad y = \log x,$$

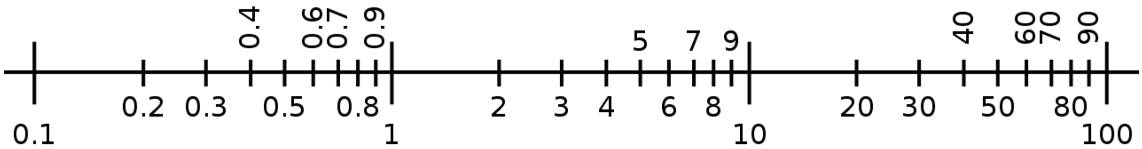


FIGURA 5. Una escala logarítmica en base diez desde $0.1 = 10^{-1}$ hasta $100 = 10^2$. (Imagen extraída de Wikipedia.)

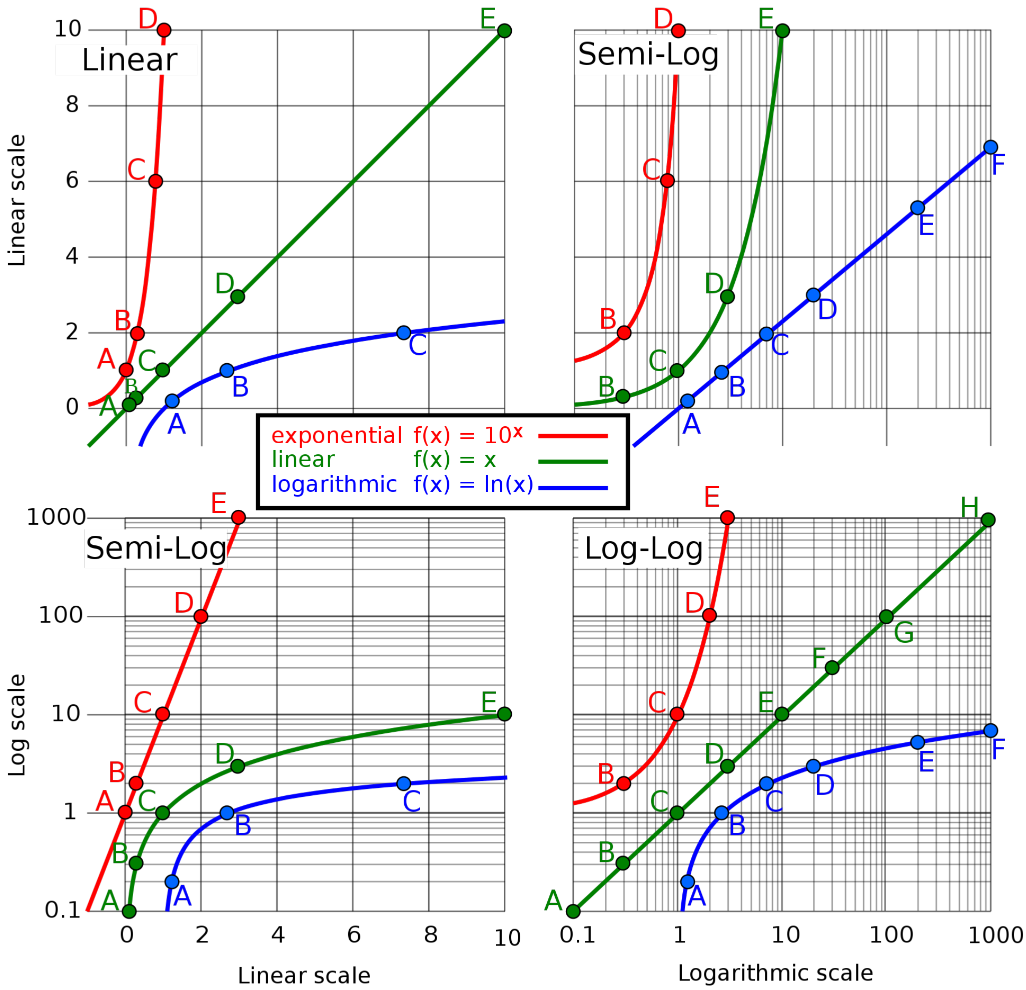


FIGURA 6. Gráficas de las funciones $y = 10^x$, $y = x$ e $y = \log x$ en las escalas lin-lin (arriba izquierda), lin-log (arriba derecha), log-lin (abajo izquierda) y log-log (abajo derecha). El uso de escalas logarítmicas aumenta el rango de valores que se pueden representar. (Imagen extraída de Wikipedia.)

en las siguientes cuatro escalas.

a) Lin-lin: Usando una misma escala lineal estándar en ambos ejes de coordenadas.
b) Lin-log: Usando una escala lineal en la ordenada y una escala logarítmica en la abcisa.
c) Log-lin: Usando una escala logarítmica en la ordenada y una escala lineal en la abcisa.
d) Log-log: Usando una misma escala logarítmica en ambos ejes de coordenadas.

N	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$	$d=7$	$d=8$	$d=9$
10^1	3	2	1	1	1	1	0	1	0
10^2	30	17	13	10	7	7	6	5	5
10^3	301	176	125	97	79	69	56	52	45
10^4	3010	1761	1249	970	791	670	579	512	458
10^5	30102	17611	12492	9692	7919	6695	5797	5116	4576
$\mathcal{F}_d$	0.30103	0.17609	0.12494	0.09691	0.07918	0.06695	0.05799	0.05115	0.04576

CUADRO 4. Número de potencias de la forma 2^n con $1 \le n \le N$ cuyo primer dígito (en base 10) es la cifra d. La última fila muestra los valores de las frecuencias límite $\mathcal{F}_d$.

[*Nota:* Todas estas gráficas están representadas en la figura 6.]
Growth Rates & Log Graphs del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 32:59)

62. *(Ley de Benford)* Se podría argumentar que este no es un problema de Cálculo, pero lo considero tan importante para un estudiante de Ingeniería que lo he añadido a la lista.

La ley de Benford asegura que, en gran variedad de conjuntos de datos numéricos que existen en la vida real, la primera cifra es uno con mucha más frecuencia que dos, dos con más frecuencia que tres, etcétera. Concretamente, la ley afirma que la frecuencia con la que aparece el dígito d como primer dígito es igual a

$$\mathcal{F}_d := \log_{10}(d+1) - \log_{10} d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

Por ejemplo, muchos algoritmos que calculan, para cada "input" $N \in \mathbb{N}$, un conjunto finito, pero cada vez más grande, $A_N \subset \mathbb{R}$ cumplen que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{|\{a \in A_N : a \text{ tiene como primera cifra a } d\}|}{|A_N|} = \mathcal{F}_d, \qquad \forall d \in \{1,2,\dots,8,9\}.$$

Dado un conjunto arbitrario A, el símbolo $|A|$ denota su cardinal. Es decir, el número de elementos que contiene el conjunto A.

Queremos comprobar numéricamente que los siguientes algoritmos cumplen la ley de Benford.

a) *Cálculo de las potencias de dos.* Sea $A_N = \{2^n : 1 \le n \le N\}$, luego $|A_N| = N$. Escribe un programa que calcule las cantidades

$$C_N(d) = \Big|\{1 \le n \le N : 2^n \text{ tiene como primera cifra a } d\}\Big|.$$

Ejecuta el programa para obtener el cuadro 4.
[*Advertencia:* Quizá vuestro programa experimente un "overflow error" y no consiga calcular las dos últimas filas.]

b) *Conjetura de Collatz.* Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida mediante

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Dado un número $n \in \mathbb{R}$, construimos la sucesión $s_j = f^j(n)$ que empieza en $s_0 = n$ y termina la primera vez[2] a que llega al valor uno: $s_{p_n} = f^{p_n}(n) = 1$.

I) Escribe un programa que, dado $n \in \mathbb{N}$, calcule las cantidades

$$c_n(d) = |\{0 \le j \le p_n : f^j(n) \text{ tiene como primera cifra a } d\}|, \qquad d \in \{1,2,\dots,9\}.$$

[2] La conjetura de Collatz afirma que esto siempre sucede. Los matemáticos llevan desde 1937 intentando probarla. El matemático Paul Erdös dijó "Mathematics may not be ready for such problems."

k	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$	$d=7$	$d=8$	$d=9$	$\lvert A_N\rvert$
1	28	16	4	10	8	1	2	7	1	77
2	990	590	323	430	286	116	167	212	128	3242
3	17793	10471	6703	7783	4862	2977	3381	3576	2996	60542
4	254778	148334	99087	103212	68231	46842	48827	48108	42247	859666
5	3233684	1882564	1274139	1243585	863011	618761	620105	596373	521618	10853840
6	39527446	23032297	15726325	14761103	10521251	7775840	7596054	7179256	6314852	132434424
7	467111558	272307335	187007752	170699134	124118351	93698003	89759944	83981175	74041579	1562724831

CUADRO 5. Cantidades $C_N(d)$ definidas con el algoritmo de Collatz, ver problema 62b para $N = 10^k$ y $1 \leq k \leq 7$.

Comprueba que $c_6(1) = 3$, $c_6(d) = 1$ para $d \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ y $c_6(7) = c_6(9) = 0$.

II) Modifica el programa para que, dado $N \in \mathbb{N}$, calcule las cantidades

$$C_N(d) = c_1(d) + c_2(d) + \cdots + c_N(d), \qquad d \in \{1, 2, \ldots, 9\}.$$

Ejecuta el programa para obtener el cuadro 5, donde $|A_N| = \sum_{d=1}^{9} C_N(d)$. Comprueba que las frecuencias relativas

$$F_N(d) = C_N(d)/|A_N|$$

se aproximan a los valores $\mathcal{F}_d$.

[*Nota:* El cuarto episodio, *Digits*, de la primera temporada de la serie *Connected* de Netflix trata sobre las múltiples aplicaciones de la ley de Benford al análisis de datos.]

W Benford's law

W Collatz conjecture

Number 1 and Benford's Law del canal *Numberphile* (⏲ 9:13)

The Simplest Math Problem No One Can Solve del canal *Veritasium* (⏲ hasta 6:20)

63. *(Funciones trigonométricas)* Para definir el seno, el coseno, la tangente, la cosecante, la secante y la cotangente de un ángulo agudo $\alpha \in (0, \pi/2)$, formamos un triángulo rectángulo como el mostrado en la parte izquierda de la figura 7. Entonces las seis medidas trigonométricas se definen como los siguientes cocientes de longitudes de hipotenusas y catetos:

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}},$$
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}, \qquad \csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}, \qquad \cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}.$$

Para extender la definición a "ángulos" arbitrarios $\theta \in \mathbb{R}$, dibujamos la circunferencia unitaria y consideramos el punto P sobre ella que se obtiene al girar θ radianes (en sentido antihorario cuando $\theta > 0$ y horario cuando $\theta < 0$) el segmento horizontal positivo. Entonces, las seis funciones trigonométricas se definen geométricamente como en la parte derecha de la figura 7.

a) Dibuja las gráficas de las seis funciones trigonométricas
b) Determina el periodo, la paridad y el rango de cada una de ellas.
c) Lista las asíntotas (si existen) de cada una de ellas.
d) Deduce las identidades básicas

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x, \qquad \csc^2 x = \cot^2 x + 1,$$

a partir de los triángulos rojo, azul y verde del dibujo de la parte derecha de la figura 7.

e) Mira el vídeo abajo enlazado de una clase "online" sobre fundamentos de trigonometría, dada en directo por Grant Sanderson para unas 4000 personas, y responde a las preguntas allí planteadas.

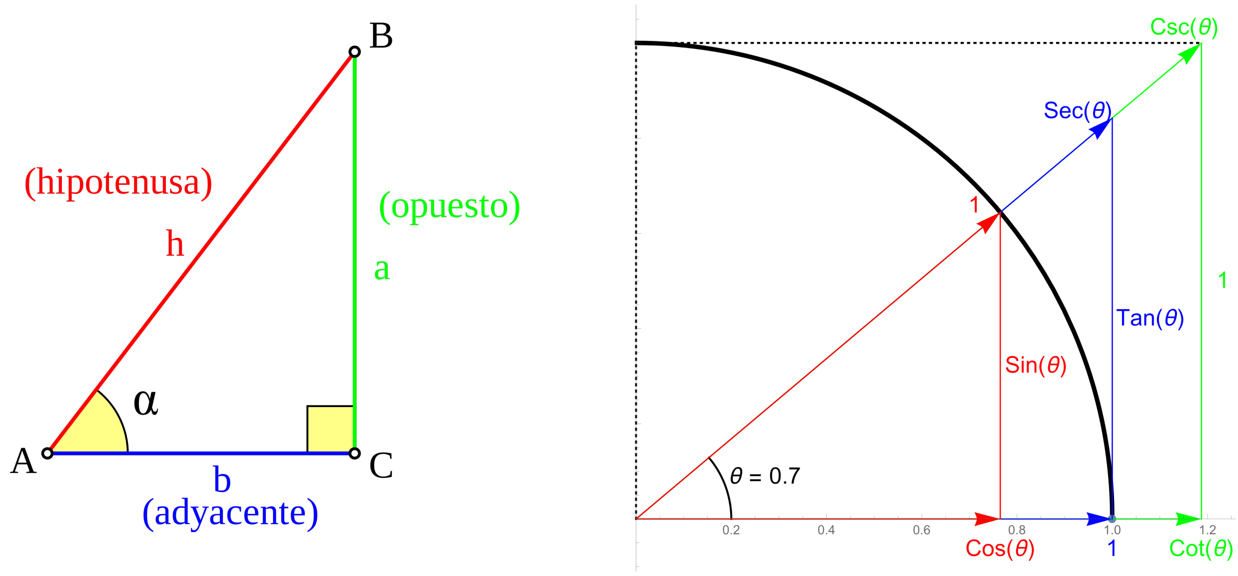


FIGURA 7. Izquierda: Trigonometría de un triángulo rectángulo. Derecha: Las seis funciones trigonométricas en la circunferencia unidad. (Imágenes extraídas de Wikipedia.)

Trigonometric functions
List of trigonometric identities
Trigonometry fundamentals del canal *3Blue1Brown* (⏲ 1:13:17)

64. *(Funciones trigonométricas inversas)* Las funciones trigonométricas no son inyectivas y, por tanto, no se pueden invertir. Sin embargo, se pueden invertir cuando sus dominios se reducen de forma que la restricción sí es inyectiva. La elección del dominio reducido es una convención.

a) Justifica que los rangos de las funciones trigonométricas inversas no se pueden extender más allá de los siguientes:

$$R_{\arccos} = [0,\pi], \qquad R_{\arcsin} = [-\pi/2,\pi/2], \qquad R_{\arctan} = (-\pi/2,\pi/2),$$
$$R_{\mathrm{arcsec}} = [0,\pi]\setminus\{\pi/2\}, \qquad R_{\mathrm{arccsc}} = [-\pi/2,\pi/2]\setminus\{0\}, \qquad R_{\mathrm{arccot}} = (0,\pi).$$

b) Dibuja las gráficas de las seis funciones trigonométricas inversas.

[*Advertencia:* Hay varias formas diferentes para escribir las funciones trigonométricas inversas. Por ejemplo, la inversa del coseno se puede escribir como $\arccos$, como acos o como $\cos^{-1}$. En este documento se usa la primera.]

Inverse trigonometric functions
Trigonometry Basics del canal *Michel van Biezen* (55 vídeos)
Esta serie tiene 55 vídeos, pero basta mirar los vídeos #51, #52, #53 y #54.

65. *(Truco para deshacer cambios trigonométricos)* En el tema *Integración* nos enfrentaremos varias veces al reto de calcular la composición de una de las seis funciones trigonométricas con una de las seis funciones trigonométricas inversas. En total, hay 36 posibles combinaciones, de las cuales 6 son triviales, pues son la función identidad. Hay un truco geométrico para calcular las otras 30. Échale un vistazo al corte propuesto del vídeo abajo enlazado y calcula las siguientes composiciones:

$$\tan(\mathrm{arccsc}\, x), \qquad \sin(\arctan x), \qquad \cos(\arctan x).$$

Lec 28 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 28:45 hasta 32:45)

66. *(Funciones trigonométricas y números complejos)* Usa la fórmula de Euler

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

para probar que las seis funciones trigonométricas están definidas por las fórmulas

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}},$$
$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}.$$

Calcula algún número complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\sin z = 2$.

Math for fun, sin(z)=2 del canal *blackpenredpen* (⏲ 19:31)

67. *(Identidades trigonométricas y números complejos)* Las fórmulas del problema anterior, junto a la fórmula de De Moivre

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

permiten obtener con poco esfuerzo las identidades trigonométricas que se usan en este curso.

a) Prueba, usando la fórmula de Euler, las fórmulas del ángulo suma

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

b) Prueba, usando la fórmula de De Moivre con $n = 2$, las fórmulas del ángulo doble

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta.$$

c) Prueba, usando la fórmula de De Moivre con $n = 3$, las fórmulas del ángulo triple

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

W List of trigonometric identities

Angle Sum formula, proof by complex number del canal *blackpenredpen* (⏲ 5:01)

68. *(Intersecciones del seno con una recta)* Una vez fijado un número $n \in \mathbb{N}$, considera la ecuación

$$\sin x = x/n.$$

a) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación cuando $n = 100$?
b) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación en el caso general?
[*Nota:* Se admiten razonamientos gráficos.]

A Non-standard Trigonometric Equation del canal *SyberMath* (⏲ 7:47)

69. *(¿Es periódica la suma de dos funciones periódicas?)* Sea $\omega, \nu > 0$. Considera la función

$$f(x) = \sin(\omega x) + \sin(\nu x).$$

a) Prueba que si $\omega/\nu \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x)$ es periódica. Explica cómo determinar su periodo.
   Is the sum of two periodic functions still periodic? del canal *blackpenredpen* (⏲ 7:35)
b) Prueba, por reducción al absurdo, que si $\omega/\nu \notin \mathbb{Q}$, entonces $f(x)$ no es periódica.
   [*Indicación:* $f(x)$ función p-periódica $\Rightarrow f(p) = f(0) = 0$ & $f''(p) = f''(0) = 0$.]

70. *(Desigualdad de Aristarco, 250 b. C.)* Prueba que si $0 < \alpha < \beta < \pi/2$ entonces

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}.$$

[*Indicación:* Podéis usar, sin necesidad de probarlas, las desigualdades

$$0 < \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha, \qquad 0 < \sin\beta < \sin\alpha < 1, \qquad 0 < \cos\alpha < \cos\beta < 1.]$$

[*Nota histórica:* Ptolomeo usó esta desigualdad para calcular su Tabla de Cuerdas, que es la primera tabla trigonométrica conocida.]

W Aristarchus's inequality [no usa el TVM]

W Ptolemy's table of chords

Aristarchus' Identity (from 250 BCE!) del canal *Michael Penn* (13:17) [usa el TVM]

71. *(Funciones hiperbólicas)* Las seis funciones hiperbólicas están definidas por las fórmulas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{sech} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

a) Prueba que $\cosh 0 = 1$ y $\sinh 0 = \tanh 0 = 0$.
b) Prueba que $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$.
c) Prueba que $\cosh$ es una función par, mientras que $\sinh$ y $\tanh$ son funciones impares.
d) Prueba las siguientes fórmulas para las derivadas:

$$\cosh' x = \sinh x, \qquad \sinh' x = \cosh x, \qquad \tanh' x = 1 - \tanh^2 x.$$

e) Prueba las identidades básicas

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x, \qquad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x.$$

f) Prueba las fórmulas de la suma de argumentos:

$$\begin{aligned} \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \\ \tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}. \end{aligned}$$

g) Dibuja las gráficas de las seis funciones hiperbólicas.

W Hyperbolic functions

Calculus 2, Ch. 16: Hyperbolic functions del canal *Michel van Biezen* (57 vídeos)

[*Nota:* Esta serie de 57 vídeos es muy interesante, pero no es imprescindible verla entera. Los vídeos con las soluciones de los apartados del problema son los siguientes: a) Vídeo #3; b) Vídeo #3; c) Vídeo #16; d) Vídeos #19, #20 y #21; e) Vídeos #11 y #12; f) Vídeos #14 y #15; g) Vídeos #6, #7, #8, #9 y #10.]

72. *(Funciones hiperbólicas inversas)* Las inversas de las funciones hiperbólicas se suelen expresar en términos del logaritmo (natural) y ciertas raíces cuadradas.

a) Prueba que los rangos de las funciones hiperbólicas son los siguientes:

$$R_{\cosh} = [1, +\infty), \qquad R_{\sinh} = \mathbb{R}, \qquad R_{\tanh} = (-1, 1),$$
$$R_{\operatorname{sech}} = (0, 1], \qquad R_{\operatorname{csch}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad R_{\coth} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

b) Prueba que las seis funciones hiperbólicas inversas son

$$\begin{aligned}
\operatorname{acosh} x &= \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), && x\in[1,+\infty)\\
\operatorname{asech} x &= \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), && x\in(0,1]\\
\operatorname{asinh} x &= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), && x\in\mathbb{R}\\
\operatorname{acsch} x &= \log\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right), && x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\
\operatorname{atanh} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), && x\in(-1,1)\\
\operatorname{acoth} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right), && x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1].
\end{aligned}$$

c) Dibuja las gráficas de las seis funciones hiperbólicas inversas.

[*Advertencia:* Hay varias formas diferentes para escribir las funciones hiperbólicas inversas. Por ejemplo, la inversa del coseno hiperbólico se puede escribir como acosh, como arcosh, como arccosh, como argcosh o como $\cosh^{-1}$. En este documento se usa la primera.]

W Inverse hyperbolic functions

Calculus 2, Ch. 16: Hyperbolic functions del canal *Michel van Biezen* (57 vídeos)

[*Nota:* Los vídeos de esta serie que contienen el cálculo de las funciones inversas son los siguientes: $\operatorname{asinh} \rightsquigarrow$ Vídeo # 29; $\operatorname{acosh} \rightsquigarrow$ Vídeo # 32; $\operatorname{atanh} \rightsquigarrow$ Vídeo # 34; $\operatorname{acoth} \rightsquigarrow$ Vídeo # 36; $\operatorname{acsch} \rightsquigarrow$ Vídeo # 38; $\operatorname{asech} \rightsquigarrow$ Vídeo # 40.]

73. *(Tetración)* Dado un número $x>0$ y un entero $n\geq 0$, la tetración n-ésima de x es igual a x exponenciado por sí mismo n veces y se denota por los símbolos ${}^n x$ o $x\uparrow\uparrow n$. Las primeras tetraciones son

$${}^0x=1,\qquad {}^1x=x,\qquad {}^2x=x^x,\qquad {}^3x=x^{x^x},\qquad {}^4x=x^{x^{x^x}},\ldots.$$

La potenciación no es asociativa, luego importa el orden en que se calculan las exponenciales. Las torres exponenciales de cualquier tetración se evalúan de arriba a abajo. Por ejemplo,

$$256=2^8=2^{2\cdot 2\cdot 2}=\left[\left(2^2\right)^2\right]^2\neq {}^4 2=2^{2^{2^2}}=2^{\left[2^{(2^2)}\right]}=2^{(2^4)}=2^{16}=65536.$$

a) Calcula, usando un ordenador o una calculadora, ${}^n x$ para $x=\sqrt{2}$ y $n\leq 20$. Especula, sin necesidad de justificación alguna, cuál puede ser el valor del límite $\lim_{n\to+\infty} {}^n x$.

b) Encuentra contraejemplos de las siguientes propiedades:

$${}^m({}^n x)={}^{mn}x,\qquad {}^n(xy)={}^n x\,{}^n y.$$

c) Prueba que ${}^n x=x^{({}^{n-1}x)}$ para todo $n\geq 1$.

[*Nota:* Usaremos una tetración infinita para “probar” que $4=2$ en los problemas 271 y 272.]

W Tetration

Tetration del canal *The Taylor series* (⏲ 6:00)

74. *(¿Qué tetración es mayor?)* Considera las tetraciones ${}^4 5$ y ${}^3 9$. Usa el carácter monótono del logaritmo en la base adecuada para determinar, sin calcularlas, cuál de ellas es la mayor.

A peaceful number puzzle del canal *Michael Penn* (⏲ 7:12)

75. *(Contando puntos enteros)* Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva, continua y estrictamente decreciente tal que $\lfloor f(1) \rfloor = n$ y $\lfloor f(n) \rfloor = 1$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función "floor" definida en el problema 19. Dado un conjunto arbitrario A, el símbolo $|A|$ denota su cardinal. Es decir, el número de elementos que contiene el conjunto A.

a) Prueba que $1 \leq \lfloor f(i) \rfloor = |\{j \in \mathbb{Z} : 1 \leq j \leq f(i)\}| \leq n$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
b) Prueba que $1 \leq \lfloor f^{-1}(j) \rfloor = |\{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq j \leq f(i)\}| \leq n$ para todo $j \in \{2, \ldots n\}$.
c) Prueba que $f(i) \geq 1$ para todo $i = \{1, \ldots, n\}$.
d) Sea $A = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq f(i)\}$. Prueba la identidad

$$n + \lfloor f(2) \rfloor + \lfloor f(3) \rfloor + \cdots + \lfloor f(n) \rfloor = |A| = n + \lfloor f^{-1}(2) \rfloor + \lfloor f^{-1}(3) \rfloor + \cdots + \lfloor f^{-1}(n) \rfloor.$$

e) Aplica la identidad anterior para probar que

$$\lfloor n^{1/2} \rfloor + \lfloor n^{1/3} \rfloor + \cdots + \lfloor n^{1/n} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n n \rfloor.$$

1982 Soviet Mathematical Olympiad del canal *Michael Penn* (⏲ De 7:19 hasta 12:54)

76. *(Macedonia de dominios)* Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x + 2}$
b) $f(x) = x^2 e^x$
c) $f(x) = 2 + \sqrt[n]{5 - x}$ en función de $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$
d) $f(x) = 2 + \log(5 - x)$
e) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{1 - \sqrt{x - 5}}$
f) $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x + 3}}$
g) $f(x) = \log\left(x^2 - 2x - 3\right)$

Domain of a function, the 3 common cases to be careful! del canal *blackpenredpen* (⏲ 14:29)
Domain of a function, 3 harder examples del canal *blackpenredpen* (⏲ 14:41)

77. *(Un dominio menguante)* Calcula el dominio de la función $\log x$ compuesta con ella misma n veces. ¿Qué pasa cuando $n \to +\infty$?
Domain or Nomain? del canal *blackpenredpen* (⏲ 8:18)

78. *(Funciones definidas a trozos)* Determina y clasifica todas las discontinuidades de las siguientes funciones.

a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2}, & \text{si } x < 2, \\ \sqrt{x^2 - 2}, & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \sqrt{2x + 5}, & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

b) La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2x + 5}, & \text{si } x < -1, \\ 5, & \text{si } x = -1, \\ \sqrt{x^2 + 2}, & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

Discontinuity, Piecewise Functions & Limits del canal *The Organic Chemistry Tutor* (⏲ 10:09)

79. *(Límites de funciones oscilantes y el teorema del bocadillo)* Prueba que

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\alpha} \sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} |x|^{\beta} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

para todo par de exponentes $\alpha, \beta > 0$. Argumenta que, por contra, el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

no existe.

Squeeze Theorem del canal *The Organic Chemistry Tutor* (⏲ 10:42) [casos $\alpha = 1$ y $\beta = 3$]
Limits of Oscillating Functions and the Squeeze Theorem del canal *Dr. Trefor Bazett* (⏲ 6:58)

80. *(Tres límites trigonométricos)* Prueba, usando el lema del bocadillo y argumentos geométricos, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Limit of sin(x)/x as x approaches 0 del canal *Khan Academy* (⏲ 9:15)
Limit of (1-cos(x))/x as x approaches 0 del canal *Khan Academy* (⏲ 4:04)

81. *(Algunos límites indeterminados)* Calcula los siguientes límites indeterminados sin usar ni la regla de L'Hôpital ni desarrollos de Taylor.

a) *Por cancelación de factores:* $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^4-16}$.

b) *Por racionalización:* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1} - x\right)$.

c) *Por identidades trigonométricas:* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cot(2x)}{\csc x}$.

d) *Por racionalización + cancelación:* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right)$.

[*Nota histórica:* El primer vídeo enlazado contiene un error. Pero lo he seleccionado por formar parte de un conjunto de vídeos que Sal Khan hizó en 2006-2008 para su prima Nadia. Khan Academy es hoy una de las instituciones de educación online más importantes del mundo.]

Limit examples w/ brain malfunction del canal *Khan Academy* (⏲ 15:02) [a), b) & c)]
A Limit Example Combining Multiple Algebraic Tricks del canal *Dr. Trefor Bazett* (⏲ 7:22) [d)]

82. *(Límites indeterminados por cambio de variable)* Calcula los siguientes límites indeterminados sin usar ni la regla de L'Hôpital ni desarrollos de Taylor.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 64} \frac{64-x}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Change of Variable Example 1 del canal *AllThingsMathematics* (⏲ 10:21)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$.

Change of Variable Example 2 del canal *AllThingsMathematics* (⏲ 11:37)

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-1}{x}$.

Change of Variable Example 3 del canal *AllThingsMathematics* (⏲ 5:52)

83. *(Exponencial versus potencias)* Prueba, mediante el cambio de variable $u = \frac{x}{n+1}$ y sin usar la regla de L'Hôpital, que $x^n \ll \mathrm{e}^x$ cuando $x \to +\infty$ para todo exponente $n \in \mathbb{N}$. Es decir, prueba que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[*Indicación:* Podéis usar, sin necesidad de probarlo, que $\mathrm{e}^x > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.]
[*Nota:* En el problema 148f se prueba un resultado equivalente por L'Hôpital.]
A nice splashy limit del canal *Michael Penn* (⏲ 4:11)

84. *(Límites de funciones racionales)* Las funciones racionales son las funciones de la forma

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son dos polinomios a coeficientes reales.

a) *Límites en cero y en el infinito de potencias enteras:* Argumenta que si $l \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^\pm} x^l = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 0 \\ 0, & \text{si } l > 0 \\ +\infty, & \text{si } l < 0 \text{ y } l \text{ es par} \\ \pm\infty, & \text{si } l < 0 \text{ y } l \text{ es impar,} \end{cases} \qquad \lim_{x\to \pm\infty} x^l = \begin{cases} 1, & \text{si } l = 0 \\ 0, & \text{si } l < 0 \\ +\infty, & \text{si } l > 0 \text{ y } l \text{ es par} \\ \pm\infty, & \text{si } l > 0 \text{ y } l \text{ es impar.} \end{cases}$$

b) *Límites en el infinito de una función racional:* Prueba que si el numerador $f(x) = f_j x^j + f_{j-1}x^{j-1} + \cdots + f_1 x + f_0$ tiene grado j y el denominador $g(x) = g_k x^k + g_{k-1}x^{k-1} + \cdots + g_1 x + g_0$ tiene grado k (en particular esto implica que $f_j \neq 0$ y $g_k \neq 0$), entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \frac{f_j}{g_k} \lim_{x\to\pm\infty} x^{j-k}.$$

c) *Límite en un punto de una función racional:* Sea $c \in \mathbb{R}$ una raíz de multiplicidad n y m de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Es decir, existen dos polinomios $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{g}(x)$ tales que

$$f(x) = (x-c)^n \tilde{f}(x), \qquad g(x) = (x-c)^m \tilde{g}(x), \qquad \tilde{f}(c), \tilde{g}(c) \neq 0.$$

Prueba que

$$\lim_{x\to c^\pm} r(x) = \frac{\tilde{f}(c)}{\tilde{g}(c)} \lim_{u\to 0^\pm} u^{n-m}.$$

d) *Primera aplicación:* Calcula los límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + 2x^2 - 1}{3x^3 - x + 7}$$

en función de $n \in \mathbb{N}$.

e) *Segunda aplicación:* Calcula los límites

$$\lim_{x\to 2^\pm} \exp\left(\frac{x-3}{x-2}\right), \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \exp\left(\frac{x-3}{x-2}\right).$$

Computing Limits at Infinity for Rational Functions del canal *Dr. Trefor Bazett* (⏲ 7:07) [d)]
Infinite Limit vs Limits at Infinity of Composite Functions del canal *Dr. Trefor Bazett* (⏲ 9:49) [e)]

85. *(Un límite con la función "floor")* Comprueba que los límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{e}^{2x})\sin(3x)}{|4x|}, \qquad \lim_{x\to 0} \left\lfloor \frac{(1-\mathrm{e}^{2x})\sin(3x)}{|4x|} \right\rfloor.$$

existen pero tienen diferentes valores. [*Nota:* La función "floor" $\lfloor x \rfloor$ se define en el problema 19.]

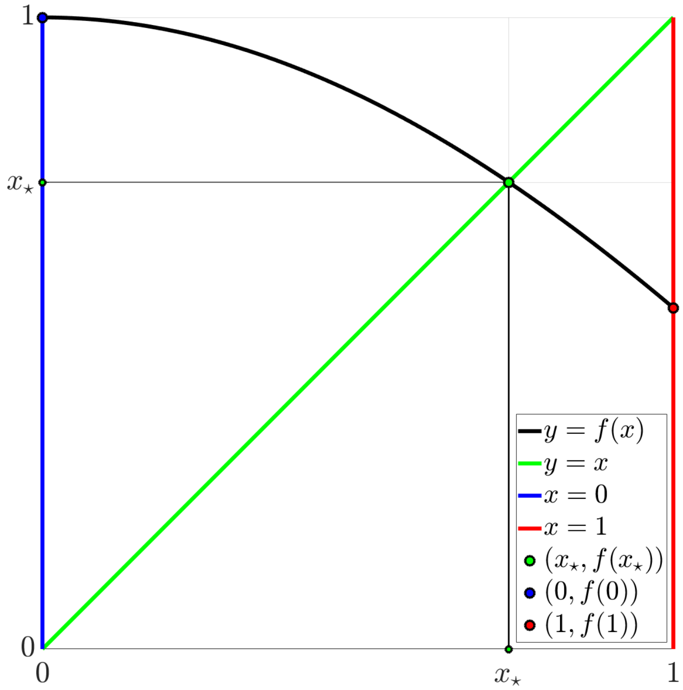


FIGURA 8. Geometría del problema 87 para la función $f(x) = \cos x$ donde $x_\star \approx 0.739085133215161$. El problema 130 explica cómo calcular este punto fijo.

A floored limit del canal *Michael Penn* (16:31)

86. *(El método de bisección)* Queremos aproximar numéricamente todas las raíces reales del polinomio $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) *Primera fase (Detección):* Prueba que $f(x)$ tiene exactamente tres raíces reales α, β y γ y encuentra tres números enteros $j > k > l$ tales que

$$l < \gamma < l + 1, \qquad k < \beta < k + 1, \qquad j < \alpha < j + 1.$$

a) *Segunda fase (Refinado por bisección):* Calcula cada una de las raíces con un error $\epsilon \leq 10^{-2}$.

Too hard for the IMO? Too easy? del canal *Michael Penn* (desde 3:30 hasta 10:50) [incompleto]

87. *(Existencia de un punto fijo)* Prueba que toda función continua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene, al menos, un punto fijo $x_\star \in [0, 1]$. Es decir, prueba que existe algún punto $x_\star \in [0, 1]$ tal que $f(x_\star) = x_\star$. [*Indicación:* Inspírate en la figura 8 para construir una nueva función $g(x)$ a la que aplicar el teorema de Bolzano o del valor intermedio.]

M 04 08 Brouwer's Fixed Point Theorem del canal *Calculus - by Maurice Koster* (4:38)

∀∃ **88.** *(Definición ϵ–δ de límite)* Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de un punto $c \in \mathbb{R}$, aunque podría no estar definida en c. Sea $L \in \mathbb{R}$. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es igual a L si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Prueba, usando esta definición, la veracidad de las siguientes afirmaciones.

a) $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$.

b) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$.

Real Analysis | Precise definition of a limit del canal *Michael Penn* (14:22)

∀∃ **89.** *(Definición ϵ–δ de continuidad)* Una función f definida en un entorno de un punto $c \in \mathbb{R}$, incluido el propio punto c, es continua en c si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

a) Prueba que la función $f(x) = x^2$ es continua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

b) Prueba que la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es discontinua en todo punto $c \in \mathbb{R}$.

Showing a function is (dis)continuous del canal *Michael Penn* (⏲ 12:40)

∀∃ **90.** *(Continuidad uniforme)* Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$.

- La función f es continua en A si y solo si

$$\forall a \in A \text{ y } \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(a, \epsilon) > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- La función f es uniformemente continua en A si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que } a \in A \text{ y } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

a) Prueba que la función $f(x) = 3x + 2$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

b) *(Teorema de Heine-Cantor)* Prueba que si una función $f : K \to \mathbb{R}$ es continua en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, entonces es uniformemente continua en K.

c) Prueba que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, +\infty)$.

d) Prueba que la función $f(x) = x^3$ es continua, pero no uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

W Uniform continuity

Intro to uniform continuity del canal *Michael Penn* (⏲ 14:16)

Uniform continuity and compact sets del canal *Michael Penn* (⏲ 8:44)

The uniform continuity of sqrt(x) del canal *Michael Penn* (⏲ 14:16)

Showing a function is not uniformly continuous del canal *Michael Penn* (⏲ 18:35)

Derivación

Imagination is not always appreciated
(Calvin & Hobbes, creado por Bill Watterson)

¿Qué hay que saber?

Este tema tiene cinco partes: derivadas, gráficas, teoremas, cálculo de límites y optimización.

En la primera, se define la derivada como el límite del cociente del incremento vertical entre el incremento horizontal, se interpreta esa derivada como la pendiente de la recta tangente, se introducen las derivadas de orden superior y se listan las derivadas de las funciones básicas introducidas en el tema anterior. También se presentan las reglas de derivación: derivada de la suma, del producto, del cociente, regla de la cadena, derivada de la inversa y derivación implícita.

En la segunda, se muestra cómo dibujar gráficas detalladas (cortes con los ejes, simetrías, extremos, puntos de inflexión, asíntotas e intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad) de funciones elementales.

En la tercera, se presentan los teoremas de Rolle, del valor medio y de Taylor. Además, se da la forma del resto de Lagrange en el teorema de Taylor. Se listan los polinomios de Maclaurin de las funciones e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1-x)$, $\arctan x$, $1/(1-x)$ y $(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. La última fórmula requiere introducir los coeficientes binomiales generalizados. Luego se explica cómo calcular los polinomios de Taylor de otras funciones a partir de la lista anterior.

En la cuarta, se enuncia la regla de L'Hôpital para resolver las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ y se presenta el método de Taylor para resolver esas mismas indeterminaciones. Finalmente, se enfatiza que si $k \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta$ y $1 < a < b$, entonces

$$k \ll \log(\log x) \ll \log_b x \ll \log_a x \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x \ll x^x \qquad (\text{cuando } x \to +\infty).$$

Todas las funciones anteriores (menos la función constante $y = k$) tienden a infinito cuando $x \to +\infty$, pero cada una crece a una velocidad diferente. Los logaritmos son las funciones más lentas, después van las potencias, seguidas de las exponenciales y, por último, la tetración ${}^2x = x^x$.

En la quinta y última, se plantean y resuelven problemas de optimización en una variable. Se persigue maximizar o minimizar alguna cantidad que puede depender de varios parámetros, pero supondremos, si depende de más de uno, que todos ellos se pueden expresar en función de un único parámetro, lo cual implica que al final estudiamos una función de una única variable.

En principio, un estudiante novato conoce la mayor parte de esos contenidos. Probablemente, las únicas novedades son las funciones hiperbólicas y todo lo que tiene que ver con Taylor: el teorema con la forma del resto de Lagrange, los polinomios y el método para calcular límites. Si veis que no tenéis los conocimientos que se os presuponen, las series de vídeos de Grant Sanderson y Gilbert Strang os pueden servir de recordatorio rápido. He resumido el contenido de cada vídeo de estas dos series en las dos primeras secciones de este documento.

The Essence of Calculus del canal *3Blue1Bronw* (12 vídeos)
Highlights of Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (18 vídeos)

Este tema se corresponde con el contenido de los capítulos tres y cuatro del libro:

Calculus: Volume 1 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*875* páginas)

Al acabar el tema se espera que sepáis:

- Estudiar la derivabilidad de una función dada;
- Derivar toda función elemental (y sus inversas);
- Determinar cuándo conviene derivar implícitamente (y hacerlo, claro);
- Dibujar gráficas de funciones elementales, incluso de aquellas con raíces cuadradas y cúbicas;
- Calcular las asíntotas de funciones elementales, incluso de aquellas con raíces;
- Calcular los extremos absolutos de una función en un intervalo de la forma $[a, b]$;
- Calcular las rectas tangente y normal a una gráfica (o curva implícita) por un punto dado;
- Aplicar los teoremas de Rolle y valor medio en ciertos problemas teóricos;
- Calcular polinomios de Taylor (o Maclaurin) de una función dada;
- Resolver las indeterminaciones de ciertos límites por L'Hôpital o Taylor; y
- Plantear y resolver problemas de optimización.

Problemas

91. *(100 Derivadas)* Practica tus habilidades calculando derivadas resolviendo algunas de las cien derivadas del documento abajo enlazado. Es una lista preparada por Steve Chow y completamente resuelta en un vídeo de toma única que dura más de seis horas.

Si no os sale alguna derivada, consultad los "timestamps" listados en la información del vídeo (debéis clicar en SHOW MORE) para ver cuándo empieza Steve a resolver esa derivada concreta.

100 derivatives de Steve Chow (*13* páginas)

100 derivatives del canal *blackpenredpen* (⏲ 6:38:12)

92. *("Demostración": $2 = 1$)* Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".

Todo el mundo sabe que $2^2 = 2+2$, $3^2 = 3+3+3$, $4^2 = 4+4+4+4$ y, en general,

$$x^2 = x + x + \overset{x \text{ veces}}{\cdots} + x.$$

Derivando ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos que

$$2x = 1 + 1 + \overset{x \text{ veces}}{\cdots} + 1 = x.$$

Y simplificando la variable x, obtenemos que $2 = 1$.

"Prove" 2 = 1 Using Calculus Derivatives del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:20)

93. *(Trigonometría y derivadas)*

a) En el problema 80 vimos, sin usar la regla de L'Hôpital, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Usa esos límites y las fórmulas trigonométricas del ángulo suma para probar que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x.$$

Derivative of $\sin x$ and $\cos x$ del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 34:38)

b) Échale un vistazo al siguiente vídeo, donde se da una prueba visual de la derivada del seno.

Visual Calculus: Derivative of sinus is cosinus del canal *Think Twice* (⏲ hasta 2:22)

94. *(Geometría y derivadas)*

a) Prueba que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$ usando que x^2 es el área del cuadrado de lado x.

b) Prueba que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1/x) = -1/x^2$ usando que el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(x,0)$, $(x,1/x)$ y $(0,1/x)$ tiene área uno.

c) Prueba que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sqrt{x}\big) = -1/2\sqrt{x}$ usando que x es el área del cuadrado de lado $\sqrt{x}$.

d) Prueba que $\big(g(x)\cdot h(x)\big)' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$ usando que $g(x)h(x)$ es el área del rectángulo de lados $g(x)$ y $h(x)$.

e) Prueba que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2$ usando que x^3 es el volumen del cubo de lado x.

Derivative formulas through geometry del canal *3Blue1Brown* (⏲ desde 2:30 hasta 12:35)

Visualizing the chain rule and product rule del canal *3Blue1Brown* (⏲ desde 4:16 hasta 8:25)

95. *(Derivada de $f(x)^{g(x)}$)* Sean $f, g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ dos functiones positivas derivables.

a) Calcula la derivada de $f(x)^{g(x)}$ usando la identidad $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log f(x)}$.

b) Calcula la derivada de $y = f(x)^{g(x)}$ derivando la ecuación implícita $\log y = g(x)\log f(x)$.

c) Calcula la derivada de $y = x^{1/\log x}$. ¿Qué conclusión se extrae?

Derivative of $f(x)^{g(x)}$ del canal *blackpenredpen* (⏲ 7:05)

96. *(Derivadas de algunas tetraciones)* Calcula las derivadas de

$$ {}^2x = x^x, \qquad {}^3x = x^{(x^x)}, \qquad {}^3(\sin x) = (\sin x)^{[(\sin x)^{(\sin x)}]}. $$

[*Indicación:* Usa la regla de la cadena para calcular la última.]
derivative of tetration of x, (hyperpower) del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:57)
Crazy Derivative del canal *blackpenredpen* (⏲ 8:13) [sin la regla de la cadena]

97. *(Derivada de la inversa)* Sabemos que si $y = f(x)$ es una función invertible y su inversa es $x = f^{-1}(y)$, entonces

$$ f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y. $$

a) Calcula la derivada del logaritmo natural de dos formas diferentes usando las dos identidades anteriores.
b) Calcula las derivadas del arco seno y el arco coseno. ¿Qué se puede deducir de la suma de estos dos arcos?

Derivatives of $\log y$ and $\arcsin y$ del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 25:50)

98. *(Dos derivadas confusas de funciones hiperbólicas inversas)*
a) Prueba que la inversa de la función hiperbólica

$$ y = f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} $$

es la función

$$ x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right). $$

Calcula el dominio de la función inversa f^{-1}.
b) Prueba que la inversa de la función hiperbólica

$$ y = g(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} $$

es la función

$$ x = g^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right). $$

Calcula el dominio de la función inversa g^{-1}.
c) Prueba las identidades

$$ \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \big(g^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{1-x^2}. $$

¿Se puede deducir que la diferencia $f^{-1}(x) - g^{-1}(x)$ es constante?

The confusing derivatives del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:31)

99. *(Derivadas de las potencias racionales)* Calcula la derivada de la función $y = f(x) = x^{m/n}$ derivando la ecuación implícita $y^n = x^m$.
Lec 5 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 8:50)

100. *(Dos formas de calcular una derivada)* Considera la función

$$y = f(x) = \prod_{n=1}^{16}\left(x + \frac{1}{n}\right) = (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{15}\right)\left(x+\frac{1}{16}\right).$$

a) Calcula el valor de $f'(0)$ derivando directamente.
b) Calcula el valor de $f'(0)$ derivando implícitamente la relación

$$\log y = \log f(x) = \sum_{n=1}^{16} \log\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Product Rule with 16 Factors del canal *Mu Prime Math* (⏲ 8:08) [solo a)]

101. *(Una escalera que cae)* Tenemos una escalera de cinco metros de longitud apoyada contra una pared vertical. El punto de apoyo está a cuatro metros de altura. En un momento dado, la escalera resbala y empieza a caer. Su punto de apoyo en la pared se acerca al suelo y su punto de apoyo en el suelo se aleja de la pared. Supón que la velocidad inicial a la que cae el punto de apoyo en la pared es de un metro por segundo. ¿Cuál es la velocidad inicial a la que se desplaza el punto de apoyo en el suelo?
Implicit differentiation, what's going on here? del canal *3Blue1Brown* (⏲ desde 3:18 hasta 7:17)

102. *(Un depósito que se llena)* Tenemos un depósito con forma de cono invertido (o sea, con la forma de un cucurucho) de base cuatro metros y altura diez metros. Se está llenando con agua a una velocidad de dos metros cúbicos por segundo. ¿A qué velocidad sube el nivel de agua cuando el agua tiene altura cinco? Es decir, si $V = V(t)$ y $h = h(t)$ son el volumen y la altura en el instante t, se pide calcular $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 5$ sabiendo que $\frac{dV}{dt} \equiv 2$.
Lec 13 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 6:04 hasta 18:45)

103. *(Un aro y una cuerda)* Un pequeño, pero pesado, aro se mueve a lo largo de una cuerda no elástica de longitud L, como si fuera la cuenta de un collar. Clavamos los extremos de la cuerda en los puntos $P = (0, 0)$ y $Q = (a, b)$ de una pared vertical, con $a > 0$. Obviamente, $L^2 > a^2 + b^2$. El sistema alcanza el equilibrio cuando el aro está en la posición de menor altura posible, pues eso minimiza la energía potencial. Prueba, derivando implícitamente, que en ese equilibrio los dos segmentos de la cuerda forman el mismo ángulo con la vertical.
[*Nota 1:* No se pide calcular la posición exacta del aro.]
[*Nota 2:* Las posibles posiciones del aro forman una elipse, ver el problema 139.]
Lec 13 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 18:55 hasta 40:40)

STOP **104.** *(La primera derivada implícita de la historia por Isaac Newton, 1666)* Considera la curva implícita

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - \alpha x + \beta = \gamma y^2\right\},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\gamma \neq 0$. Una partícula se mueve sobre C y conocemos su posición $\big(x(t), y(t)\big)$ para cada instante $t \in \mathbb{R}$. Por definición, su velocidad en el instante t es el vector $\big(p(t), q(t)\big)$ dado por

$$p(t) = \frac{dx}{dt}(t), \qquad q(t) = \frac{dy}{dt}(t).$$

a) Supon que $(x, y) \in C$ y $(x + p\Delta t, y + q\Delta t) \in C$, donde Δt es un pequeñísimo lapso de tiempo. Escribe las dos ecuaciones implícitas resultantes, aplica el teorema del binomio y deduce que en el límite $\Delta t \to 0$ se cumple que

$$3x^2 p - \alpha p = 2\gamma y q \Rightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{q}{p} = \frac{3x^2 - \alpha}{2\gamma y}.$$

b) Deriva implícitamente la ecuación de la curva y obtén la ecuación anterior.

Newton's quarantine notes that changed math forever del canal *Tibees* (⏲ 14:43)

105. *(Recta tangente a una curva implícita)* Considera la curva implícita

$$y^4 + xy^2 - 2 = 0.$$

a) Expresa el valor de y en función de la variable x. ¿Te parece fácil derivar esa expresión?
b) Expresa el valor de la derivada y' en términos de los valores de x e y derivando implícitamente.
c) Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva implícita en el punto $(1, 1)$.

Lec 5 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 20:10 hasta 28:50)

106. *(Tangentes al folium de Descartes)* Considera la curva implícita

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 3xy\right\}.$$

a) Expresa el valor de la derivada y' en términos de los valores de x e y derivando implícitamente.
b) Calcula la ecuación $y = mx + n$ de la recta tangente a la curva C en el punto $(3/2, 3/2)$.
c) Encuentra el punto $P = (a, b) \in C$ del primer cuadrante donde la recta tangente es vertical, tal y como se representa en el dibujo izquierdo de la figura 9.

W Folium de Descartes

Folium of Descartes del canal *Ben Kohn* (⏲ 5:22) [a) & b)]

Folium Descartes Vertical Tangent Implicit Differentiation del canal *Anil Kumar* (⏲ 8:22) [a) & c)]

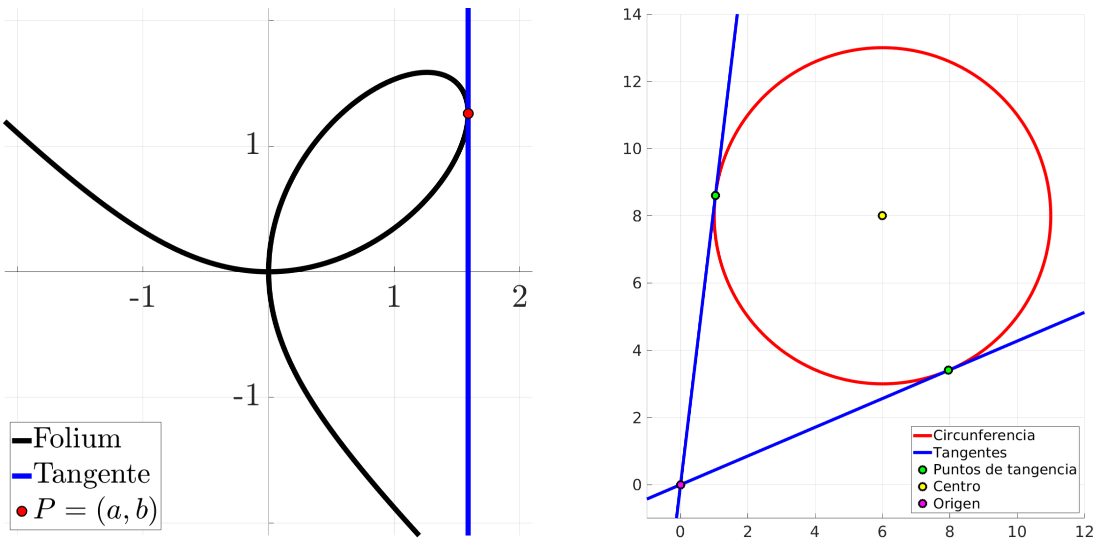


FIGURA 9. Izquierda: Geometría del problema 106. Derecha: Geometría del problema 107.

107. *(Ángulo entre dos rectas tangentes a una circunferencia)* Considera la circunferencia centrada en $(6, 8)$ de radio 5, ver el dibujo derecho de la figura 9. Es decir, la curva determinada por la ecuación implícita

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 25.$$

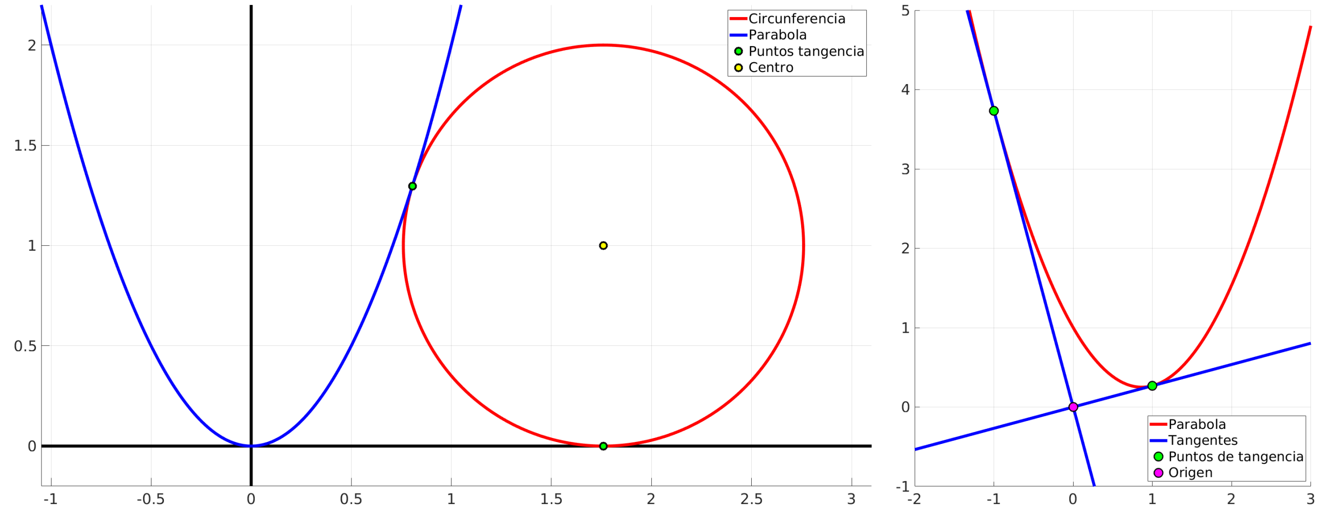


FIGURA 10. Izquierda: Geometría del problema 108. Derecha: Geometría del problema 109.

a) Expresa el valor de la derivada y' en términos de los valores x e y derivando implícitamente.
b) Calcula el ángulo que forman las dos tangentes a esta circunferencia que pasan por el origen sin usar un razonamiento geométrico.
c) (Opcional.) Calcula el ángulo mediante un razonamiento geométrico.

angle between tangents del canal *Michael Penn* (⏲ 11:55)

108. *(Tangencia entre una parábola y una circunferencia)* Una circunferencia de radio uno contenida en el primer cuadrante es tangente al eje x en un punto de abcisa h y a la parábola $y = 2x^2$ en un punto de abcisa a, ver el dibujo izquierdo de la figura 10. Calcula a y h.

A circle is tangent to a parabola del canal *SyberMath* (⏲ 20:09)

109. *(Rectas tangentes a una parabola)* El vértice de la parábola $y = x^2 + bx + 1$ está en el primer cuadrante y las dos rectas tangentes a la parábola que pasan por el origen son perpendiculares, ver el dibujo derecho de la figura 10. Calcula b. Da la ecuación de las dos rectas tangentes.

A Parabola with Two Tangents del canal *SyberMath* (⏲ 7:26)

110. *(Gráficas que se tocan en un solo punto)*

a) Existe una pendiente $m_\star \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación

$$\mathrm{e}^x = mx$$

no tiene ninguna raíz si $m < m_\star$, tiene una única raíz $x = x_\star$ si $m = m_\star$ y tiene dos raíces si $m > m_\star$. Calcula $m_\star$ y $x_\star$.

A Non-Standard Equation with One Solution del canal *SyberMath* (⏲ 8:41)

b) Existe un valor $a_\star > 0$ tal que la ecuación

$$2\log(x+3) = \log(ax)$$

no tiene ninguna raíz si $0 < a < a_\star$, tiene una única raíz $x = x_\star$ si $a = a_\star$ y tiene dos raíces si $a > a_\star$. Calcula $a_\star$ y $x_\star$.

A Log Equation with Only One Solution del canal *SyberMath* (⏲ 12:29) [pero no usa derivadas]

c) Una vez fijada una pendiente arbitraria $m > 0$, existe un parámetro $k_\star > 0$ que hace que la ecuación

$$k\sqrt{x} = mx + 1$$

tenga una única raíz $x_\star$. Expresa $k_\star$ y $x_\star$ en función de m.

Functions with a Common Tangent del canal *SyberMath* (⏲ 8:34)

111. *(Gráfica de una cúbica)* Dibuja la gráfica detallada de la cúbica $f(x) = x^3 - x^2$.

Max and Min and Second Derivative del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 14:30 hasta 23:00)

112. *(Cúbica con una única raíz real)* ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ tiene la cúbica

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + k$$

una única raíz real?

Exam Problem: Cubic Polynomial w/ 1 Real Root del canal *Eddie Woo* (⏲ 9:54)

113. *(Una función sin puntos críticos)* Dibuja la gráfica detallada de la función racional

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Lec 11 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 19:10)

114. *(Gráficas de funciones racionales)* Dibuja las gráficas detalladas de estas funciones racionales. Determina dominio, rango, extremos, puntos de inflexión y asíntotas.

a) $r(x) = \dfrac{4x+3}{x-1}$.

b) $r(x) = \dfrac{3}{x-2}$.

c) $r(x) = \dfrac{2x^2-4x+5}{x^2-2x+1}$.

d) $r(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-2}$.

e) $r(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{x-3}$.

f) $r(x) = \dfrac{5x}{x^2-4}$.

[*Indicación:* Usa los resultados probados en el problema 84.]

Graphing exponential, logarithmic functions del canal *Michel van Biezen* (77 vídeos)

[*Nota:* Esta serie tiene 77 vídeos, pero basta mirar los vídeos #24, #25, #26, #27, #28 y #29.]

STOP **115.** *(Condiciones necesarias y/o suficientes de crecimiento)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Queremos relacionar las siguientes propiedades:

P1) f es creciente en $\mathbb{R}$. Es decir, $f(b) < f(a)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b < a$.

P2) f es no decreciente en $\mathbb{R}$. Es decir, $f(b) \leq f(a)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $b < a$.

P3) $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4) $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Prueba que **P1)** $\Rightarrow$ **P2)** y **P3)** $\Rightarrow$ **P4)**.

b) Prueba, usando el teorema del valor medio, que **P3)** $\Rightarrow$ **P1)** y **P4)** $\Rightarrow$ **P2)**.

c) Prueba, usando la definición de derivada, que **P1)** $\Rightarrow$ **P4)** y **P2)** $\Rightarrow$ **P4)**.

d) Prueba, mediante un contraejemplo, que **P2)** $\not\Rightarrow$ **P1)**, **P2)** $\not\Rightarrow$ **P3)**, **P4)** $\not\Rightarrow$ **P3)** y **P4)** $\not\Rightarrow$ **P1)**.

e) Prueba, mediante un contraejemplo, que **P1)** $\not\Rightarrow$ **P3)**.
[*Advertencias:* No es lo mismo decir que una función es no decreciente que decir que una función no es decreciente. En algunos libros las funciones que cumplen **P1)** se denominan estrictamente crecientes y las que cumplen **P2)** se denominan crecientes. Hay que tener cuidado.]
Is x^3 increasing at 0? del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:12) [contraejemplo de **P1)** $\not\Rightarrow$ **P3)**]

116. *(Concavidad & convexidad)* Dibuja las gráficas detalladas de las siguientes funciones. Determina los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.
a) $f(x) = 5 + 12x - x^3$.
b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
c) $f(x) = \cos x$ en el dominio $x \in [0, 2\pi]$.
Slope, Concavity, Max, Min, and Inflection Point del canal *Michel van Biezen* (4 vídeos)

117. *(Campana de Gauss)* Considera la función $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
a) Calcula su dominio y su rango.
b) Determina sus intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) Determina su asíntota.
d) Dibuja su gráfica.
The Bell curve del canal *blackpenredpen* (⏲ 9:15)

118. *(Gráfica de $x\mathrm{e}^x$)* Considera la función de $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
a) Calcula su dominio y su rango.
b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) Determina su asíntota.
d) Dibuja su gráfica.
graph of $y = xe^x$ del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:24) [no estudia concavidad/convexidad]

☣ **119.** *(La función W de Lambert)* Sea $W(x)$ la inversa de la función $f(x) = x\mathrm{e}^x$ del problema 118 cuando restringimos la función $f(x)$ al mayor intervalo cerrado donde es creciente.
a) Prueba que su dominio es $D_W = [-1/\mathrm{e}, +\infty)$ y su rango es $R_W = [-1, +\infty)$.
b) Dibuja la gráfica de $W(x)$.
c) Calcula los valores especiales $W(-1/\mathrm{e})$, $W(2\log 2)$, $W(0)$, $W(\mathrm{e})$ y $W(\mathrm{e}^{1+\mathrm{e}})$.
d) Considera las ecuaciones $x + \mathrm{e}^x = 2$, $x^x = 2$ y $x^2\mathrm{e}^x = 2$. Empresa una solución de cada ecuación en términos de raíces cuadradas, logaritmos, exponenciales y la propia función W.
e) Expresa la derivada $W'(x)$ en términos de $W(x)$.
f) Calcula el límite lateral $\lim_{x\to(-1/e)^+} W'(x)$. ¿Qué se deduce sobre la gráfica de $W(x)$?
W Lambert W function
Lambert W Function del canal *blackpenredpen* (⏲ hasta 32:40)

120. *(Una gráfica con $\mathrm{e}^{1/x}$)* Considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1 + \mathrm{e}^{1/x}}.$$

a) Calcula los límites laterales $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$.
b) Calcula los límites en el infinito $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.
c) Dibuja su gráfica y determina su rango.
My new favorite function? del canal *Michael Penn* (⏲ 8:43)

121. *(Gráfica de $x/\log x$)* Considera la función $f(x) = x/\log x$.

a) Calcula su dominio y su rango.
b) Determina sus intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) ¿Qué pendiente tiene la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 0$?
d) Dibuja su gráfica.

Lec 11 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 26:35)

122. *(Comparando potencias)* Dados dos números positivos a y b queremos saber cuál de las potencias a^b y b^a es mayor. Por ejemplo, ¿$9^{10} > 10^9$? ¿$\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}$?

a) Dibuja la gráfica de la función $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por
$$f(x) = x^{1/x}.$$
En particular, determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y su asíntota horizontal.
b) Deduce que $\mathrm{e} \le a < b \Rightarrow a^b > b^a$ y $0 < a < b \le \mathrm{e} \Rightarrow a^b < b^a$.
c) Deduce que dado $a \in (1, \mathrm{e})$ arbitrario, existe un único $b > \mathrm{e}$ tal que $a^b = b^a$. Por contra, deduce que si $a \in (0, 1]$, entonces no existe ningún $b \ne a$ tal que $a^b = b^a$.

[*Nota:* Este problema está estrechamente relacionado con el problema 149.]

Are you tired of this kind of questions (a^b vs. b^a)? del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:41)
e^pi vs pi^e del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:58)

123. *(Máximo de una función de variable discreta)* Considera la función $f(x) = x^{1/x}$ del problema 122. Calcula el máximo de $f(n)$ cuando restringimos el argumento a valores $n \in \mathbb{N}$.

one from Brazil del canal *Michael Penn* (⏲ 10:54)

124. *(Raíces de un polinomio de grado diez)* Considera el polinomio
$$Q(x) = x^5 - x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 48 \in \mathbb{Z}[x].$$

a) Comprueba que $\alpha = 2$ es la única raíz racional de $Q(x)$.
b) Prueba que $Q(x) = (x-2)\big(R(x) + S(x)\big)$ donde
$$R(x) = x^4 + 10x^2 + 24, \qquad S(x) = x^3 - 4x.$$
c) Calcula el valor mínimo que toma el polinomio $S(x)$ en el intervalo $[0, +\infty)$.
d) Deduce que el polinomio de grado diez $P(x) = Q(x^2)$ solo tiene dos raíces reales.

Finding the real roots of a 10th degree polynomial del canal *Michael Penn* (⏲ 10:46)

125. *(Raíces de un polinomio de grado ocho)* Considera el polinomio
$$P(x) = x^8 - x^7 + x^2 - x + 15.$$

a) Factoriza el polinomio $Q(x) = x^8 - x^7 + x^2 - x$ en $\mathbb{R}[x]$.
b) Prueba, usando el teorema de Bolzano y la desigualdad triangular, que $P(x)$ no tiene ninguna raíz real.

Prove that $x^8 - x^7 + x^2 - x + 15 = 0$ has no real solutions del canal *Math For Life* (⏲ 9:04)

126. *(Máximo de una función con valores absolutos)* Sea $a > 0$. Calcula el valor máximo que alcanza la función
$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}.$$

from the GOAT calculus book! del canal *Michael Penn* (⏲ 12:20)

127. *(Suma de las seis funciones trigonométricas)* Buscamos el mínimo absoluto de la función

$$f(x) = \big|\cos x + \sin x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x\big|.$$

a) Calcula los extremos absolutos y el rango de la función $s(x) = \cos x + \sin x$.
b) Dibuja la gráfica de la función $g(s) = |s + 2/(s-1)|$.
c) Prueba que $f(x) = g(s(x))$.
d) Calcula el mínimo absoluto de $f(x)$.

Extreme Trig Question del canal *blackpenredpen* (⏲ 17:09) [con un razonamiento incompleto]

128. *(Aproximaciones lineales)* Sabemos que si $f(x)$ es una función dos veces derivable en un entorno de un punto a, entonces para todo $x \approx a$ existe un punto $c \in \langle a, x\rangle$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$

Esto significa que la aproximación lineal $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ tiene un error $f''(c)(x-a)^2/2$. [*Nota:* El símbolo $\langle a, x\rangle$ denota al intervalo de extremos a y x.]

a) Calcula una aproximación lineal de $\sqrt{9.06}$ y da una cota superior de su error.
b) Calcula una aproximación lineal de $\mathrm{e}^{0.01}$ y da una cota superior de su error.

Linear Approximation/Netwon's Method del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 31:40)

129. *(Efectos de la relatividad en los satélites GPS)* El sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés) depende de la precisión de los relojes colocados en cada uno de los 24 satélites que lo forman. La teoría especial (respectivamente, general) de la relatividad afirma que un reloj mide el tiempo más lentamente contra más rápidamente se mueve (respectivamente, contra más cerca está de un objeto masivo). Por tanto, los relojes de esos satélites van más lentos que los relojes situados en la Tierra por el primer motivo, pero van más rápidos por el segundo motivo. Queremos calcular cuantos microsegundos diarios ganan o pierden esos relojes.

a) Calcula la aproximación lineal $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ de la función

$$f(x) = \sqrt{1-\alpha x}\,\frac{\sqrt{1-\beta x}}{\sqrt{1-\gamma x}},$$

donde α, β y γ son parámetros positivos.

b) Se sabe que la relación entre el tiempo t sobre la Tierra y el tiempo $t_\star$ sobre los satélites viene dada por la fórmula

$$\begin{aligned} t_\star &= f(1/c^2)t, \\ \alpha &= v^2, \\ \beta &= 2GM/R_\star, \\ \gamma &= 2GM/R, \end{aligned}$$

donde los parámetros físicos involucrados, medidos en unidades del S.I., son:

- Velocidad orbital de los satélites: $v \approx 3874$,
- Velocidad de la luz: $c \approx 2.998 \times 10^8$,
- Constante de gravitación universal: $G \approx 6.674 \times 10^{-11}$,
- Masa de la Tierra: $M \approx 5.974 \times 10^{24}$,
- Radio (promedio) de la Tierra: $R \approx 6357000$, y
- Radio orbital (promedio) de los satélites: $R_\star \approx 26541000$.

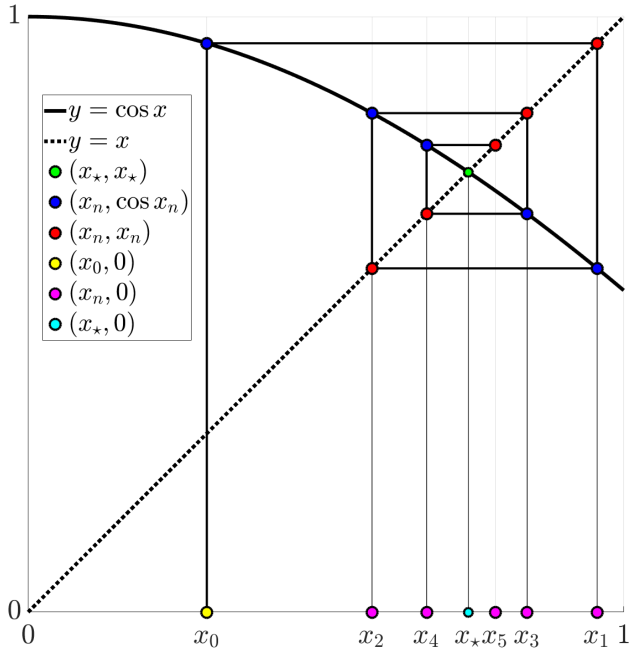


FIGURA 11. Geometría del problema 130 empezando con la aproximación inical $x_0 = 0.3$.

Calcula una aproximación del factor ϵ, con $|\epsilon| \ll 1$, tal que

$$t_\star \approx (1+\epsilon)t.$$

c) Comprueba que el reloj de un satélite gana unos 38.64 microsegundos al día, usando que un día tiene $24 \times 60 \times 60 \times 10^6 = 86400000000$ microsegundos.

[*Advertencia:* En el vídeo abajo enlazado solo se tiene en cuenta la relatividad especial, que, como veréis, no es la parte más importante. La entrada de Wikipedia es más completa.]

W Error analysis for the Global Positioning System

Lec 9 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (desde 29:48 hasta 35:40)

130. *(Cálculo de puntos fijos por iteración)* Considera la ecuación

$$\cos x = x.$$

a) Prueba que esta ecuación tiene una única raíz $x_\star$, la cual está contenida en el intervalo $[0,1]$. Diremos que $x_\star$ es un punto fijo de la función $g(x) = \cos x$, pues $g(x_\star) = x_\star$.

b) Realiza el siguiente experimento con una calculadora. Escoge un número arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}$ y aprieta repetidamente la tecla `cos`, generando así la sucesión de valores

$$x_{n+1} = \cos x_n, \qquad \forall n \geq 0.$$

Comprueba que la sucesión (x_n) siempre tiende al punto fijo

$$x_\star \approx 0.73908513321516064165531208767387340401341175890075746496568.$$

c) Justifica, suponiendo que la aproximación inicial x_0 está suficientemente cerca del punto fijo $x_\star$ y usando la aproximación lineal $\cos x_n \approx \cos x_\star - (\sin x_\star)(x_n - x_\star)$, el comportamiento en forma de telaraña de los iterados mostrados en la figura 11.

[*Indicación:* Mira el problema 44.]

W Fixed-point iteration

Fixed Point Iteration del canal *Oscar Veliz* (4:05) [Óscar estudia otra iteración $x_{n+1} = g(x_n)$.]

n	x_n
0	0.50000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
1	0.56445433758540767698559970539881752904455171175874735286026113525787850402056464
2	0.56356936689612354230170148707074192985573315740948568921340056959938313165189082
3	0.5635692042255211408296925710305976675695268245515825408779825892233709750843780 1
4	0.56356920422551564249050180714141373452685233439351000941040434324401988079321938
5	0.56356920422551564249050180713513204506107447243268729580349175038146235375138758
6	0.56356920422551564249050180713513204506107447243268729580348355127861115286259001
7	0.56356920422551564249050180713513204506107447243268729580348355127861115286259001

CUADRO 6. Sucesivas aproximaciones de Newton a la raíz de la ecuación $2\cos x = 3x$.

131. *(Método de Newton)* Sea $f(x)$ una función derivable en un entorno de un punto a tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0$. Es decir, a es una raíz simple de la función $f(x)$. No conocemos el valor exacto de a, pero tenemos una aproximación inicial: $a \approx x_0$. El método de Newton para calcular aproximaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ cada vez más refinadas de la raíz consiste en aplicar la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \forall n \geq 0.$$

a) Prueba que la recta tangente a la función en el punto x_n corta al eje de abcisas en el punto x_{n+1}.
b) Prueba que la función $f(x) = 3x - 2\cos x$ tiene una única raíz a y, además, $0 < a < 1$.
c) Calcula las aproximaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a partir de la aproximación inicial $x_0 = 1/2$, hasta que no se aprecie ningún cambio en los decimales del resultado. Escribe los resultados como en el cuadro 6. Probablemente, vuestra calculadora u ordenador no serán capaces de trabajar con tantas cifras.
d) ¿Cuántos decimales exactos tiene cada aproximación?

[*Nota:* El método de Newton tiene convergencia cuadrática. Es decir, cuando funciona, el número de decimales correctos se (aproximadamente) dobla tras cada iteración.]

Linear Approximation/Netwon's Method del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 31:40)
Using Newton's Method del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 7:45)

132. *(La constante Ω)* Considera la función $f(x) = xe^x$ del problema 118.
a) Prueba por Bolzano y Rolle que $\exists!\Omega \in (0,1)$ tal que $f(\Omega) = 1$. Esta raíz se denomina constante Ω.
b) Prueba que $W(1) = \Omega$, donde $W(x)$ es la función W de Lambert definida en el problema 119.
c) Calcula mediante el método de Newton las diez primeras cifras de la constante

$$\Omega \approx 0.56714329040978387299996866221035554975381578718651250813513107922304579 3.$$

W Omega constant
Newton's method and Omega Constant del canal *blackpenredpen* (⏲ 21:57)

133. *(Raíces de polinomios por Newton)* Sea $a \in \mathbb{R}$ una raíz simple de un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Sea $x_0 \approx a$ una aproximación inicial de esa raíz. El método de Newton presentado en el problema 131 nos sugiere aplicar la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \qquad \forall n \geq 0,$$

para obtener sucesivas aproximaciones de la raíz a.

a) Justifica que, una vez fijados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, podemos calcular la raíz $\sqrt[k]{a}$ aplicando la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right), \qquad \forall n \geq 0.$$

b) Calcula las aproximaciones sucesivas de las raíces cuadradas, cúbicas y cuárticas de $a = 17$ a partir de la aproximación inicial $x_0 = a/2$, hasta que no se aprecie ningún cambio en los decimales del resultado.

c) Prueba que el polinomio $P(x) = x^3 - 3x - 1$ tiene tres raíces reales simples $\alpha < \beta < \gamma$ tales que $\alpha \in (-2,-1)$, $\beta \in (-1,0)$ y $\gamma \in (1,2)$. Calcula aproximaciones sucesivas de las raíces α, β y γ empezando por las aproximaciones iniciales $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$, respectivamente, hasta que no se aprecie ningún cambio en los decimales de los resultados. ¿Qué pasa cuando tomamos como aproximación inicial $x_0 = \pm 1$?

Approximations. The engineering way del canal *Zach Star* (⏲ 13:48)

134. *(El polinomio de Wilkinson)* Consideramos el polinomio de grado veinte

$$W(x) = \prod_{n=1}^{20}(x-n) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot\cdots\cdot(x-19)\cdot(x-20).$$

Queremos testar un método numérico (por ejemplo, Newton) calculando su raíz simple $\alpha_0 = 20$. Sin embargo, como el *hardware* del ordenador no es capaz de almacenar ciertos números de forma exacta (ya que opera con un número finito de cifras binarias), el polinomio con el que trabaja el ordenador no es exactamente $W(x)$, sino que sus coeficientes tienen un pequeño error, que recibe el nombre de "épsilon de la máquina". Ese error es $\epsilon = 2^{-23}$ cuando se opera en precisión simple.

Suponemos, para simplificar el análisis, que el único coeficiente inexacto es el de grado 19. Es decir, suponemos que el ordenador trabaja con el polinomio

$$P(x) = W(x) - \epsilon x^{19}.$$

Estamos relativamente tranquilos, pues el teorema de la función implícita (es de otra asignatura) afirma que si $|\epsilon|$ es "suficientemente pequeño", entonces $P(x)$ tiene una raíz $\alpha(\epsilon)$ "cerca" de 20. Concretamente, se cumple la aproximación lineal

$$\alpha(\epsilon) \approx \alpha(0) + \alpha'(0)\epsilon = 20 + \alpha'(0)\epsilon.$$

a) Prueba que

$$\alpha'(0) = \frac{20^{19}}{19!} \approx 4.3 \times 10^7$$

derivando implícitamente la ecuación

$$\big(\alpha(\epsilon)-1\big)\cdot\big(\alpha(\epsilon)-2\big)\cdot\cdots\cdot\big(\alpha(\epsilon)-19\big)\cdot\big(\alpha(\epsilon)-20\big) - \epsilon\big(\alpha(\epsilon)\big)^{19} = 0.$$

b) Deduce la estimación del error $\alpha(\epsilon) - 20 \approx \alpha'(0)\epsilon > 5$ cuando $\epsilon = 2^{-23}$.

[*Nota:* En realidad, $\alpha(\epsilon) \approx 20.8$. Es decir, el error es de "solo" 0.8 unidades. Pero sigue siendo chocante que un cambio tan pequeño en un único coeficiente afecte tanto a (alguna de) las raíces. James H. Wilkinson escribió en 1963 la siguiente frase en el artículo donde publicó su hallazgo:

Speaking for myself I regard it as the most traumatic experience in my career as a numerical analyst.

La moraleja es que es difícil calcular raíces de polinomios de grados elevados. ¡Cuidado!]

W Wilkinson's polynomial

W Machine epsilon

135. *(Una aplicación del teorema de Rolle)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tres veces derivable y con tercera derivada continua (es decir, una función de clase $C^3(\mathbb{R})$) con, al menos, cinco raíces reales diferentes. Prueba que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h = f + 6f' + 12f'' + 8f'''$$

tiene, al menos, dos raíces reales diferentes.
[*Indicación:* Calcula la tercera derivada de $g(x) = e^{ax} f(x)$ y escoge el valor apropiado de $a \in \mathbb{R}$.]
Putnam Exam 2015: B1 del canal *Michael Penn* (⏲ 7.04)

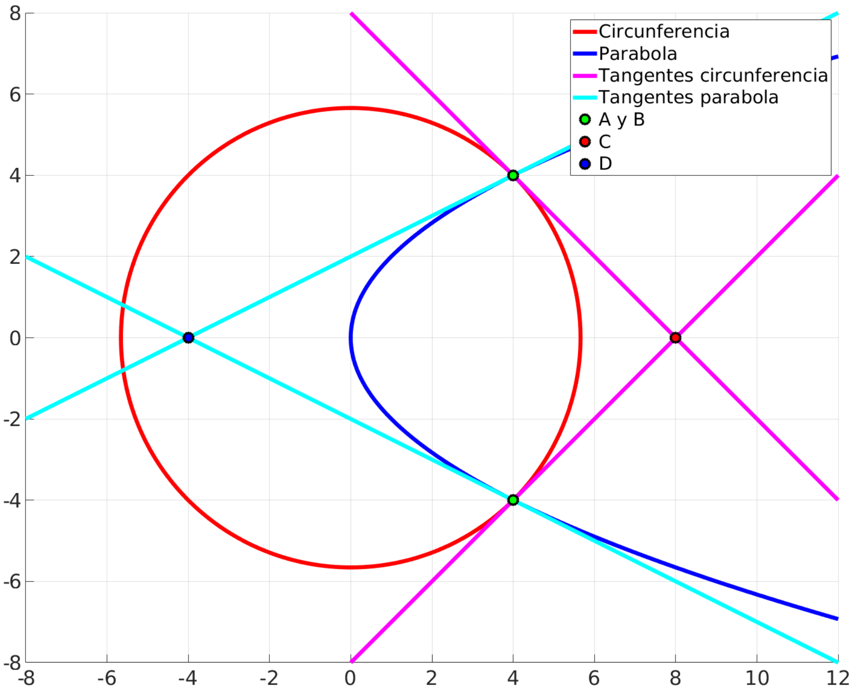


FIGURA 12. Geometría del problema 136.

136. *(Cociente del área de dos triángulos)* Sean A y B los dos puntos del plano donde se intersecan la circunferencia $x^2 + y^2 = 32$ y la parábola $y^2 = 4x$, ver la figura 12.

a) Calcula el punto C donde se cortan la recta tangente en el punto A a la circunferencia y la recta tangente en el punto B a la circunferencia.

b) Calcula el punto D donde se cortan la recta tangente en el punto A a la parábola y la recta tangente en el punto B a la parábola.

c) Calcula el cociente

$$\frac{\text{Área del triángulo } ABC}{\text{Área del triángulo } ABD}.$$

A viewer suggested triangle problem del canal *Michael Penn* (⏲ 9:51)

137. *(Reflexiones y refracciones)* Las leyes de Snell describen cómo se refleja la luz al chocar contra un espejo y cómo se refracta al pasar de un medio a otro. El principio físico involucrado es que la luz siempre sigue el camino más rápido entre dos puntos.

a) *Reflexión.* Tenemos un emisor de luz $A_1 = (x_1, y_1)$, un receptor de luz $A_2 = (x_2, y_2)$ y un punto de reflexión $Q = (x, 0)$. La recta horizontal $\{y = 0\}$ es el espejo. Suponemos que $x_1 < x_2$ y

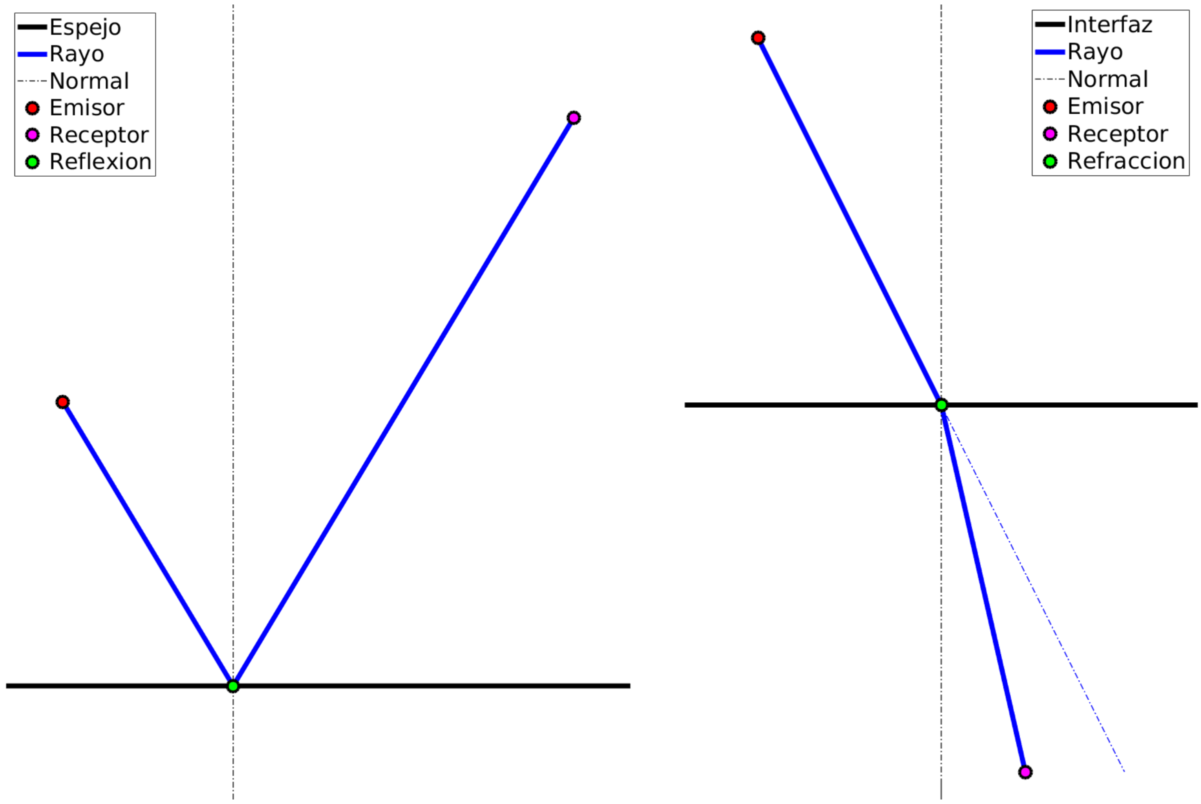


FIGURA 13. Izquierda: Reflexión. Derecha: Refracción para el caso $v_1 = 2v_2$.

$y_1, y_2 > 0$, ver la figura 13. Sea $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$D(x) = \|A_1 - Q\| + \|Q - A_2\|.$$

Calcula $D(x)$ y $D'(x)$. Dibuja la gráfica de $D(x)$ y calcula el punto $x = x_\star$ donde la distancia recorrida $D(x)$ es mínima. Sea $Q_\star = (x_\star, 0)$. Prueba que si α_1 es el ángulo de incidencia (ángulo que forma el vector $\overrightarrow{A_1Q_\star}$ con la dirección tangente horizontal) y α_2 es el ángulo de reflexión (ángulo que forma el vector $\overrightarrow{Q_\star A_2}$ con la dirección tangente horizontal), entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

b) *Refracción.* Tenemos un emisor de luz $B_1 = (x_1, y_1)$, un receptor de luz $B_2 = (x_2, y_2)$ y un punto de refracción $R = (x, 0)$. La recta horizontal $\{y = 0\}$ separa dos medios transparentes donde la luz viaja a diferentes velocidades: v_1 en el semiplano positivo y v_2 en el semiplano negativo. Suponemos que $x_1 < x_2$, $y_1 > 0$ y $y_2 < 0$, ver la figura 13. Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$T(x) = \frac{\|B_1 - R\|}{v_1} + \frac{\|R - B_2\|}{v_2}.$$

Calcula $T(x)$ y $T'(x)$. Dibuja la gráfica de $T(x)$ y calcula el punto $x = x_\star$ donde el tiempo transcurrido $T(x)$ es mínimo. Sea $R_\star = (x_\star, 0)$. Prueba que si θ_1 es el ángulo de incidencia (ángulo que forma el vector $\overrightarrow{B_1R_\star}$ con la dirección normal vertical) y θ_2 es el ángulo de refracción (ángulo que forma el vector $\overrightarrow{R_\star B_2}$ con la dirección normal vertical), entonces

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

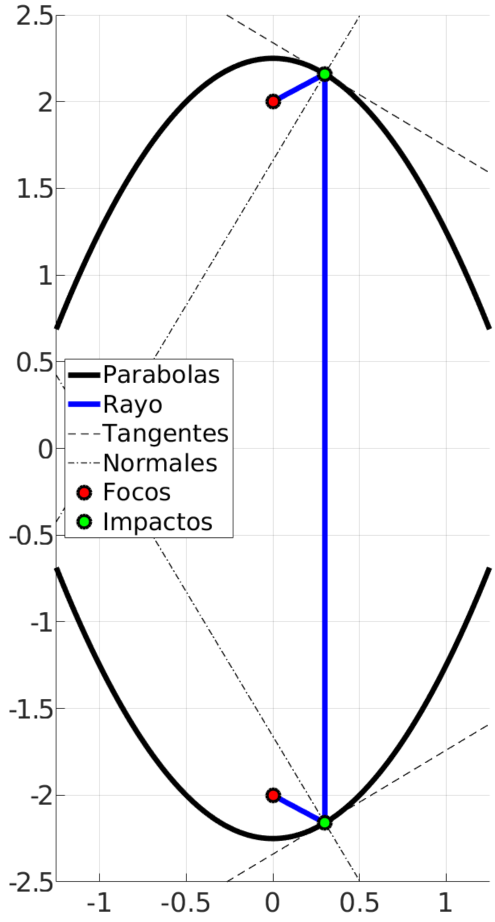


FIGURA 14. Geometría del problema 138 para el parámetro $h = 2$.

W Snell's law

Snell's law proof using springs del canal *3Blue1Bronw* (⏲ 3:56) [Para una justificación distinta]

138. *(Reflexiones parabólicas)* Las parábolas tienen unas propiedades de focalización que las hacen muy útiles en la construcción de antenas, espejos acústicos, concentradores de calor, etcétera.

a) Sea $f(x) = h + 1/4 - x^2$, donde $h > 0$ es un parámetro. Dibuja los focos $F_\pm = (0, \pm h)$ y las parábolas $P_\pm = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm f(x)\}$.

b) Prueba que si un rayo parte del foco F_+ en dirección a un punto $Q_+ = (x, f(x)) \in P_+$, el rayo pasa a ser vertical después de reflejarse en la parábola.
[*Nota:* Cuando un rayo se refleja en una curva, coinciden los dos ángulos que forma el rayo al incidir y al reflejarse con la recta tangente a la curva en el punto de impacto.]

c) Deduce que si un rayo parte del foco F_+ y se refleja en un punto $Q_+ = (x, f(x)) \in P_+$, después se refleja en el punto $Q_- = (x, -f(x)) \in P_-$ y finalmente llega a F_-, ver figura 14.

d) Prueba que la distancia recorrida por todos los rayos es la misma. Concretamente, prueba que

$$\|F_+ - Q_+\| + \|Q_+ - Q_-\| + \|Q_- - F_-\| \equiv 2h + 1, \qquad \forall x.$$

[*Nota:* En la última identidad, debemos suponer que $|x| \leq \sqrt{h + 1/4}$. ¿Por qué?]

W Parabolic reflector

W Acoustic mirror

The Secret of Parabolic Ghosts del canal *Mathologer* (⏲ 13:45) [por métodos geométricos]

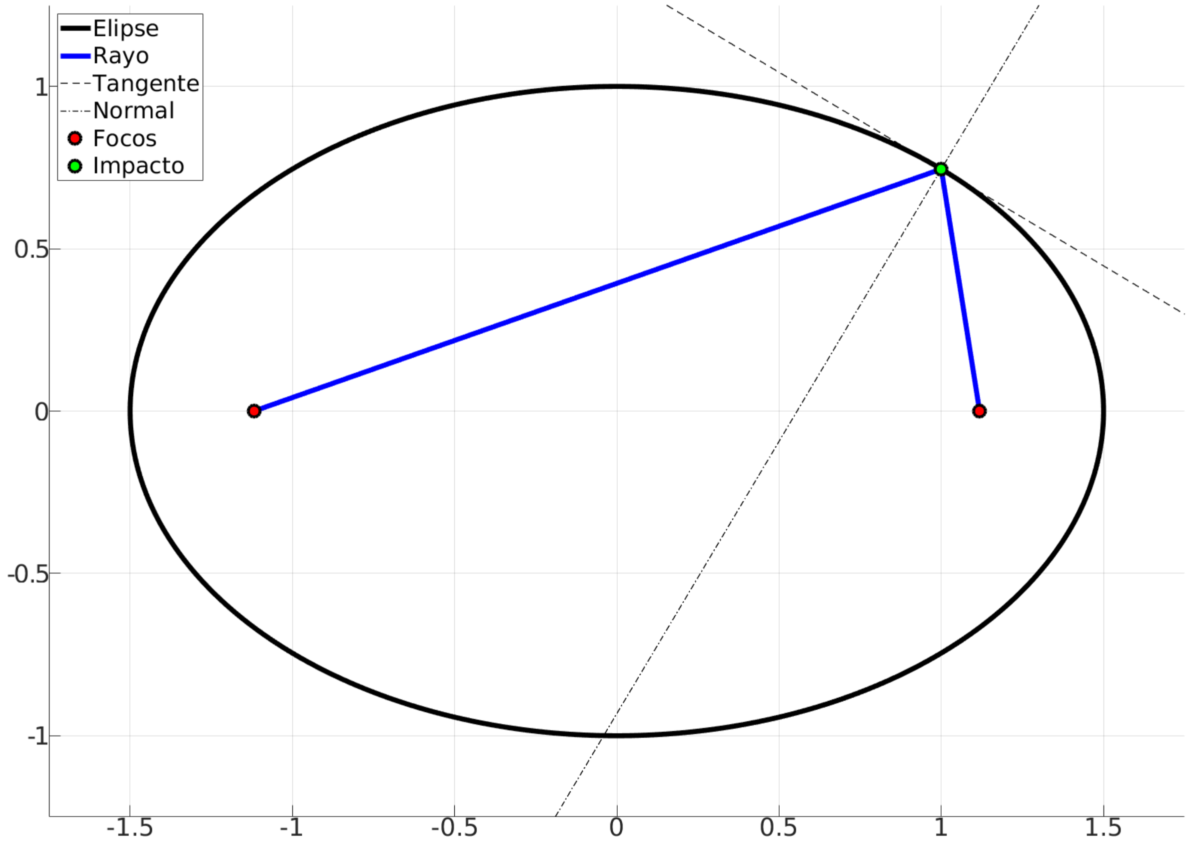


FIGURA 15. Geometría del problema 139 para $a = 3/2$ y $b = 1$.

Paraboloids and The Building which Set Things on Fire del canal *Stand-up Maths* (⏲ 16:24)

139. *(Reflexiones elípticas)* Las elipses tienen propiedades de focalización parecidas a las parábolas.

a) Dado dos parámetros $a > b > 0$, sea $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ la semi distancia focal. Dibuja los dos focos $F_\pm = (\pm c, 0)$ y la elipse

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

b) Prueba que si un rayo parte del foco F_+ en dirección a un punto arbitrario $Q \in E$, el rayo reflejado pasa por el otro foco F_-. Ver la figura 15.

c) Prueba que la distancia recorrida por todos los rayos es la misma. Concretamente, prueba que

$$\|F_+ - Q\| + \|Q - F_-\| \equiv 2a, \qquad \forall Q \in E.$$

Explica cómo usar esta propiedad para dibujar elipses con un hilo, dos chinchetas y un lápiz.

W Quantum mirage

A Game for the Elliptical Pool Table del canal *Numberphile* (⏲ 5:52)

140. *(Aproximaciones de orden superior)* Sabemos que si $f(x)$ es una función $n+1$ veces derivable en un entorno de un punto a, entonces para todo $x \approx a$ existe un punto $c \in \langle a, x \rangle$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

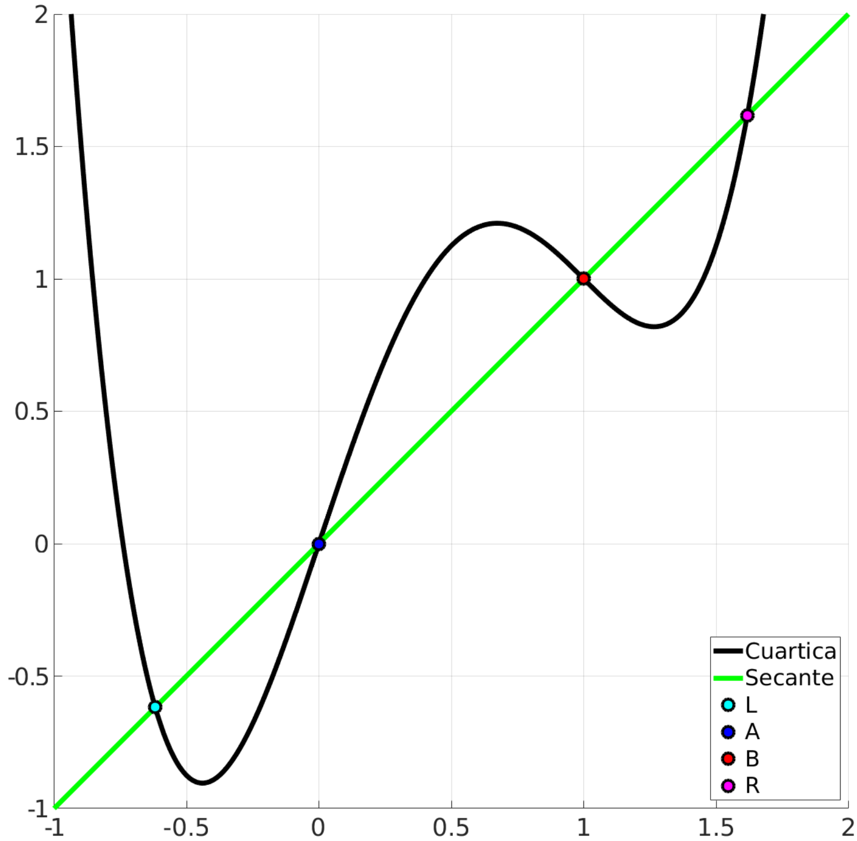


FIGURA 16. Geometría del problema 141 para el polinomio $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x$.

O sea, la aproximación $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$ tiene un error $f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$. Esta es la forma del resto (error) de Lagrange en la fórmula de Taylor.

a) Calcula las aproximaciones cuadráticas de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4.2}$ usando que $\sqrt{4} = 2$ y da una cota superior de cada error. Mira con atención el segundo vídeo abajo enlazado y encuentra el error técnico que contiene.
Approximation with Taylor Polynomial del canal *Michel van Biezen* (⏲ 7:10) [primera raíz]
Evaluating the error del canal *Michel van Biezen* (⏲ 5:58) [segunda raíz]

b) Calcula las aproximaciones cuadráticas de $\sqrt{15}$ y $\sqrt{17}$ usando que $\sqrt{16} = 4$ y da una cota superior de cada error.
[*Nota:* Michel comete el mismo error técnico que antes al estimar el error.]
Approximating for a Range of Values del canal *Michel van Biezen* (⏲ 5:31) [aproximaciones]
Evaluating the Error del canal *Michel van Biezen* (⏲ 4:05) [cálculo del error]

141. *(Toda cuártica es áurea)* Sea $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio de grado cuatro con dos puntos de inflexión diferentes. Es decir, $a_4 \neq 0$ y $f''(a) = f''(b) = 0$ para algunos valores $a < b$. Sean $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ los dos puntos de inflexión. Queremos probar que la recta que une A y B interseca la gráfica de la función $y = f(x)$ en otros dos puntos $L = (l, f(l))$ y $R = (r, f(r))$ tales que

$$L = A - (B - A)/\varphi, \qquad R = A + (B - A)\varphi,$$

donde φ es el número áureo definido en el problema 8. La geometría del problema está representada en la figura 16.

a) Encuentra para qué valores de los coeficientes $a_0, \dots, a_4$ se cumple que $A = (0,0)$ y $b = 1$.
b) Prueba que $L = A - (B-A)/\varphi$ y $R = A + (B-A)\varphi$ en el anterior caso particular.
c) Prueba el caso general mediante el cambio de variable

$$g(x) = \frac{f\big(a + (b-a)x\big) - f(a)}{b-a}.$$

Every quartic is golden del canal *Michael Penn* (⏲ 17:33)

142. *(Coeficientes binomiales generalizados)* La definición de los números combinatorios $\binom{m}{n}$ dada en el problema 12 se puede extender al caso $m \notin \mathbb{N}$. Dado un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario, definimos

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Sea $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Prueba que $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deduce que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ es

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{N}x^N.$$

b) Prueba que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = 1/(1+x)$ es

$$P_N(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^N x^N.$$

c) Prueba que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = 1/(1+x)^2$ es

$$P_N(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^N (N+1) x^N.$$

d) Prueba que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ es

$$P_N(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{(2N-3)!!}{2^N N!}x^N.$$

e) Prueba que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ es

$$P_N(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \frac{22x^5}{729} - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3N-4)}{3^N N!}x^N.$$

f) Prueba que el polinomio de Maclaurin de grado N de la función $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$ es

$$P_N(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + \cdots + (-1)^N\frac{(2N-1)!!}{2^N N!}x^N.$$

Binomial Series del canal *The Organic Chemistry Tutor* (⏲ 45:12)

143. *(Maclaurin de un producto de funciones)* El polinomio de Maclaurin (o de Taylor) de un grado dado de un producto de funciones se obtiene escribiendo los polinomios de ese grado de los dos factores, aplicando la propiedad distributiva, reagrupando términos y descartando los términos cuyo orden es mayor que el que nos piden.

a) Calcula el polinomio de Maclaurin de grado dos de $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}/\sqrt{1+x}$.
Lec 10 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 20:00 hasta 26:44)
b) Calcula el polinomio de Maclaurin de grado seis de $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$.
The Maclaurin Series of a Product del canal *Michel van Biezen* (⏲ 6:48) [solo llega a grado 5]

144. *(Maclaurin de un cociente de funciones)* Calcula el polinomio de Maclaurin de grado seis de

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

The Maclaurin Series of a Quotient del canal *Michel van Biezen* (⏲ 5:17) [solo llega a grado 5]

145. *(Particiones con partes distintas)* Una partición de un número $n \in \mathbb{N}$ es una forma de escribir n como una suma de números naturales. Por ejemplo, $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ son las cinco particiones del número cuatro. Si no hay ningún número repetido en la suma, es una partición con partes distintas. Sea $q(n)$ el número de particiones con partes distintas de n. Por ejemplo, $4 = 3+1$ son las dos particiones con partes distintas del número cuatro, luego $q(4) = 2$.

a) Calcula $q(9)$.

b) Calcula la novena derivada evaluada en el origen de la función

$$f(x) = \prod_{n=1}^{100}(1+x^n) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{100}).$$

W Partition (number theory)

A Beautiful Problem (IIT Test) del canal *MindYourDecisions* (⏲ 3:42)

Partitions del canal *Numberphile* (⏲ 11:44)

146. *(Un círculo inscrito entre dos campanas de Gauss)* Calcula el área del círculo de la figura 17 que está centrado en el origen e inscrito entre las dos campanas de Gauss definidas por las ecuaciones

$$y = \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad y = -\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Circle Inscribed In Bell Curves Puzzle del canal *MindYourDecisions* (⏲ 7:47)

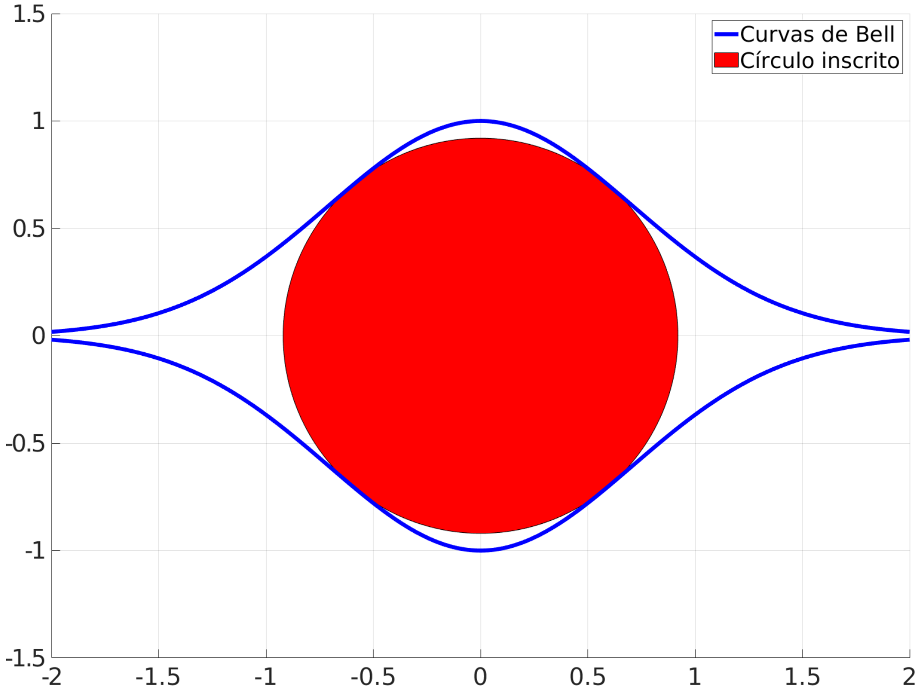


FIGURA 17. Círculo centrado en el origen e inscrito en las campanas de Gauss $y = \pm\mathrm{e}^{-x^2}$.

147. *(Putnam 2018 - A5)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función infinitamente derivable tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba, por reducción al absurdo, que existe algún orden $n \in \mathbb{N}$ y algún punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(x) < 0$. Concretamente, supón que $f^{(n)}(x) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ y obtén una contradicción mediante los siguientes pasos:

a) Prueba, mediante el teorema de Rolle, que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.
b) Deduce que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$.
c) Prueba, usando la forma del resto de Lagrange, que $f^{(n)}(1) \geq n!$ para todo $n \geq 0$.
d) Prueba, usando de nuevo la forma del resto de Lagrange, que $f(2) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solutions to the 79th Putnam Mathematical Competition de Kiran Kedlaya y Lenny Ng (8 páginas)
An Ultraconvex Putnam Problem del canal *Mu Prime Math* (⏲ 26:45) [Haydn sigue otro método]

148. *(Cálculo de límites por L'Hôpital)* Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x^2-1}$.
b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.
d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log x$.
e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-px}$ con $p > 0$.
f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^q\mathrm{e}^{-px} = \left(\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-px/q}\right)^q$ con $p, q > 0$.
g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^r}$ con $r > 0$.
h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$.

[*Nota:* Estos límites demuestran que el logaritmo crece más despacio que cualquier potencia de exponente positivo, las cuales, a su vez crecen mas despacio que cualquier exponencial de base mayor que uno. En particular, conviene tener presente que si $0 < \alpha < \beta$ y $1 < a < b$, entonces

$$\log(\log x) \ll \log x \ll x^\alpha \ll x^\beta \ll a^x \ll b^x \ll x^x, \qquad \text{(cuando } x \to +\infty).]$$

Lec 35 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 42:35)

149. *(Ecuación de Goldbach: $x^y = y^x$)* Considera la curva implícita

$$C = \left\{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : x^y = y^x,\ x \neq y\right\}.$$

a) Comprueba que C pasa por los puntos $(2,4)$, $(4,2)$, $(27/8, 9/4)$ y $(9/4, 27/8)$.
b) Prueba que si $x^y = y^x$, $x \neq y$, $x, y > 0$ entonces

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = f(t) := t^{\frac{1}{t-1}}, \\ y = g(t) := t^{\frac{t}{t-1}}. \end{cases}$$

c) Calcula los seis límites de $f(t)$ y $g(t)$ cuando $t \to 0^+$, $t \to 1$ y $t \to +\infty$.
d) Justifica que C tiene una asíntota horizontal en $\{y = 1\}$ y una asíntota vertical en $\{x = 1\}$.
e) Expresa el valor de y' en términos de los valores de x e y derivando implícitamente.
f) Justifica que C es simétrica respecto la recta $y = x$ y dibújala.
g) ¿Cuál es el único valor $x_\star > 1$ para el cual no existe ningún valor $y_\star \neq x_\star$ tal que $(x_\star, y_\star) \in C$?

W Equation $x^y = y^x$
Solutions of $x^y = y^x$ del canal *blackpenredpen* (⏲ 13:08) [parte de a), b), c) & d)]

Derivative of $x^y = y^x$, calculus 2 del canal *blackpenredpen* (⏲ 5:01) [e)]
Graph of $x^y = y^x$ del canal *blackpenredpen* (⏲ 19:43) [f) & g)]

150. *(Look before you L'Hôp!)* Encuentra y explica los errores de los siguientes cálculos:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = \frac{-\sin 0}{2} = 0.$

Lec 35 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 42:40)

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = 1 + \lim_{x\to +\infty} \cos x = \nexists.$

Derivación de Rafael Ramírez Ros (9 páginas) [En la página 8]

151. *(Cálculo de límites por Taylor)* Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones infinitamente derivables en un punto $c \in \mathbb{R}$ tales que $f(c) = g(c) = 0$ y

$$f(x) = a_n(x-c)^n + \mathrm{O}\left((x-c)^{n+1}\right),$$
$$g(x) = b_m(x-c)^m + \mathrm{O}\left((x-c)^{m+1}\right),$$

para algunos órdenes $n, m \in \mathbb{N}$ y para algunos coeficientes $a_n, b_m \neq 0$. Es decir, esto significa que c es una raíz de multiplicidad n y m de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Justifica que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{u\to 0} u^{m-n} = \begin{cases} a_n/b_m, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n > m \\ +\infty, & \text{si } n < m,\ m-n \text{ es par y } a_n/b_m > 0 \\ -\infty, & \text{si } n < m,\ m-n \text{ es par y } a_n/b_m < 0 \\ \nexists, & \text{si } n < m \text{ y } m-n \text{ es impar.} \end{cases}$$

[*Nota:* Compara estos resultados con los obtenidos en el apartado 84c.]

Calcula los siguientes límites por el método de Taylor.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$

Use the Maclaurin Series to Find Limit: 1 del canal *Michel van Biezen* (⏲ 2:33)

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2}.$

Use the Maclaurin Series to Find Limit: 2 del canal *Michel van Biezen* (⏲ 2:20)

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$

Math For Life del canal $0 \cdot \infty$ *Limit Without L'Hospital's Rule* (⏲ 5:29)

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x - x^2 e^{x^2/3}}{\ln^2(1+x^3)}.$

Derivación de Rafael Ramírez Ros (9 páginas) [Ejemplo 10, última página]

152. *(Un límite de película)* Calcula el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x) - \sin x}{1 - \cos^2 x}.$

Mean Girls Math Problems And Solutions del canal *MindYourDecisions* (⏲ De 4:02 a 6:35)

153. *(Una doble indeterminación)*

a) Calcula $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+3}\right).$

b) Calcula $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+3}\right)^x.$

Indeterminate challenge del canal *blackpenredpen* (⏲ 22:05)

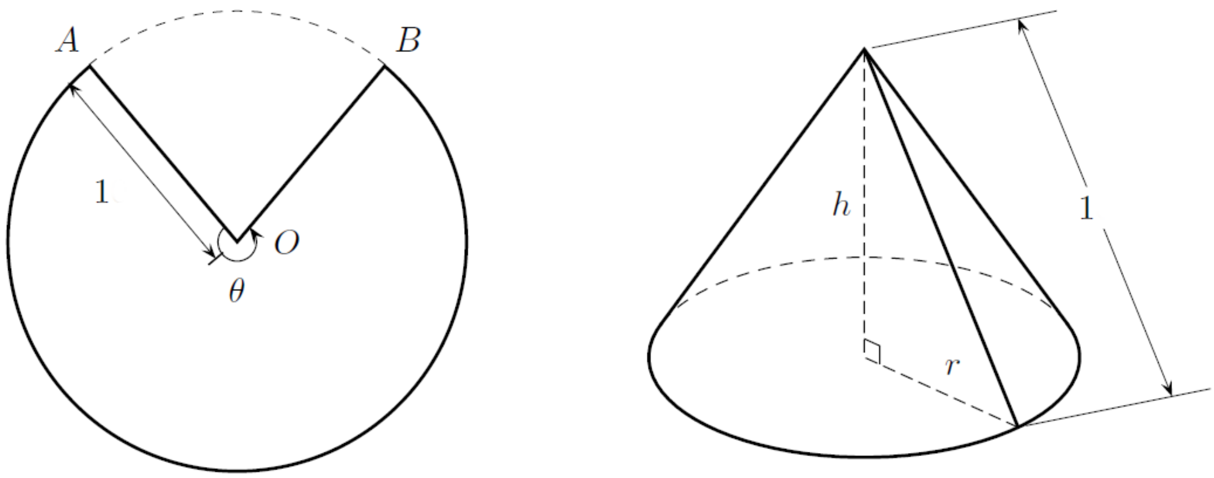


FIGURA 18. Cono formado a partir de un sector circular de radio uno y ángulo θ.

154. *(L'Hôpital versus Taylor)* Queremos calcular el límite indeterminado

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-\frac{1}{\log(1+x)}\right).$$

a) Calcula el límite aplicando L'Hôpital.
   a pretty hard limit problem del canal *blackpenredpen* (⏲ 13:43)
b) Calcula el límite aplicando Taylor.

155. *(Otro L'Hôpital versus Taylor)* Existe un único número $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{x}\right)=9.$$

a) Calcula n aplicando L'Hôpital.
   An epic limit! del canal *MindYourDecisions* (⏲ desde 5:39)
b) Calcula n aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica y, después, Taylor.

156. *(Racionalizar versus L'Hôpital versus Taylor)* Queremos calcular el límite indeterminado

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{x}.$$

a) Calcula el límite racionalizando el numerador. Es decir, usando que

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

b) Calcula el límite aplicando L'Hôpital.
c) Calcula el límite aplicando Taylor.

Rationalize the numerator vs L'Hospital Rule del canal *blackpenredpen* (⏲ 11:50)

157. *(Optimizando el volumen de un cono)* Tenemos un círculo de papel de radio uno. Recortamos un sector circular de ángulo θ y formamos un cono pegando los dos radios, ver la figura 18. ¿Cuál es el máximo volumen que puede tener el cono? ¿Para qué valor del ángulo θ se obtiene el valor máximo?
The Largest Cone Puzzle del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:27)

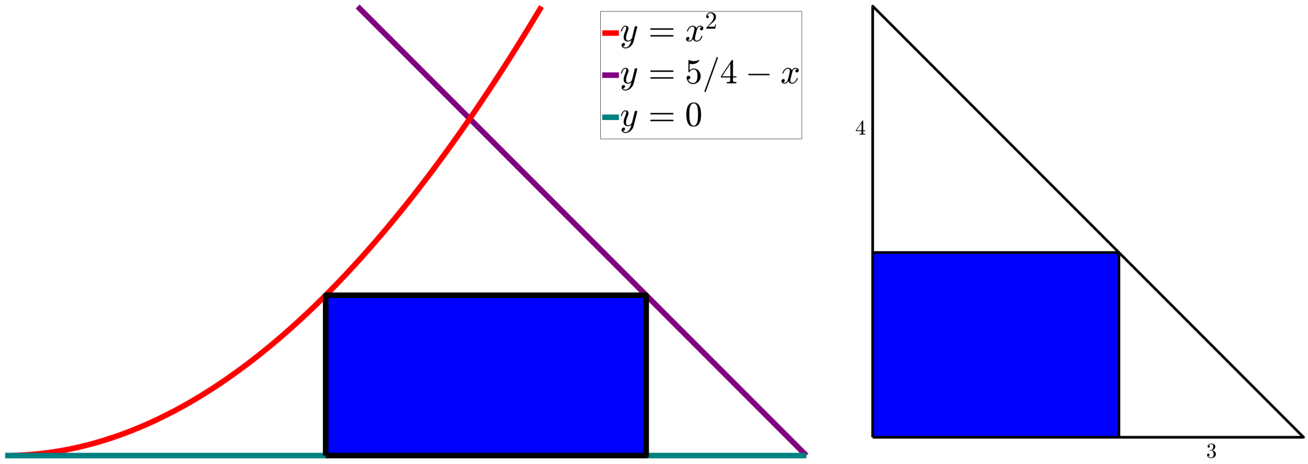


FIGURA 19. Izquierda: Maximiza el área del rectángulo azul. Derecha: Minimiza el área del triángulo que contiene los rectángulos azules.

158. *(Cortando un alambre)* Tenemos un alambre de un metro de longitud y lo cortamos en dos trozos. Formamos un cuadrado con cada trozo. Maximiza la suma de las dos áreas.
Lec 12 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 18:45)

159. *(Lata cilíndrica óptima)* Queremos fabricar una lata cilíndrica con un volumen V dado. Calcula el valor del radio r y la altura h del cilindro que minimiza el coste del material necesario para fabricar la lata. Es decir, que minimiza la superficie del cilindro.
What's The Best Soup Can Size? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 3:53)

160. *(Caja óptima)* Queremos fabricar una caja con base cuadrada, sin tapa y con un volumen V dado.
a) Calcula el valor del lado de la base x y la altura y de la caja que minimiza el coste del material necesario para fabricar la lata. Es decir, que minimiza la superficie de la caja.
b) Comprueba que A^3/V^2 y x/y no dependen de V. Interpreta geométricamente el resultado.
c) Obtén de forma directa el cociente x/y mediante derivación implícita.
Lec 12 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 18:50 hasta 45:00)

161. *(Optimizando la valla)* Dados 100 metros de valla, delimitamos un zona de pasto rectangular al lado de un río de forma que uno de los lados del rectángulo coincide con la orilla del río y, en consecuencia, no vallamos ese lado. ¿Cuál es la mayor área que es posible delimitar?
Math Puzzler: Optimize The Fence del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:46)

162. *(Maximizando el área de un rectángulo inscrito)* Maximiza el área del rectángulo azul inscrito en la región del primer cuadrante que se encuentra por debajo de las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5/4 - x$. Ver el dibujo izquierdo de la figura 19.
A Quick and Easy Optimization Problem del canal *SyberMath* (⏲ 11:00)

163. *(Minimizando el área de un triángulo rectángulo)* Considera los rectángulos azules contenidos en triángulos rectángulos que cumplen las propiedades representadas en el dibujo derecho de la figura 19. Es decir, el segmento horizontal que conecta el vértice inferior derecho del rectángulo con el vértice derecho del triángulo tiene longitud 3, mientras que el segmento vertical que conecta el vértice superior izquierdo del rectángulo con el vértice superior del triángulo tiene longitud 4.

a) Calcula el área de todos estos rectángulos.
b) Minimiza el área del triángulo que contiene al rectángulo.

The rectangle in a triangle problem del canal *MindYourDecisions* (⏲ 6:07)

164. *(Minimizando el tiempo)* Queremos ir desde un punto $A = (-a, 0)$ hasta un punto $B = (0, b)$, pasando por un punto intermedio $M = (0, x)$, donde $a, b > 0$ y $0 \leq x \leq b$. El segmento desde A hasta M se recorre en línea recta a una velocidad de treinta unidades, mientra que el segmento desde M hasta B se recorre a sesenta unidades de velocidad, también en línea recta. ¿Qué punto x minimiza el tiempo invertido? ¿Qué relación tiene que haber entre a y b para que $x \neq b$?

Max and Min and Second Derivative del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 24:00 hasta 36:20)

∀∃ **165.** *(Una ecuación funcional clásica)*
a) Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Encuentra todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación diferencial

$$f'(x) = af(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[*Indicación:* Calcula la derivada de $g(x) = \mathrm{e}^{-ax} f(x)$.]
b) Encuentra todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solving the Functional Equation f(x+y)=f(x)f(y) del canal *SyberMath* (⏲ 10:17)

∀∃ **166.** *(Derivable implica continua)* Prueba que si una función $f(x)$ es derivable en un punto $a \in \mathbb{R}$, entonces $f(x)$ es continua en a.

Writing Proofs: Direct Proof del canal *Michael Penn* (⏲ desde 5:33)

∀∃ **167.** *(Derivadas simétricas)* Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$. Si el límite

$$\mathcal{S}f(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$

existe y es finito, entonces $\mathcal{S}f(a)$ es la derivada simétrica de $f(a)$ en a. Y si el límite

$$\mathcal{S}^2 f(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}$$

existe y es finito, entonces $\mathcal{S}^2 f(a)$ es la segunda derivada simétrica de $f(a)$ en a.
a) Prueba que si $f(x)$ es derivable en a, entonces $f'(a) = \mathcal{S}f(a)$.
b) Prueba que si existe $f''(a)$, entonces $f''(a) = \mathcal{S}^2 f(a)$.
c) Encuentra una función $f(x)$ no derivable en $x = 0$ pero que tenga derivada simétrica en $x = 0$.
d) Encuentra una función $f(x)$ que no sea derivable dos veces en $x = 0$ pero que tenga segunda derivada simétrica en $x = 0$.

W Symmetric derivative

The Schwartz Second Derivative del canal *Michael Penn* (⏲ 9:43)

∀∃ **168.** *(Tres teoremas importantes sobre funciones derivables)*
a) *Teorema de Rolle:* Prueba que si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) *Teorema del Valor Medio (TVM):* Prueba que si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

c) *Teorema del Valor Medio Generalizado (TVMG):* Prueba que si dos funciones $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big).$$

Deduce que si $g'(c) \neq 0$, entonces

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

W Rolle's theorem

W Mean value theorem

The Mean Value Theorem del canal *Michael Penn* (⏲ 12:03) [a) & b)]

The Generalized Mean Value Theorem del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 7:15) [c)]

Integración

Shut up and take my money!
(Fry en Futurama, creado por Matt Groening)

¿Qué hay que saber?

Este tema tiene tres partes: integrales indefinidas, integrales definidas e integrales impropias.

La primera parte, que trata las integrales indefinidas, es puramente algebraica. Se calculan primitivas, también llamadas anti-derivadas, de funciones elementales. Se da la tabla de primitivas inmediatas, se presentan los métodos de cambio de variables e integración por partes, se calculan las integrales racionales mediante descomposiciones en fracciones simples, se calculan integrales trigonométricas mediante cuatro cambio de variables específicos y se resuelven algunas integrales con raíces.

La segunda parte, sobre integrales definidas, es más teórica y conceptual. Se definen las sumas de Riemann y el concepto de función integrable (en el sentido de Riemann), se presentan los grandes teoremas (regla de Barrow, teorema del valor medio para integrales, teorema fundamental del cálculo y regla de Leibniz) y se calculan áreas de algunas regiones planas.

La tercera parte, sobre integrales impropias, es de las más difíciles del curso, pues requiere entender el concepto de convergencia. Es, probablemente, la primera vez que los estudiantes se enfrentan al reto de "sumar" una cantidad infinita de pequeñas magnitudes y decidir si esa suma "tiene sentido". Se define convergencia y convergencia absoluta. Se presentan dos tipos de criterios de convergencia: comparación y cociente. Se estudian algunas integrales impropias clásicas: la integral gaussiana, la integral de Dirichlet, la función Gamma, etcétera.

En principio, un estudiante novato solo sabe calcular las primitivas más básicas (inmediatas, por partes y cambios de variables sencillos) y las áreas más sencillas. El resto del tema es una novedad absoluta y la parte final es bastante dura.

Este tema se corresponde con el contenido de los tres primeros capítulos del libro:

Calculus: Volume 2 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*829* páginas)

El siguiente libro interactivo cubre la parte computacional de este tema. Es una obra excelente, tanto en elección contenidos como en nivel de producción, pese a estar escrita con un estilo desenfadado. Su carácter interativo permite pensar cada problema antes de activar la correspondiente solución.

Integrando con Paco de Juan G. Rivera Berrío & José R. Galo Sánchez

Al acabar el tema se espera que sepáis:

- Calcular primitivas inmediatas, por partes, por cambio de variable, racionales, trigonométricas y con raíces;
- Calcular áreas delimitadas por curvas;
- Aplicar la regla de Leibniz (quizá en combinación con la regla de L'Hôpital y el método de Taylor) al cálculo de límites de funciones integrales;
- Estudiar la convergencia de integrales impropias, a veces calculando el valor preciso, otras aplicando criterios de convergencia.

Problemas

169. *(100 Primitivas)* Practica tus habilidades calculando primitivas resolviendo algunas de las cien primitivas del documento abajo enlazado. Es una lista preparada por Steve Chow y completamente resuelta en un vídeo de toma única que dura casi seis horas.

Si no os sale alguna primitiva, consultad los "timestamps" listados en la información del vídeo (debéis clicar en SHOW MORE) para ver cuándo empieza Steve a resolver esa primitiva concreta.

100 integrals de Steve Chow (6 páginas)

100 integrals del canal *blackpenredpen* (⏲ 5:50:22)

170. *(Integrales "inmediatas")* Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^3(x^4+2)^5\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x}$.

Lec 15 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 30:30)

171. *(Recurrencia de las integrales de las potencias del logaritmo)* Consideramos las primitivas

$$F_n(x) = \int \log^n x \ \mathrm{d}x, \qquad \forall n \geq 0.$$

a) Calcula $F_1(x)$ integrando por partes.

b) Calcula $F_2(x)$ integrando por partes.

c) Prueba, integrando por partes, la recurrencia $F_n(x) = x\log^n x - nF_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$.

Lec 30 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 18:29 hasta 33:10)

172. *(Integral de la función inversa)* Sea $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ una primitiva de una función derivable e invertible $f(x)$. Prueba, realizando el cambio de variable $x = f(u)$ e integrando por partes, que

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + c.$$

Aplica esta idea al cálculo de la siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int \log x \ \mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int W(x) \ \mathrm{d}x$, donde $W(x)$ es la función W de Lambert definida en el problema 119.

Lambert W Function del canal *blackpenredpen* (⏲ desde 32:50)

173. *(Una integral por partes con truco)* Calcula la primitiva $\displaystyle\int \cos x \cosh x \ \mathrm{d}x$.

Sharpen your integration skills! del canal *Michael Penn* (⏲ desde 4:10)

174. *(Primitiva cambiante)* Consideramos la primitiva $\displaystyle\int \sin x \cos x \ \mathrm{d}x$.

a) Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = \sin x$ se obtiene que

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + c.$$

b) Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = \cos x$ se obtiene que

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c.$$

c) Comprueba que usando la identidad trigonométrica $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ se obtiene que

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos(2x) + c.$$

d) ¿Cómo se explica que obtengamos tres resultados diferentes?

The Perplexing Integral Of (sin x)(cos x) del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:33)

175. *(Otra primitiva cambiante)* Consideramos la primitiva $\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x$.

a) Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = x + \sqrt{1+x^2}$ se obtiene que

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c.$$

b) Comprueba que tras realizar el cambio de variable $x = \sinh t$ se obtiene que

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{asinh} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + c.$$

c) ¿Cómo se explica que obtengamos dos resultados diferentes?

Three ways!! del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 13:00)

176. *(Integrales racionales)* Calcula las siguientes integrales racionales:

a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{x^2+x-2}\, \mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)}\, \mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}\, \mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)}\, \mathrm{d}x.$

Lec 29 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 48:37)

177. *(Integrales trigonométricas: Cambios)* Cualquier integral de la forma $\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$, donde $R(s,c)$ es una función racional, se puede transformar en una integral racional mediante un cambio de variable adecuado. El cambio depende de la forma que tenga $R(s,c)$. Las reglas son las siguientes:

- R impar en el coseno: $R(s,-c) = -R(s,c) \rightsquigarrow$ Cambio: $u = \sin x$, $\mathrm{d}u = \cos x\, \mathrm{d}x$.
- R impar en el seno: $R(-s,c) = -R(s,c) \rightsquigarrow$ Cambio: $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\, \mathrm{d}x$.
- R par en seno y coseno: $R(-s,-c) = R(s,c) \rightsquigarrow$ Cambio: $u = \tan x$, $x = \arctan u$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.
- R general $\rightsquigarrow$ Cambio: $u = \tan(x/2)$, $x = 2\arctan u$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

Prueba las fórmulas de los cuatro cambios anteriores.
[*Indicación:* Usa el truco del problema 65.]

178. *(Integrales trigonométricas: Ejemplos)* Calcula, usando en cada apartado uno de los cuatro cambios de variable del problema 177, las integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^{2k} x \,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}.$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x}.$

Integración de Rafael Ramírez Ros (*18* páginas) [Es el ejemplo 6.]

179. *(Integrales de potencias enteras de cosenos y senos)* Considera las integrales

$$B_{m,n}(x) = \int \cos^m x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x, \qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$

a) Prueba que el cuadro 7 da una lista completa de los cambios a realizar y las integrales transformadas en cada caso según las paridades de las potencias m y n.

b) Intenta calcular las integrales que corresponden a los siguientes casos:
   - I) $m=1$ y n arbitrario. (Fácil)
   - II) $m=2$ y $n=3$. (Fácil)
   - III) $m=0$ y $n=3$. (Fácil)
   - IV) $m=-4$ y $n=0$. (Fácil)
   - V) $m=2$ y $n=0$. (No es fácil, podéis abandonar.)
   - VI) $m=n=2$. (No es fácil, podéis abandonar.)

c) Calcula $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ y $\int \cos^2 x\ \sin^2 x\ \mathrm{d}x$ usando las fórmulas trigonométricas del ángulo doble para evitar el cambio de variables $u=\tan x$.

Lec 27 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (desde 6:30 hasta 29:30)
Lec 28 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (desde 12:48 hasta 15:25)

m	n	Cambio	Integral transformada
impar: $m=2j+1$	arbitrario	$u=\sin x$	$\int u^n(1-u^2)^j\,\mathrm{d}u$
arbitrario	impar: $n=2k+1$	$u=\cos x$	$-\int u^m(1-u^2)^k\,\mathrm{d}u$
par: $m=2j$	par: $n=2k$	$u=\tan x$	$\int u^{2k}/(1+u^2)^{j+k+1}\,\mathrm{d}u$

CUADRO 7. Cambios trigonométricos adecuados para calcular la integral $\int \cos^m x\sin^n x\ \mathrm{d}x$.

180. *(Integrales con raíces)* Sea $a>0$. Las integrales que contienen alguna de las raíces

$$\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \sqrt{a^2+x^2}, \qquad \sqrt{x^2-a^2},$$

se suelen resolver mediante los siguientes cambios trigonométricos:

- Integrales con $\sqrt{a^2-x^2} \rightsquigarrow$ Cambio: $x=a\sin\theta$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$, $\mathrm{d}x=a\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$;
- Integrales con $\sqrt{a^2+x^2} \rightsquigarrow$ Cambio: $x=a\tan\theta$, $\sqrt{a^2+x^2}=a\sec\theta$, $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\ \mathrm{d}\theta$;
- Integrales con $\sqrt{x^2-a^2} \rightsquigarrow$ Cambio: $x=a\sec\theta$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$, $\mathrm{d}x=a\sec\theta\tan\theta\ \mathrm{d}\theta$.

a) Prueba las fórmulas de los tres cambios anteriores.

b) Calcula la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

c) Calcula la integral $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

d) Calcula la integral $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-4}}$.

e) Calcula la integral $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x}}$ completando cuadrados y relacionándola con la integral del apartado anterior.

W List of integrals of irrational functions

The area of a lune del canal *Michael Penn* (⏲ desde 2:29 hasta 7:40) [solo el apartado b)]

Lec 28 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 15:30) [c), d) y e)]

181. *(La primitiva de la secante)* Calcular $\int \sec x\ \mathrm{d}x$ fue uno de los problemas abiertos candentes a mediados del siglo XVII.

a) *El método de James Gregory (1668):* Comprueba que si multiplicamos y dividimos el integrando por $\sec x + \tan x$ y realizamos el cambio de variable $u = \sec x + \tan x$ se obtiene que

$$\int \sec x\ \mathrm{d}x = \log\left|\sec x + \tan x\right| + c.$$

b) *El método de Isaac Barrow (1670):* Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = \sin x$ y calcular la correspondiente integral racional se obtiene que

$$\int \sec x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c.$$

c) *El método de Weierstrass:* Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = \tan(x/2)$ y calcular la correspondiente integral racional se obtiene que

$$\int \sec x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + c.$$

d) Justifica que las expresiones son iguales.

W Integral of the secant function

ntegral of sec(x) without that trick! del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:40)

182. *(La primitiva del cubo de la secante)* La primitiva $\int \sec^3 x\ \mathrm{d}x$ aparece en bastantes aplicaciones.

a) Relaciona integrando por partes las primitivas de la secante y el cubo de la secante. Deduce usando el problema 181 que

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\log\left|\sec x + \tan x\right| + c.$$

b) Comprueba que tras realizar el cambio de variable $u = \sin x$ y calcular la correspondiente integral racional se obtiene que

$$\int \sec^3 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + c.$$

W Integral of secant cubed

Cubic secant integral through integration by parts del canal *MateFacil* (⏲ 8:25)

183. *(La primitiva de la raíz cúbica de la cotangente)* Calcula la integral

$$\int \sqrt[3]{\cot x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}\, \mathrm{d}x$$

mediante el cambio de variable $u^3 = \tan^2 x$ que la transforma en una integral racional.
A great integral calculus review in one problem!! del canal *Michael Penn* (⏲ 19:25)

184. *(Una integral "trigonométrica con raíces")* Sea $a \neq 0$. Calcula la integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^3 x \cos(x+a)}}$$

usando la fórmula del coseno del ángulo suma y el cambio de variable $u = \sin a - \sin a \tan x$.
It was too late for integrals on YouTube del canal *Michael Penn* (⏲ 6:45)

185. *(Una integral con varias raíces)* La integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x$$

se transforma en una integral racional mediante el cambio de variable $x = u^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Encuentra m y calcula la integral.
Computing a Radical Integral del canal *SyberMath* (⏲ 7:42)

186. *("Demostración": $0 = 1$)* Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".

Consideramos la integral $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$. Integramos por partes tomando $u = \frac{1}{x}$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, luego $\mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}$ y $v = x$, con lo cual vemos que

$$\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \int u\, \mathrm{d}v = uv - \int v\, \mathrm{d}u = 1 + \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x.$$

Y simplificando la integral $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$, obtenemos que $0 = 1$.
"Prove" 0 = 1 Using Integral Calculus del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:57)

187. *(Evitando integrar por partes)* Consideramos las primitivas

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) = \frac{a \sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax},$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{a \cos(bx) + b\sin(bx)}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{ax},$$

que se suelen usar como uno de los primeros ejemplos de integración por partes.

a) Expresa las funciones trigonométricas $\sin\theta$ y $\cos\theta$ en función de las exponenciales $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ y $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, mediante la fórmula de Euler

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{i} \sin\theta.$$

b) Calcula las dos primitivas consideradas usando que la fórmula

$$\int \mathrm{e}^{\alpha x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} + c$$

también es cierta para valores complejos $\alpha \neq 0$.

Skip the integration by parts!! del canal *Michael Penn* (⏲ 7:49)

188. *(Una ecuación integro-diferencial escondida)* Encuentra la única función derivable $f(x)$ tal que $f(1) = 4$ y $g(x) = x$ es una primitiva del producto $f(x)f'(x)$.
An Integral/Differential Equation del canal *SyberMath* (⏲ 4:06)

189. *(Los efectos de la singularidad)* Encuentra y explica el error del siguiente "cálculo":

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-2}^{x=1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-2}\right) = -\frac{3}{2} < 0.$$

La función $f(x) = x^{-2}$ nunca es negativa pero su integral definida parece ser negativa. ¿Qué pasa?
Innocent looking, but ???? del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:10)

190. *(Un cambio peligroso)* Encuentra y explica el error del siguiente "cálculo":

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2x\,dx,\ dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ x = -1 \to u = 1,\ x = 1 \to u = 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} \sqrt{u}\,du = \left[\frac{u^{3/2}}{3}\right]_{u=1}^{u=1} = 0$$

La función $f(x) = x^2$ nunca es negativa y solo se anula en $x = 0$, pero su integral definida da cero. ¿Qué pasa?
Lec 19 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 44:50)

191. *(Comparando integrales)* Determina, sin calcular ninguna de ellas, cuál de las siguientes integrales definidas tiene el mayor valor.
a) $\int_0^2 (x^2 - 4)\sin^8(\pi x)\,dx$.
b) $\int_0^{2\pi} (2 + \cos x)^3\,dx$.
c) $\int_0^{\pi} \sin^{100} x\,dx$.
d) $\int_0^{\pi} (3 - \sin x)^6\,dx$.
e) $\int_0^{8\pi} 108(\sin^3 x - 1)\,dx$.
An Oxford math admission question del canal *blackpenredpen* (⏲ 5:13)

192. *(Examen Putnam A3-2011)* Dado un exponente $r > 0$, considera las integrales definidas

$$A_r = \int_0^{\pi/2} x^r \sin x\ dx, \qquad B_r = \int_0^{\pi/2} x^r \cos x\ dx.$$

a) Prueba mediante un razonamiento de convexidad que se cumple la desigualdad

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le 1, \qquad \forall x \in [0, \pi/2].$$

b) Deduce integrando la anterior desigualdad que

$$\frac{1}{r+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1} \le A_r \le \frac{1}{r+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+1}.$$

c) Prueba, integrando por partes, que $B_r = \dfrac{A_{r+1}}{r+1}$.
d) Usa el teorema del bocadillo para calcular el límite $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{A_r}{rB_r}$.
Putnam Exam | 2011: A3 del canal *Michael Penn* (⏲ 13:02)

193. *(Dos formas de calcular áreas)* Queremos calcular el área entre $x = y^2$ y $y = x - 2$.
a) Haz el cálculo integrando respecto la abcisa x.

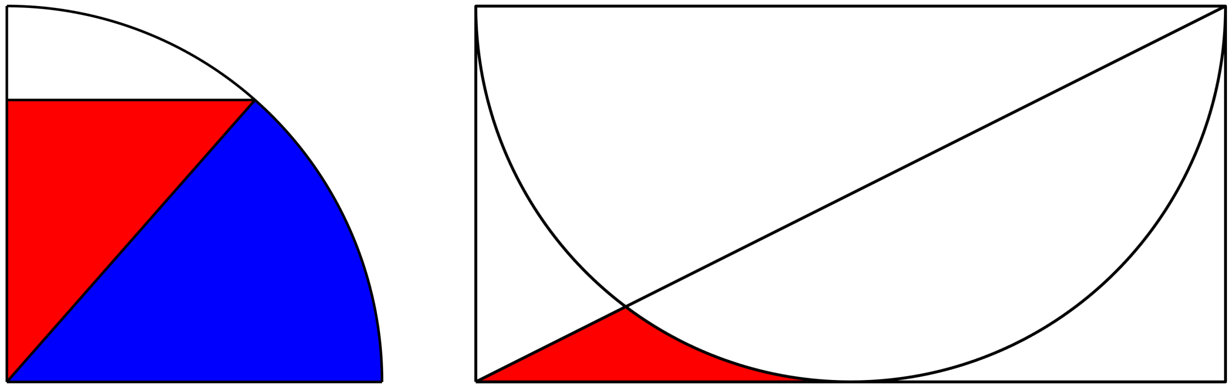


FIGURA 20. Izquierda: Región del problema 194. El círculo tiene radio a y el triángulo tiene altura b. Derecha: Región del problema 195. El rectángulo mide 4×8.

b) Haz el cálculo integrando respecto la ordenada y.
Lec 21 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 32:30)

194. *(Área de un triángulo y un sector circular)* Queremos calcular el área $A = T + S$ de la región total coloreada en rojo y azul en el dibujo izquierdo de la figura 20.
a) Argumenta geométricamente que $A = b\sqrt{a^2 - b^2}/2 + a^2\theta_0/2$, donde $\theta_0 = \arcsin(b/a)$ es el ángulo del sector S.
b) Calcula A con una única integral respecto la ordenada y. Compara con el apartado anterior.
Lec 27 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 29:47)

195. *(Un área debajo de una recta y una circunferencia)* Calcula el área de la región coloreada en rojo en el dibujo derecho de la figura 20.
A Viral Math Problem From China del canal *MindYourDecisions* (⏲ De 5:02 a 9:10)

196. *(Un área entre funciones trigonométricas)* Considera las funciones

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x, \qquad h(x) = \tan x.$$

a) Dibuja sus gráficas en el intervalo $x \in [0, \pi/2]$, marcando todas sus intersecciones.
b) Calcula el área de la región de forma aproximadamente triangular que delimitan.
a viewer asked me to find this area del canal *Michael Penn* (⏲ 9:51)

197. *(Un caballo pastando)* Un caballo está atado mediante una cuerda de longitud L a una esquina de un recinto vallado rectangular de 20 metros por 10 metros. El caballo está en el exterior del recinto, luego no puede comer la hierba del interior, pero puede comer parte de la hierba del exterior.
a) Calcula la superficie de pasto que puede comer cuando $L = 5$.
b) Calcula la superficie de pasto que puede comer cuando $L = 20$.
c) Calcula la superficie de pasto que puede comer cuando $L = 50$.
Can You Solve The Horse Grazing Puzzle? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 15:55)

198. *(Área encima de dos circunferencias)* Calcula el área de la región coloreada en azul en el dibujo superior izquierdo de la figura 21. Usa las simetrías de la geometría para reducir los cálculos.
What is the shaded area? del canal *Michael Penn* (⏲ 15:22)

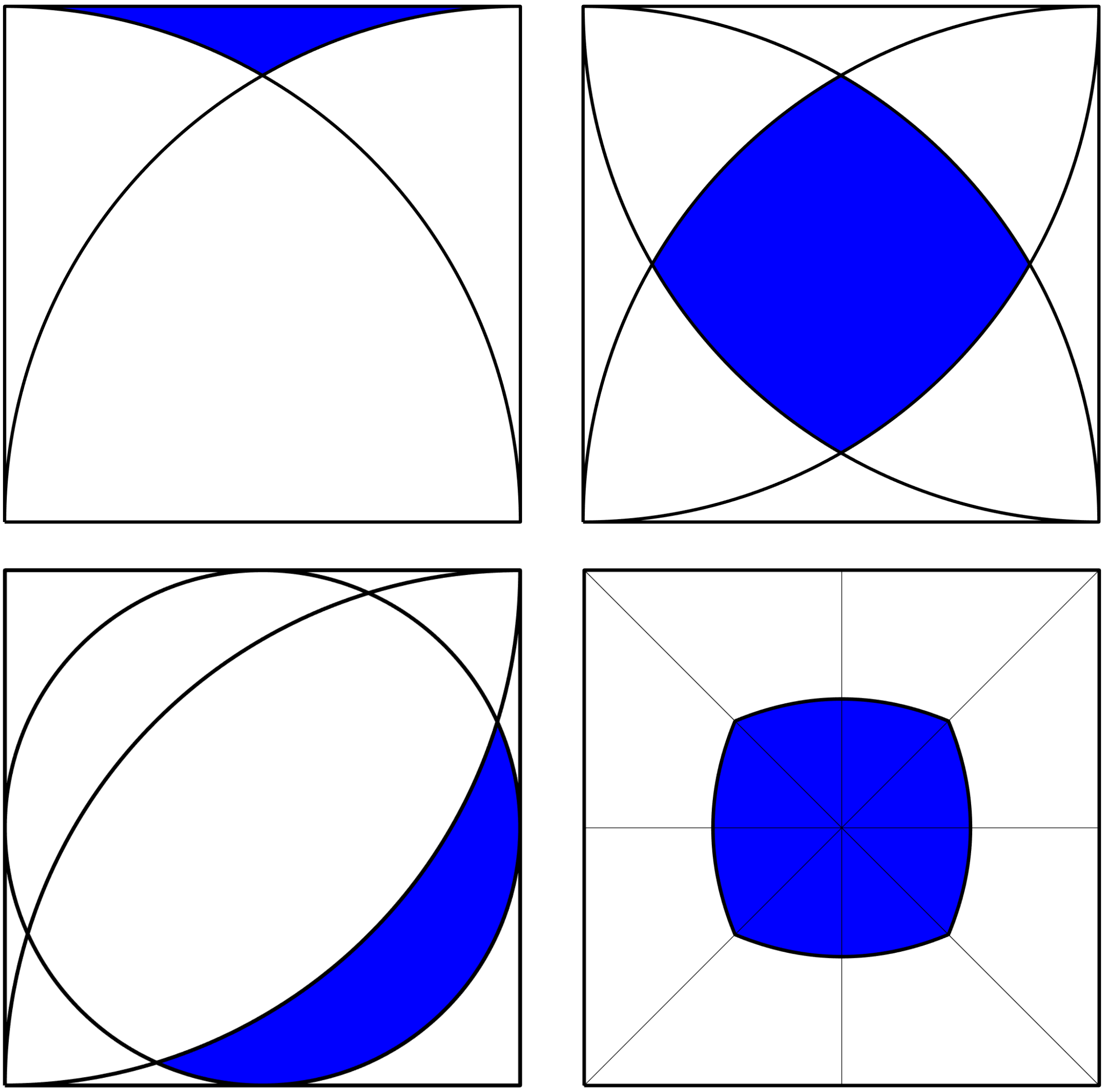


FIGURA 21. Superior izquierdo: Región del problema 198. El cuadrado mide 1×1. Superior derecho: Región del problema 199. El cuadrado mide 1×1. Inferior izquierdo: Región del problema 200. El cuadrado mide 10×10. Inferior derecho: Región del problema 201. El cuadrado mide 2×2.

199. *(Área entre cuatro circunferencias)* Calcula el área de la región coloreada en azul en el dibujo superior derecho de la figura 21. Usa las simetrías de la geometría para reducir los cálculos.
Find the shaded area!! del canal *Michael Penn* (⏲ 13:43)

200. *(Un área entre circunferencias)* Calcula el área de la región coloreada en azul en el dibujo inferior izquierdo de la figura 21.
Viral Problem For 11 Year Olds In China del canal *MindYourDecisions* (⏲ De 5:38 a 7:21)

201. *(Probabilidad en un juego de dardos)* Calcula el área de la región coloreada en azul en el dibujo inferior derecho de la figura 21. El borde de la región azul está formado por los puntos que están a la misma distancia del centro del cuadrado que del borde del cuadrado. Usa las simetrías de la geometría para reducir los cálculos. El problema se puede expresar de una forma más divertida,

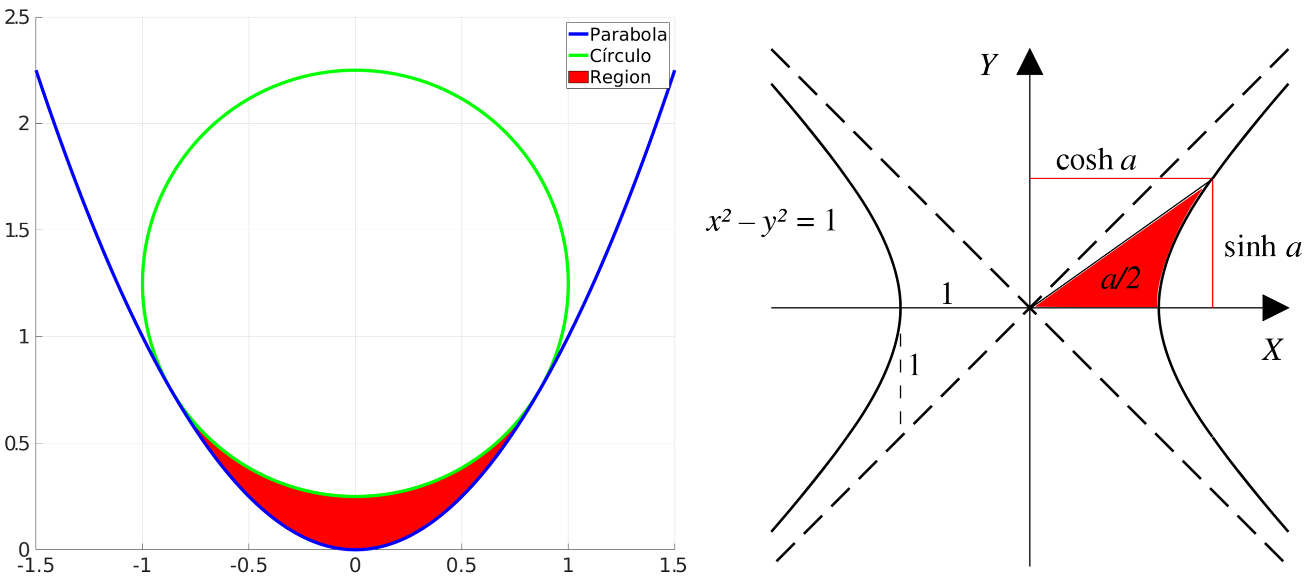


FIGURA 22. Izquierda: Geometría del problema 202. Derecha: Geometría del problema 203. (Imagen extraída de Wikipedia.)

pero también más críptica. Es la siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que un dardo lanzado a un punto aleatorio de una diana cuadrada se clave más cerca del centro que del borde?
dart board probability del canal *Michael Penn* (⏲ 7:45)

202. *(Un círculo inscrito en una parábola)* Un círculo de radio uno y centro sobre el eje de ordenadas es tangente a dos puntos de la parábola

$$y = x^2.$$

Calcula el área de la región entre el círculo y la parábola coloreada en rojo en el dibujo izquierdo de la figura 22.
The Circle Inscribed In A Parabola Puzzle del canal *MindYourDecisions* (⏲ 13:35)

203. *(Área de un sector hiperbólico)* Sea $a > 0$.
a) Prueba que el punto $P = (\cosh a, \sinh a)$ está situado sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.
b) Prueba que el área de la región coloreada en rojo en el dibujo derecho de la figura 22 es $a/2$.
c) Deduce que el área de la región comprendida entre la hipérbola y sus asíntotas es infinita.
Hyperbolic trig function, the input is twice of the area del canal *blackpenredpen* (⏲ 13:46)
What is the deal with (hyperbolic) trig functions? del canal *Michael Penn* (⏲ 10:20)

204. *(Volúmenes de revolución)* Considera el dominio plano

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

donde $f(x)$ es una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Entonces:
- El sólido de revolución que se obtiene al girar D alrededor del eje x tiene volumen

$$\pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x.$$

- Si $a \geq 0$, el sólido de revolución que se obtiene al girar D alrededor del eje y tiene volumen

$$2\pi \int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x.$$

a) Entiende que la primera fórmula es la integral del área de los discos obtenidos al intersecar el sólido de revolución con los planos perpendiculares al eje de revolución, mientras que la segunda fórmula es la integral del área de las capas (*shells*, en inglés) obtenidas al intersecar el sólido de revolución con el cilindro de radio x que comparte su eje de revolución. Es decir, en la primera/segunda fórmula integramos a lo largo de una dirección paralela/perpendicular al eje de revolución.

b) Calcula el volumen de la esfera de radio R que se obtiene al girar el semicírculo

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$$

alrededor del eje x.

c) Sea $a > 0$. Calcula el volumen del paraboloide de revolución que se obiene al girar el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq a \right\}$$

alrededor del eje y.

W Disc integration

W Shell integration

Lec 22 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 49:57)

205. *(Más volúmenes de revolución)* Usa las fórmulas mostradas en el problema 204 para calcular los volúmenes de los siguientes sólidos de revolución.

a) El sólido de revolución generado al girar el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/a, \ 0 \leq y \leq \sin(ax) \right\}, \qquad a > 0,$$

alrededor del eje x.

b) El sólido de revolución generado al girar el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 4, \ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

alrededor del la recta $x = 6$.

c) El sólido de revolución generado al girar el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, \ 0 \leq y \leq 2x + 1 \right\}$$

alrededor del eje x.

d) El sólido de revolución generado al girar el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x \right\}$$

alrededor del eje x.

e) Sea $r > 0$. El sólido de revolución generado al girar el dominio

$$D_r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^r \right\}$$

alrededor del la recta $y = -2$. Determina el valor de r tal que el volumen es igual a π.

Trig Integrals and a Volume of Revolution del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 9:22) [a)]

Volume of Revolution via Shells del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ 8:32) [b)]

Find the Volume, Sec 8.2, Calculus with Applications del canal *Math For Life* (⏲ 6:42) [c) & d)]

Volume. Rotation Around y=-2 del canal *Math For Life* (⏲ 4:22) [e)]

206. *(Longitud de una gráfica)* La curva formada por la gráfica de una función derivable $f(x)$ sobre el intervalo $x \in [a,b]$ tiene longitud

$$\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Entiende la deducción de esta fórmula presentada en los primeros 7 minutos del vídeo.
b) Calcula la longitud del segmento definido por la función $f(x) = mx+n$ en el intervalo $x \in [a,b]$ con $m,n \in \mathbb{R}$ y $b > a$. Comprueba el resultado mediante el teorema de Pitágoras.
c) Calcula la longitud de la semicircunferencia de radio R definida por la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en el intervalo $x \in [-R,R]$.
d) Calcula la longitud del trozo de parábola definido por la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $x \in [0,b]$ con $b > 0$.
[*Indicación:* Realiza el cambio $\tan t = 2x$ para calcular la integral resultante.]

Lec 31 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 25:15)

207. *(Área de una superficie de revolución)* La superficie de revolución formada al girar respecto el eje x la gráfica de una función derivable $f(x)$ sobre el intervalo $x \in [a,b]$ tiene área

$$2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Entiende la deducción de esta fórmula presentada en el vídeo a partir del minuto 26.
b) Calcula el área de una esfera de radio R usando la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en el intervalo $x \in [-R,R]$.
c) Calcula el área de la superficie de revolución obtenida con la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $x \in [0,b]$ con $b > 0$.
[*Indicación:* Realiza el cambio $\tan t = 2x$ para calcular la integral resultante.]

Lec 31 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 25:30 hasta 40:00)

208. *(Promedio de una función)* El promedio de una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es la cantidad

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Échale un vistazo al vídeo del canal *3Blue1Brown* para entender la motivación detrás de esta definición.
b) Calcula el promedio $\bar{f}$ de la función $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$.
c) Calcula el promedio $\bar{f}$ de la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
d) Calcula la altura promedio $\bar{y}_x$ (respecto la abcisa x) de un punto situado sobre el semicírculo

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\right\}.$$

e) Calcula la altura promedio $\bar{y}_\theta$ (respecto al ángulo polar θ) de un punto situado sobre el mismo semicírculo.
f) Argumenta geométricamente que $\bar{y}_x > \bar{y}_\theta$.

What does area have to do with slope? del canal *3Blue1Brown* (⏲ desde 1:30 hasta 7:00) [a) & b)]
Tricky Average Value Problem! del canal *Math For Life* (⏲ 2:15) [c)]
Lec 23 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 18:23) [d), e) & f)]

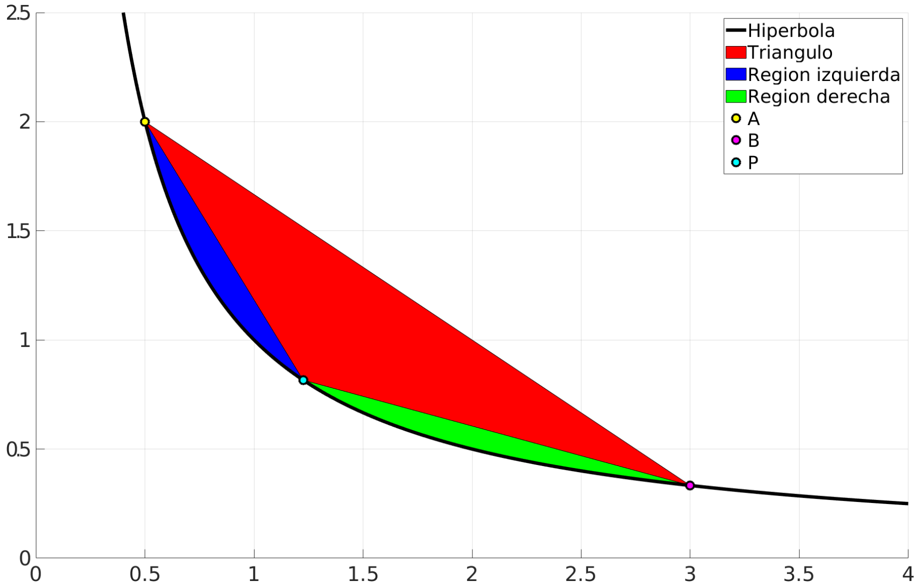


FIGURA 23. Geometría del problema 209.

209. *(Triángulos en una hipérbola)* Fijamos dos puntos $A = (a, 1/a)$ y $B = (b, 1/b)$ sobre la rama de la hipérbola $xy = 1$ contenida en el primer cuadrante tales que $a < b$. Sea $P = (t, 1/t)$ un tercer punto sobre esa rama tal que $a \leq t \leq b$. La geometría del problema está representada en la figura 23.

a) Calcula las funciones $f_{AB}(x)$, $f_{AP}(x)$ y $f_{BP}(x)$ cuyas gráficas son las rectas que pasan por A y B, por A y P y por B y P, respectivamente.
b) Calcula el área del triángulo rojo de vértices A, B y P sin usar fórmulas de geometría.
c) Encuentra el valor $t = t_\star$ que maximiza esa área.
d) Sea $P_\star = (t_\star, 1/t_\star)$. Prueba que las regiones azul y verde tienen la misma área.

Putnam Exam | 2015: A1 del canal *Michael Penn* (⏲ 10:48)

210. *(Una aplicación del teorema de valor intermedio)* Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(t) = \int_0^1 x^t e^x \, dx.$$

a) Prueba que f es continua en el intervalo $[0, 1]$ usando la definición ϵ–δ de continuidad. (Ver problema 89.)
b) Deduce que existe algún $t \in (0, 1)$ tal que $f(t) = 3/2$.

a nice "advanced" calculus problem del canal *Michael Penn* (⏲ 10:07)

211. *(Unas integrales definidas casi trigonométricas)* Prueba que si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\int_0^\pi x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx.$$

[*Indicación:* Realiza el cambio de variable $u = \pi - x$.]

a) Calcula la integral definida $\displaystyle\int_0^\pi (1 + 2x) \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$.
b) Calcula la integral definida $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$.

A nice integration trick! del canal *Michael Penn* (⏲ 16:29) [a)]

A pretty GREat integral del canal *Michael Penn* (⏲ 7:59) [b)]

212. *(Integración & simetrías)* Una función $f(x)$ es par respecto un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ cuando cumple la relación $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$ para todo x y es impar respecto $x_0 \in \mathbb{R}$ cuando cumple la relación $f(x_0 - x) = -f(x_0 + x)$ para todo x. Sea $f : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ una función integrable para algún $\delta > 0$. Prueba que:

- Si $f(x)$ es par respecto x_0, entonces $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{x_0-\delta}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si $f(x)$ es impar respecto x_0, entonces $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aplica estos resultados al cálculo de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(x^3 \cos(x/3) + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Students In China: Math Problem For Access! del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:58)

b) $\displaystyle\int_{-n}^{n+1} \big(x - \lfloor x \rfloor\big)\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{-(n+1)}^{n} \big(x - \lceil x \rceil\big)\,\mathrm{d}x$.

213. *(Un problema de Michael Spivak)* Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y con segunda derivada continua (es decir, una función de clase $C^2([0, \pi])$) tal que $f(\pi) = 1$ y

$$\int_0^{\pi} \big(f(x) + f''(x)\big) \sin x\,\mathrm{d}x = 2.$$

Calcula $f(0)$ integrando por partes dos veces para eliminar la segunda derivada f''.

Thank you Spivak del canal *Michael Penn* (⏲ 6:14)

☣ **214.** *(Un truco clásico)* Prueba que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua arbitraria entonces

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a + b - x) + f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{b - a}{2}.$$

Aplica este resultado al cálculo de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{6 - x}}\,\mathrm{d}x$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$.

c) $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{\log 3}}^{\sqrt[3]{\log 4}} \frac{x^2 \sin(x^3)}{\sin(x^3) + \sin(\log 12 - x^3)}\,\mathrm{d}x$.

Solve In Just Seconds! (India's IIT JEE Test) del canal *MindYourDecisions* (⏲ 6:34)

215. *(Una integral trigonométrica con truco)* Calcula la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

mediante el cambio de variable $t = \tan(x/2)$. ¿Se puede calcular de otra forma más sencilla?

Lots of work, or a quick trick!! del canal *Michael Penn* (⏲ 15:14)

216. *(Otra integral trigonométrica con truco)* Calcula, usando el problema 214, la integral definida

$$I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^\alpha},$$

donde $\alpha > 0$ es un parámetro. Comprueba que el resultado no depende de α.

All Putnam integrals have tricks del canal *Michael Penn* (⏲ 6:28) [solo el caso $\alpha = \sqrt{2}$]

217. *(Unas integrales trigonométricas duras)* Consideramos la función trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{1+3\cos^4 x + 3\sin^4 x}.$$

a) Calcula la integral definida $I_1 = \int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x$.
b) Prueba que $f(x)$ es una función periódica de periodo $\pi/2$.
c) Prueba que $f(x)$ es una función par respecto al punto $\pi/4$.
d) Deduce que

$$I_n = \int_0^{n\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x = nI_1, \qquad \forall n \geq 1.$$

A trigonometric integral del canal *Michael Penn* (⏲ 21:05) [Michael usa un método diferente]

218. *(Unas integrales racionales recurrentes)*

a) Considera las primitivas $F_n(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcula $F_1(x)$ y prueba, integrando por partes, la recurrencia

$$F_n(x) = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}F_{n-1}(x), \qquad \forall n \geq 2.$$

b) Calcula las integrales definidas $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A couple of interesting integral formulas del canal *Michael Penn* (⏲ 10:09)

☣ **219.** *(Desigualdades con π y $\log 4$)* Sea $\alpha_\pm = \pi \pm \log 4$. Se puede probar que dado un entero arbitrario $n \geq 0$ existen cuatro números $r_n, s_n, t_n, u_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{4^{n-1}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = (-1)^n(\pi - r_n),$$
$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{4n+1}(1-x)^{4n+1}}{4^{n-1}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = (-1)^n(\alpha_+ - s_n),$$
$$K_n = \int_0^1 \frac{x^{4n+2}(1-x)^{4n+2}}{2^{2n-1}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = (-1)^n(\log 4 - t_n),$$
$$L_n = \int_0^1 \frac{x^{4n+3}(1-x)^{4n+3}}{2^{2n-1}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = (-1)^n(u_n - \alpha_-).$$

a) Calcula r_1. Deduce que $\pi < 22/7$.
Legendary test question - π is less than $22/7$ del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:43)
b) Calcula s_0. Deduce que $\alpha_+ > 4$.
c) Calcula t_0. Deduce que $\log 4 > 4/3$.
d) Calcula u_0. Deduce que $\alpha_- < 53/30$.

n	r_n	s_n	t_n	u_n
0	0	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{53}{30}$
1	$\frac{22}{7}$	$\frac{11411}{2520}$	$\frac{38429}{27720}$	$\frac{421691}{240240}$
2	$\frac{47171}{15015}$	$\frac{17069771}{3769920}$	$\frac{1290876029}{931170240}$	$\frac{817240769}{465585120}$
3	$\frac{431302721}{137287920}$	$\frac{1939467473639}{428338310400}$	$\frac{356281790621}{257002986240}$	$\frac{130823901842567}{74530866009600}$
4	$\frac{741269838109}{235953517800}$	$\frac{1549850007762613}{342289903155200}$	$\frac{12811893190532663}{9241827385190400}$	$\frac{600220061655474431}{341947613252044800}$
5	$\frac{26856502742629699}{8548690331301120}$	$\frac{8464040862393468127}{1869313619111178240}$	$\frac{3342930418846589436 43}{241141456865341992960}$	$\frac{1410917291598131585159}{803804856217806643200}$
∞	π	α_+	$\log 4$	α_-

CUADRO 8. Aproximaciones racionales de π, $\alpha_+ = \pi + \log 4$, $\log 4$ y $\alpha_- = \pi - \log 4$.

e) Prueba que $0 < I_n < 1/4^{5n-1}$ para todo $n \geq 0$. Deduce que $\pi = \lim_{n\to+\infty} r_n$ y $r_{2k} < \pi < r_{2k+1}$ para todo entero $k \geq 0$. Es decir, r_n son aproximaciones racionales de π.

f) Usa la página web de Wolfram Alpha para calcular las aproximaciones racionales r_n, s_n, t_n y u_n dadas en el cuadro 8.

220. *(Ortogonalidad de Fourier)* Sean m y n dos números naturales arbitrarios.

a) Prueba que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta)\ d\theta = \pi$.

b) Prueba que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(n\theta)\, d\theta = 0$.

c) Prueba que si $m \neq n$, entonces $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(n\theta)\ d\theta = 0$.

Orthogonal Set of Functions (Fourier Series) del canal *patrickJMT* (⏲ 11:00)

221. *(Prueba de la irracionalidad de π por Ivan Niven, 1947)* Vamos a probar que π es irracional por reducción al absurdo. Empezamos suponiendo que existen dos números naturales a y b tales que

$$\pi = \frac{a}{b}.$$

A continuación, fijamos $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y consideramos los polinomios

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \qquad F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

y la integral

$$I = \int_0^{\pi} f(x)\sin x\ dx.$$

a) Prueba que $f^{(k)}(0)$ es un número entero para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$.

b) Deduce que $F(0)$ es un número entero.

c) Prueba $F(x) = F(a/b - x)$ usando la simetría $f(x) = f(a/b - x)$.

d) Deduce que $F(\pi) = F(0)$.

e) Prueba que $F'(x)\sin x - F(x)\cos x$ es una primitiva de $f(x)\sin x$, luego $I = F(0) + F(\pi)$ es un número entero.

f) Prueba que $0 < I < \pi^{n+1}a^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

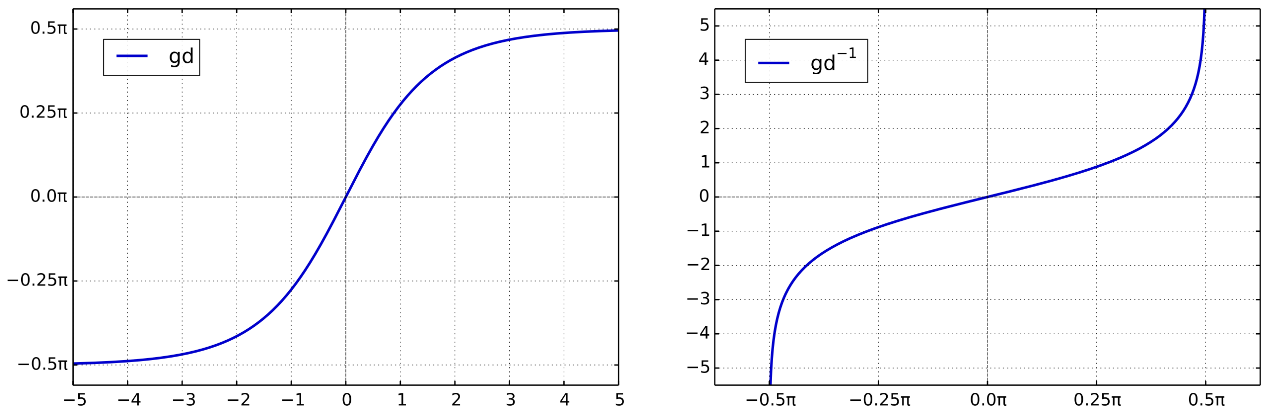


FIGURA 24. Gráficas de la función de Gudermann y su inversa. (Imágenes extraídas de Wikipedia.)

g) Deduce que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Proof that π is irrational

Proving Pi Is Irrational del canal *MindYourDecisions* (⏲ 11:02)

Pi is irrational: simplest proof on toughest test del canal *Mathologer* (⏲ 19:09) [con diferencias]

222. *(Definición integral del logaritmo y la exponencial)* El objetivo de este problema es presentar la definición integral del logaritmo natural $\log x$, del número e y de la función exponencial e^x, para, a continuación, deducir sus propiedades básicas. Por tanto, para evitar razonamientos circulares, no podemos usar ninguna propiedad de esas funciones antes de probarla. Para enfatizar esta restricción, inicialmente notaremos como $\mathrm{Ln}(x)$ y $\exp(x)$ a las funciones aquí definidas. Solo tras acabar el problema diremos que $\mathrm{Ln}(x) = \log x$ y $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Considera la función integral

$$\mathrm{Ln}(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

a) Justifica que $\mathrm{Ln}(x)$ es derivable y calcula su derivada.
b) Prueba que $\mathrm{Ln}(x)$ cumple las siguientes propiedades:
  I) $\mathrm{Ln}(1) = 0$;
  II) $\mathrm{Ln}(ab) = \mathrm{Ln}(a) + \mathrm{Ln}(b)$ para todo $a, b > 0$;
  III) $\mathrm{Ln}(a/b) = \mathrm{Ln}(a) - \mathrm{Ln}(b)$ para todo $a, b > 0$; y
  IV) $\mathrm{Ln}(a^r) = r\,\mathrm{Ln}(a)$ para todo $a > 0$ y $r \in \mathbb{R}$.
c) Prueba que $\mathrm{Ln} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es creciente y, además,

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{Ln}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \mathrm{Ln}(x) = +\infty.$$

d) Deduce que existe un único número $\mathrm{e} > 1$ tal que $\mathrm{Ln}(\mathrm{e}) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1$.
e) Deduce que $\mathrm{Ln} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es biyectiva y prueba que su inversa $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ cumple que $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Calculus: Volume 2 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*829* páginas) [concretamente, §6.7]

Integral Calculus Marathon Livestream del canal *Michael Penn* (⏲ desde 4:37:35 hasta 4:52:30)

223. *(La función de Gudermann)* Considera la función integral

$$\operatorname{gd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh t} \, \mathrm{d}t$$

que sirve para relacionar las funciones circulares e hiperbólicas sin usar números complejos.

a) Prueba que $\operatorname{gd}(x) = 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \pi/2$ mediante el cambio de variable $u = \mathrm{e}^t$.

b) Prueba que la función $\operatorname{gd} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es impar, biyectiva y creciente.

c) Prueba que $\sin(\operatorname{gd}(x)) = \tanh x$ usando las identidades trigonométricas

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta.$$

d) Prueba que

$$y = \operatorname{gd}(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = \frac{1}{\cos x} + \tan x.$$

Indicación: Usa las identidades trigonométricas

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}, \qquad \tan(\theta/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}.$$

e) Deduce que

$$\operatorname{gd}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x, \qquad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

[*Indicación:* Las gráficas de las funciones $\operatorname{gd}(x)$ y $\operatorname{gd}^{-1}(x)$ están dibujadas en la figura 24.]

W Gudermannian function

the Gudermannian function! del canal *Michael Penn* (⏲ 16:40)

224. *(Una ecuación integro-diferencial)*

a) Encuentra todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[*Indicación:* Calcula la derivada de $g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$.]

b) Encuentra todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación integro-diferencial

$$\big(f(x)\big)^2 = 2021 + \int_0^x \left((f(x))^2 + (f'(x))^2 \right) \mathrm{d}t, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A hidden Putnam differential equation del canal *Michael Penn* (⏲ 5:49)

225. *(Una aplicación de la regla de Leibniz)* Sea $f(x)$ una función continua que cumple la ecuación integral

$$\int_0^{x^2+x^3} f(t) \, \mathrm{d}t = x, \qquad \forall x \geq 0.$$

Calcula $f(2)$.

A calculus "bonus" question! del canal *Michael Penn* (⏲ 6:42)

226. *(Interpretación geométrica de Taylor)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y sea

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

su función integral. Fijamos dos puntos $a, x \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < x$ y consideramos la geometría de la figura 25. Sean A, V y R las áreas de las regiones azul, verde y roja, respectivamente. Sabemos que, por definición, $A = F(a)$.

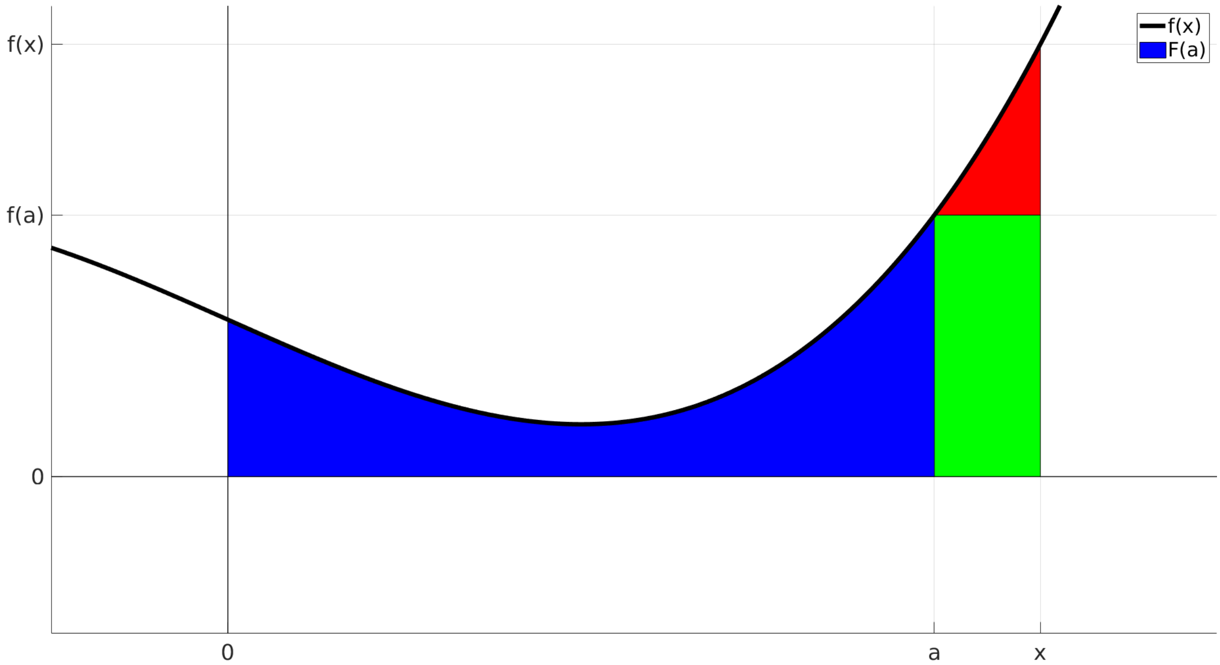


FIGURA 25. Geometría del problema 226.

a) Calcula los límites

$$\lim_{x\to a} \frac{V}{x-a}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{R}{(x-a)^2}$$

en términos de $f(x)$.

b) Interpreta cada uno de los términos del desarrollo de Taylor

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2}F''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

en función de las tres área de la figura 25.

Taylor series | Essence of calculus del canal *3Blue1Brown* (⏲ desde 14:29 hasta 17:13)

227. *(Una integral peligrosa)* Sea $a > 0$. Considera las integrales definidas

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1-ax}}, \qquad J_\pm = \int_0^1 \frac{\sqrt{1\pm ax}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

a) Calcula el límite indeterminado $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+ax}-1}{\sqrt{1-ax}-1}$.

b) Calcula, usando los cambios de variable $u = \sqrt{1\pm ax}$, las primitivas

$$\int \frac{\sqrt{1\pm ax}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1\pm ax} + \log\left|\frac{\sqrt{1\pm ax}-1}{\sqrt{1\pm ax}+1}\right| + c.$$

c) Deduce, por racionalización, que

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+ax}+\sqrt{1-ax}} &= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{\sqrt{1+ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sqrt{1-ax}}{x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}}{a} + \frac{1}{2a}\log\left|\frac{\left(\sqrt{1+ax}-1\right)\left(\sqrt{1-ax}+1\right)}{\left(\sqrt{1+ax}+1\right)\left(\sqrt{1-ax}-1\right)}\right| + c\end{aligned}$$

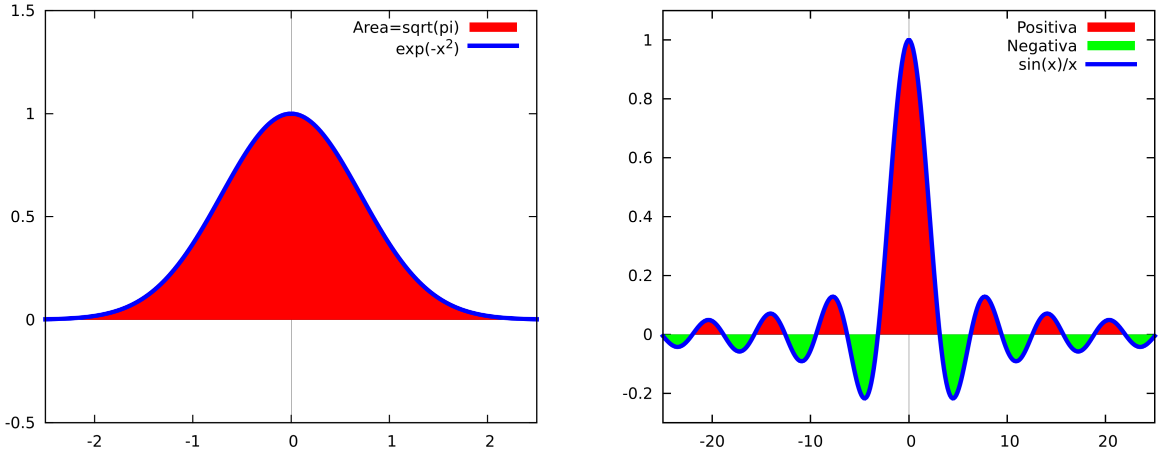


FIGURA 26. Izquierda: Integral gaussiana. Derecha: Integral de Dirichlet.

d) Prueba que la integral I es propia, pero las integrales $J_{\pm}$ son impropias y divergentes. Calcula I.
A very unfriendly integral problem! del canal *Michael Penn* (⏲ 17:12)

228. *(La función Gamma)* Considera la función $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

a) Prueba que esta integral impropia es convergente para todo $\alpha > 0$.
b) Prueba, integrando por partes, que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ para todo $\alpha > 0$.
c) Deduce que

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\Gamma(1/2), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

d) Prueba que $\Gamma(1/2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. (Esta es la integral gaussiana, ver figura 26.)
[*Nota:* La última igualdad sobrepasa este curso, pues requiere integrales dobles.]
The Gamma Function and (-1/2)! del canal *Michael Penn* (⏲ 9:15)

229. *(Integral de Dirichlet por la técnica de Feynman)* Considera la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x,$$

que recibe el nombre de integral de Dirichlet, ver la figura 26.
a) Prueba que la integral de Dirichlet es convergente, pero no es absolutamente convergente.
b) Prueba que, en cambio, la integral

$$I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-bx} \, \mathrm{d}x$$

es absolutamente convergente para todo $b > 0$.
[*Nota:* Esta integral es la transformada de Laplace $I(b) = \mathcal{L}\{\frac{\sin x}{x}\}(b)$, ver el problema 234.]
c) Calcula $\lim_{b \to +\infty} I(b)$.

d) Calcula la derivada

$$I'(b) = \frac{\partial}{\partial b}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x\right] = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-bx}\right]\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

[*Nota:* La segunda igualdad recibe el nombre de regla de Leibniz o derivación bajo el signo de la integral. Suponed que es cierta y calculad solo la última integral.]

e) Deduce que $I(b) = \pi/2 - \arctan b$, luego la integral de Dirichlet es $I(0) = \pi/2$.

W Leibniz integral rule

W Dirichlet integral

Integración de Rafael Ramírez Ros (*19* páginas) [Ver el Ejemplo 19 para el apartado a)]

Integral of $\sin(x)/x$, via Feynman's Technique del canal *blackpenredpen* (22:43)

230. *(Una función Gamma escondida)* Considera la integral

$$I_n = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^n \mathrm{d}t, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

a) Prueba, integrando por partes, que se cumple la recurrencia

$$I_0 = 1, \qquad I_n = nI_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deduce que $I_n = n!$.

b) Prueba que si realizamos el cambio de variables $x = \log\frac{1}{t}$, entonces $I_n = \Gamma(n+1)$, donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma definida en el problema 228.

How exciting is this integral? del canal *Michael Penn* (9:28)

231. *(El cuerno de Gabriel)* Considera la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$. El cuerno de Gabriel (también llamado trompeta de Torricelli) se forma girando la gráfica de la función $y = f(x)$ alrededor del eje Ox. Ver la figura 27.

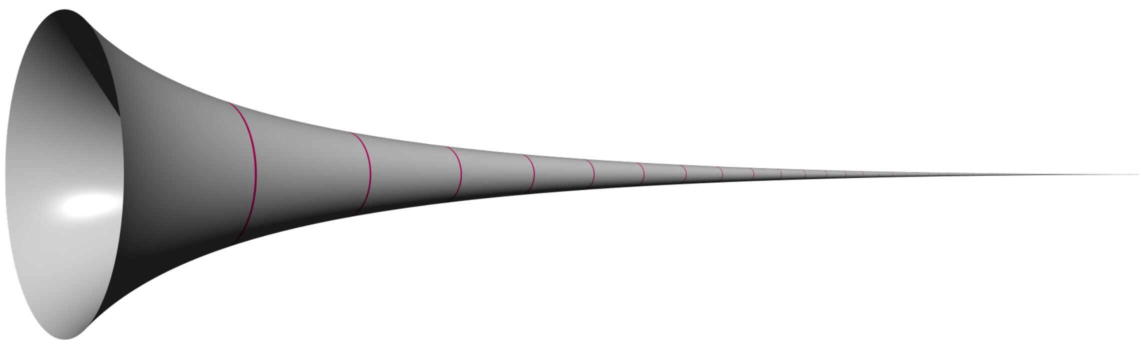


FIGURA 27. Cuerno de Gabriel. (Imagen extraída de Wikipedia.)

Las fórmulas presentadas en los problemas 204 y 207 implican que el volumen y el área superficial del cuerno de Gabriel vienen dadas por las integrales impropias

$$V = \pi\int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x, \qquad A = 2\pi\int_1^{+\infty} f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

a) Prueba que el cuerno de Gabriel tiene volumen finito y área superficial infinita.

b) Entiende la deducción de las dos fórmulas anteriores presentada en el vídeo.

W Gabriel's Horn

Gabriel's Horn Paradox del canal *Numberphile* (18:19)

232. *(La función Beta)* Considera la función $B : (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

a) Prueba que esta integral impropia es convergente para todo $x, y > 0$.
b) Prueba que la función Beta tiene las siguientes propiedades para todo $x, y > 0$:
- *Simetría:* $B(x,y) = B(y,x)$.
- *Identidad de Pascal:* $B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$.
- *Recurrencias:*

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x}B(x+1,y),$$
$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y),$$
$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y).$$

- *Valores en argumentos enteros:* $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.
- *Forma trigonométrica:* $B(x,y) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\ \mathrm{d}\theta$.

[*Indicaciones:* Usa el cambio de variables $u = 1-t$ para la simetría, una manipulación algebraica directa para la identidad de Pascal, integración por partes para la primera recurrencia, inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ para los valores en argumentos enteros y el cambio de variable $t = \sin^2\theta$ para la forma trigonométrica.]

W Beta function

Beta Function del canal *Assignment Expert* (⏲ 32:52) [sigue otro orden]

An Integral Formula for the Beta Function del canal *Mu Prime Math* (⏲ 6:48) [argumentos enteros]

233. *(Identidades entre integrales impropias)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.

a) Prueba que si las integrales impropias

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

son convergentes, entonces son iguales.

a property of improper integrals, bprp retro! del canal *blackpenredpen* (⏲ 4:05)

b) Encuentra y explica el error en la siguiente “demostración”.

Aplicando el apartado anterior a la función $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{(1+x^2)\log x}$ obtenemos que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{(1+x^2)\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+1/x)}{x^2(1+1/x^2)\log(1/x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\log x - \log(1+x)}{(1+x^2)\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - J = \frac{\pi}{2} - J.$$

Por tanto, J es una integral convergente cuyo valor es $\pi/4$.

c) Prueba que si las integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

son convergentes, entonces son iguales.

An improper integral identity del canal *Michael Penn* (⏲ 10:54)

234. *(Transformadas de Laplace: Ejemplos)* Dada una función integrable $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que no crezca demasiado rápido cuando $t \to +\infty$, su transformada de Laplace es la función definida como la integral impropia

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

La función original $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$ son funciones de variables diferentes, luego es importante usar una notación clara. Habitualmente, la transformada de Laplace se denota con la misma letra que la función original, pero en mayúscula. El dominio de $F(s)$ está formado por los valores de $s \in \mathbb{R}$ para los cuales la correspondiente integral impropia es convergente.

Prueba las cuatro transformadas de Laplace dadas en el cuadro 9.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
e^{at} con $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{s-a}$ definida para $s > a$
t^n con $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ definida para $s > 0$
$\sin(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ definida para $s > 0$
$\cos(\omega t)$ con $\omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$ definida para $s > 0$

CUADRO 9. Las cuatro transformadas de Laplace más típicas.

W Laplace transform
Laplace Transform: First Order Equation del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 5:25)
What is the Laplace transform of $f(t) = t^n$? del canal *Michael Penn* (⏲ 4:28)
Laplace Transforms of sine and cosine del canal *Michael Penn* (⏲ 9:51)

235. *(Transformadas de Laplace: Propiedades)* Sean $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$ dos transformadas de Laplace. Prueba que el operador $\mathcal{L}$ tiene las siguientes propiedades:

a) *Linealidad:* $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$, para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
b) *Desplazamiento de frecuencia:* $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$.
c) *Transformada de la derivada:* $f(t)$ derivable $\Rightarrow \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - y(0^-)$.

[*Nota:* En Wikipedia hay una tabla de propiedades mucho más completa.]

W Laplace transform
Laplace transform rules: Linearity and Shifting del canal *Mu Prime Math* (⏲ 4:41) [a) & b)]
Laplace Transform: First Order Equation del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ de 5:50 a 10:00) [c)]

236. *(Transformadas de Laplace: Aplicaciones)* Usa uno de los ejemplos del problema 234 y dos de las propiedades del problema 235 para probar los siguientes resultados:

a) Si $y(t)$ es una función derivable tal que $y' = ay$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{at}.$$

b) Si $y(t)$ es una función derivable tal que $y' = ay + \mathrm{e}^{ct}$ con $a, c \in \mathbb{R}$ y $c \neq a$, entonces

$$y(t) = y(0)\mathrm{e}^{at} + \frac{\mathrm{e}^{ct} - \mathrm{e}^{at}}{c - a}.$$

[*Nota:* La transformada de Laplace convierte ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) lineales en ecuaciones algebraicas más sencillas. Veréis cómo hacerlo sistemáticamente en otra asignatura.]

Laplace Transform: First Order Equation del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 5:25)

237. *(Una integral con fracciones y logaritmos)* Consideramos la integral impropia

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x^\alpha) - \log(1 + x^\beta)}{(1 + x^2)\log x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) ¿En qué puntos es impropia? Prueba que el integrando es una función continua y acotada en todo el intervalo de integración. Deduce que la integral es convergente.

b) Calcula la integral usando el problema 233.

BIG brilliant integral del canal *blackpenredpen* (⏲ 14:54)

238. *(Integral del logaritmo divido por un polinomio cuadrático)* Considera las integrales impropias

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{cx^2 + bx + a}\,\mathrm{d}x,$$

donde $a, c \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

a) Prueba que $I + J = 0$ usando el problema 233.

b) Deduce que $I = 0$ cuando $c = a$.

c) Calcula I cuando $a = 1$, $b = 2$ y $c = 9$ mediante el cambio de variable $x = 3t$.

This trick is new to me! del canal *Michael Penn* (⏲ 12:39)

239. *(Una integral con raíces y logaritmos)* Queremos probar que la integral impropia

$$K = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

es convergente e igual a π.

a) ¿En qué puntos es impropia la integral? Prueba que la integral es convergente sin calcularla.

b) Prueba que al realizar el cambio de variable $t = \sqrt{x/(1-x)}$, se obtiene

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) Deduce, usando el apartado 238b, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

d) Calcula K aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{x/(1-x)}$ en la integral original e integrando por partes la integral resultante con

$$u = t\log t, \qquad \mathrm{d}v = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

a rad integral! del canal *Michael Penn* (⏲ 10:46)

240. *(Integral de* $\log(\cos(x))$*)* Considera la integral impropia (¿en qué punto?)

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Prueba que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin u)\,\mathrm{d}u$ mediante el cambio de variable $u = \pi/2 - x$.

b) Prueba que $I = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin v)\,\mathrm{d}v$ mediante el cambio de variable $v = x + \pi/2$.

c) Prueba que $I + I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x \sin x)\,\mathrm{d}x$.

d) Deduce que $I = -\frac{\pi}{2}\log 2$.

Integral of ln(cos x) del canal *Michael Penn* (⏲ 13:57)

241. *(Integral de* $\arctan^2(1/x)$*)* Considera la integral impropia (¿en qué puntos?)

$$\int_0^{+\infty} \arctan^2(1/x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Prueba que un primer cambio de variable $t = 1/x$ y una integración por partes, transforma esta integral en

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

b) Prueba que un segundo cambio de variable $y = \arctan t$ y otra integración por partes, transforma la segunda integral en

$$-2\int_0^{\pi/2} \log(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

c) Deduce el valor de la integral original a partir del problema 240.

An inverse tangent integral del canal *Michael Penn* (⏲ 15:23)

242. *(La máquina quitanieves)* Esta es una pregunta famosa que ha asombrado a miles de estudiantes. Prometo que NO es una pregunta con trampa.

a) Empezamos con una piadosa indicación. Sea $f(t)$ una función tal que

$$f'(t) = \frac{\alpha}{t+\beta}$$

para algunos parámetros $\alpha, \beta > 0$. Determina β a partir de la regla de Barrow y los siguientes datos:

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 2, \qquad f(2) = 3.$$

b) Y ahora ya estamos listos para la pregunta. Un día empezó a nevar por la mañana de forma continua y uniforme. Una máquina quitanieves salió al mediodía, avanzando 2 kilómetros en la primera hora y 1 kilómetro en la segunda hora. ¿A qué hora empezó a nevar?

[*Nota:* Ralph Palmer Agnew es el inventor del problema. En el libro de texto de 1942 donde lo publicó, tras el enunciado del problema, decía con sorna:

Our first task is to try to recover from the shock of being asked to solve such a problem, by attempting to analyze the problem.

Doy fe que me quedé a cuadros cuando lo leí con 20 años. Me costó más de media hora entenderlo y menos de diez minutos resolverlo. Pero yo no tenía la indicación del primer apartado ;)]

The Famous Snowplow Math Problem del canal *MindYourDecisions* (⏲ 8:56)

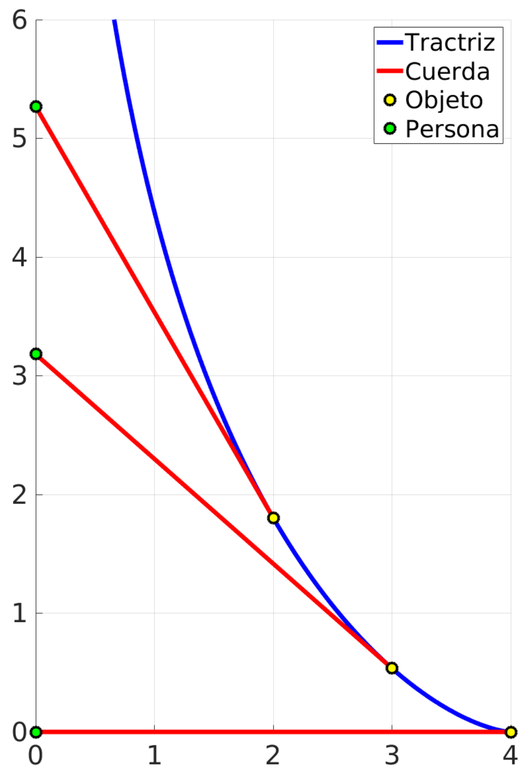


FIGURA 28. Geometría del problema 243 para $a = 4$.

243. *(La tractriz)* Sea $a > 0$. Considera la función integral $F : (0, a] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad 0 < x \leq a.$$

Queremos probar que la gráfica de está función es la curva descrita por un objeto inicialmente en la posición $(a, 0)$ que es estirado con una cuerda de longitud a por una persona inicialmente colocada en el origen, cuando la persona se desplaza hacia arriba sobre el eje vertical sin soltar la cuerda. La geometría del problema está esquematizada en la figura 28.

a) Prueba que $F : (0, a] \to \mathbb{R}$ es decreciente.

b) Calcula $F(a)$ y $\lim_{x\to 0^+} F(x)$. Deduce que el eje vertical es la asíntota de la gráfica

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = F(x),\ 0 < x \leq a\}.$$

c) Calcula $F'(a)$ y $\lim_{x\to a^-} F''(x)$.

d) Prueba que si escogemos un punto arbitrario $O \in \mathcal{G}$ (el objeto) y P es el punto donde la recta tangente a la gráfica corta al eje vertical (la persona), entonces $\|O - P\|$ (la longitud de la cuerda) es constante e igual al valor a.

e) Calcula explícitamente la función integral mediante el cambio $t = a \sin\theta$.

W Tractrix

$\forall\exists$ **244.** *(Particiones y sumas de Riemann)* Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo compacto $[a, b]$.

- Una partición de $[a, b]$ es un conjunto $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$ de puntos ordenados tales que $x_0 = a$ y $x_n = b$.
- Dada una partición $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$, notamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

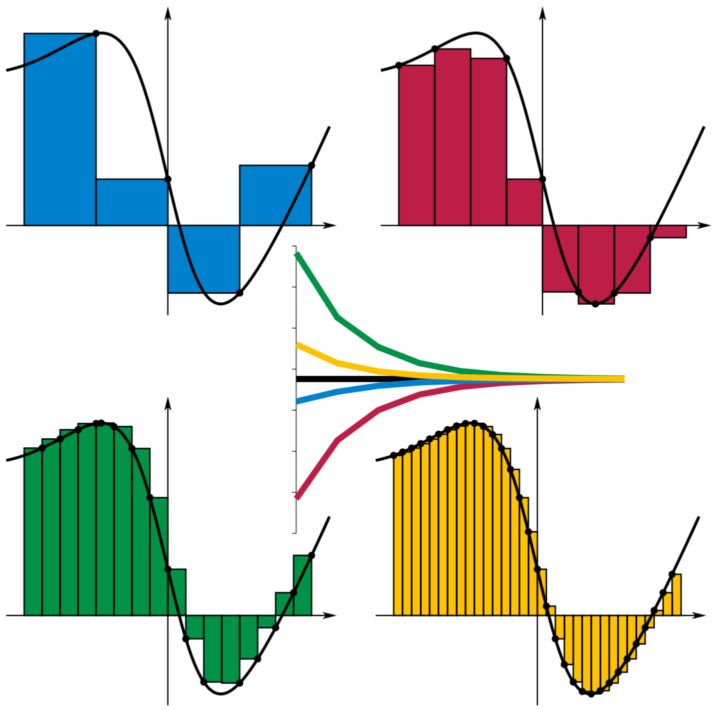


FIGURA 29. Cuatro ejemplos de sumas de Riemann. La suma roja/verde es un ejemplo de suma inferior/superior. (Image extraída de Wikipedia.)

- Las sumas de Riemann inferior y superior de la función f asociadas a la partición P son

$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad U(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Calcula $L(f,P)$ y $U(f,P)$ cuando $[a,b]=[1,5]$, $f(x)=x$ y $P=\{1,3/2,2,4,5\}$.
[*Nota:* En la figura 29 hay cuatro ejemplos de Sumas de Riemann.]
Partitions and upper/lower sums del canal *Michael Penn* (⏲ 9:03)

∀∃ **245.** *(Particiones refinadas)* Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo compacto $[a,b]$.

a) Sean P y Q dos particiones de un intervalo $[a,b]$ tales que Q es un refinamiento de P. Es decir, $P \subset Q$. Prueba que

$$L(f,P) \leq L(f,Q), \qquad U(f,P) \geq U(f,Q).$$

b) Deduce que si P_1 y P_2 son dos particiones arbitrarias de $[a,b]$, entonces $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$.

Refinements of partitions del canal *Michael Penn* (⏲ 16:23)

∀∃ **246.** *(Toda función continua en un intervalo compacto es integrable)* Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$. Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable si y solo si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists P = P_\epsilon \in \mathcal{P} \text{ tal que } 0 \leq U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Prueba que si f es continua, entonces f es Riemann integrable.
Riemann Integrability del canal *Michael Penn* (⏲ desde 11:50)

Sucesiones

To infinity and beyond!
(Buzz Lightyear en Toy Story)

¿Qué hay que saber?

Este tema solo tiene dos partes: el principio de inducción y el estudio de sucesiones.

En la primera, se presenta el principio de inducción, que sirve para probar de forma rigurosa que una determinada propiedad se cumple para todo natural. Después, se prueban varias propiedades usando esa herramienta. Los ejemplos más clásicos consisten en calcular las sumas de los primeros n números, n cuadrados, n cubos, n impares, etcétera.

En la segunda, se introducen las sucesiones. Las sucesiones son a la variable discreta lo que las funciones son a la variable continua. Se listan las sucesiones más importantes: aritméticas, geométricas, de Fibonacci, etcétera. Se explica la definición ϵ–N de límite y se presentan las primeras herramientas para calcular límites: el paso a variable continua y el terorema del bocadillo. Se resaltan las particularidades de las series monótonas, crecientes o decrecientes. Se proporcionan varios criterios (media aritmética, media geométrica, cociente-raíz y Stolz) para calcular los límites más difíciles. El criterio de Stolz es una versión discreta de la regla de L'Hôpital.

Este tema es una novedad completa para el estudiante novato.

La primera parte de este tema está explicada, con varios ejemplos, en el siguiente vídeo:

Problem Solving | Induction del canal *Michael Penn* (⏲ 17:59)

La segunda parte de este tema se corresponde con la sección 5.1 del libro:

Calculus: Volume 2 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*829* páginas)

Al acabar el tema se espera que sepáis:

- Aplicar el método de inducción para probar fórmulas y propiedades que dependen de $n \in \mathbb{N}$;
- Aplicar inducción fuerte cuando sea necesario;
- Tratar sucesiones dadas en forma recurrente o en forma de término general;
- Estudiar sucesiones monótonas siguiendo el proceso estándar; y
- Calcular límites de sucesiones más o menos complicadas.

Problemas

247. *(Sumas inductivas)* Prueba, por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, las siguientes sumas.

a) La suma de los primeros n números es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2 = n^2/2 + n/2.$$

Proof by induction | Sequences, series and induction del canal *Khan Academy* (⏲ 9:22)

b) La suma de los primeros n impares es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

Principle of Mathematical Induction Example 1 del canal *Michael Penn* (⏲ 5:00)

c) La suma de los primeros n cuadrados es

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 = n^3/3 + n^2/2 + \mathrm{O}(n).$$

d) La suma de los primeros n cubos es

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \big(n(n+1)/2\big)^2 = n^4/4 + n^3/2 + \mathrm{O}(n^2).$$

Proof by induction: Sum of the first n cubes del canal *blackpenredpen* (⏲ 9:02)

[*Nota:* El teorema de Nicómaco establece que la suma de los primeros n cubos es igual al cuadrado de la suma de los primeros n números. Es una consecuencia de los apartados primero y último.]

248. *(Sumas visuales)* Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Encuentra pruebas visuales de las siguientes sumas.

a) Suma de los primeros n números: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = n(n+1)/2$.
Power sum MASTER CLASS: del canal *Mathologer* (⏲ desde 4:28 hasta 7:00)

b) Suma de los primeros n impares: $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.
Sum of first n odd numbers del canal *Think Twice* (⏲ 1.25)

c) Suma de los primeros n cuadrados: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(n+1/2)/3$.
Sum of n squares - explained visually del canal *Think Twice* (⏲ 2:13)

d) Suma de los primeros n cubos: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.
Nicomachus's theorem - Visualisation del canal *Think Twice* (⏲ 1:36)

249. *(Derivadas inductivas)* Sea $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x.$$

induction proof for the nth derivative of xe^x del canal *blackpenredpen* (⏲ 6:22)

250. *(Un problema de divisibilidad)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que $5^{2n} - 1$ es un múltiplo de tres.

Principle of Mathematical Induction Example 2 del canal *Michael Penn* (⏲ 5:50)

251. *(Regla de Leibniz generalizada)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables n veces, entonces su producto también es derivable n veces y, además,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

General Leibniz rule

Pi is irrational del canal *Michael Penn* (⏲ solo hasta 8:15)

252. *(Dos sumas iguales)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}.$$

2014 Argentina Mathematical Olympiad del canal *Michael Penn* (⏲ desde 15:48 hasta 20:54)

253. *(Una desigualdad inductiva)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x > 0.$$

[*Opcional:* Prueba la desigualdad usando la forma del resto de Lagrange.]
Lec 14 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 44:30)

254. *(La desigualdad de Bernoulli)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall x \geq -1.$$

W Bernoulli's inequality
Proof of Bernoulli's Inequality using Mathematical Induction del canal *The Math Sorcerer* (⏲ 5:41)

255. *(Ejemplo de inducción fuerte)* Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $r + 1/r \in \mathbb{Z}$. Prueba por inducción fuerte sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

[*Curiosidad:* Si $r = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$, con $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, entonces $r \in \mathbb{R}$ y $r + 1/r \in \mathbb{Z}$.]
Strong Induction Proof del canal *blackpenredpen* (⏲ 13:28)

☣ **256.** *(Desigualdad HM-GM generalizada)* Prueba por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}, \qquad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0.$$

[*Indicación:* Prueba que la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = n \log n - n \log x + (n+1)\log(x+1) - (n+1)\log(n+1)$$

tiene un mínimo global en $x = n$ y, además, $f(n) = 0$.]
OVERKILL | an obvious inequality del canal *Michael Penn* (⏲ desde 12:30 hasta 21:30)

❗ **257.** *(Inducciones locas)* Encuentra y explica los errores de las siguientes "demostraciones".

a) Los primeros 39 valores de la expresión $n^2 + n + 41$ son 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523 y 1601. Como todos ellos son números primos, concluimos que todos los números de la forma $n^2 + n + 41$ son primos.
$n^2 + n + 41$ the Prime Sequence? del canal *blackpenredpen* (⏲ 7:09)

b) *Todos los caballos tienen el mismo color.* Como caso base, observamos que en un conjunto que contiene a un único caballo, todos los caballos son claramente del mismo color. Ahora suponemos que la proposición es cierta para todos los conjuntos de tamaño inferior o igual a n (hipótesis de inducción). Si hay $n + 1$ caballos en un conjunto, retiramos un caballo para obtener un conjunto resultante de n caballos y, por la hipótesis de inducción, todos los caballos en ese conjunto son del mismo color. Queda demostrar que este color es el mismo al del caballo que hemos retirado. Para eso, recuperamos el caballo retirado, retiramos otro y aplicamos otra vez el principio de inducción al nuevo conjunto de n caballos. Así todos los caballos en un conjunto de $n+1$ caballos son del mismo color. Por el principio de inducción, hemos establecido que todos los caballos son del mismo color.

W All horses are the same color

258. *(Intercambios peligrosos)* Encuentra y explica los errores de las siguientes "demostraciones".

a) Dado un $n \in \mathbb{N}$, se cumple la identidad

$$1 = n\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Si hacemos $n \to +\infty$ en esta identidad, la parte izquierda tiende a uno (pues es constante) y la parte derecha tiende a cero (pues $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ y el límite de la suma es la suma de límites). Por tanto, $1 = 0$.

b) Dado un $n \in \mathbb{N}$, se cumple la identidad

$$\mathrm{e} = \left(\sqrt[n]{\mathrm{e}}\right)^n = \sqrt[n]{\mathrm{e}} \times \sqrt[n]{\mathrm{e}} \times \cdots \times \sqrt[n]{\mathrm{e}}.$$

Si hacemos $n \to +\infty$ en esta identidad, la parte izquierda tiende a e (pues es constante) y la parte derecha tiende a 1 (pues $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}} = 1$ y el límite del producto es el producto de límites). Por tanto, $\mathrm{e} = 1$.

259. *(Más sobre el límite de* e*)* En el problema 5 dijimos que $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} c_n$, donde

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Además, estudiamos computacionalmente la velocidad con que la sucesión c_n tiende al número e. Ahora haremos un estudio riguroso de dos formas. La segunda es más potente.

a) Calcula $\lim_{n\to+\infty}(c_n - \mathrm{e})$ y $\lim_{n\to+\infty} n(c_n - \mathrm{e})$.
Be careful del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:09)

b) Calcula el polinomio de Maclaurin de grado tres de la función $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

c) Deduce que

$$c_n = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + \frac{11\mathrm{e}}{24n^2} - \frac{7\mathrm{e}}{16n^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right), \qquad (\text{cuando } n \to +\infty).$$

260. *(Un límite con la parte fraccionaria)* La parte fraccionaria $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ de un número $x \in \mathbb{R}$ se definió en el problema 19.

a) Prueba, usando el teorema del binomio, que $\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Calcula el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^n\right\}.$$

A fractional part limit del canal *Michael Penn* (⏲ 8:58)

261. *(Paso a variable continua)* Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\log \alpha}{n}\right)^{\beta n}$, donde $\alpha, \beta > 0$.
A viewer suggested limit del canal *Michael Penn* (⏲ 6:58)

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, donde $a, b > 0$.

a nice limit del canal *Michael Penn* (⏲ 8:37)

262. *(Límites como sumas de Riemann)* Calcula los siguientes límites usando que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}+\sqrt[n]{\mathrm{e}^2}+\cdots+\sqrt[n]{\mathrm{e}^n}}{n}$.

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$.

Most skipped limit problem on calc exams del canal *blackpenredpen* (⏲ 12:17)

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}$, donde $\alpha > 0$ es un parámetro.

Finding a limit using an integral! del canal *Michael Penn* (⏲ 6:43)

263. *(Sucesiones monótonas)*

a) Considera la sucesión recurrente dada por

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \qquad \forall n \geq 1.$$

I) Prueba que $1 < a_n < 2$ para todo $n \geq 1$.
II) Prueba que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
III) Calcula $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Monotone sequence theorem example del canal *Michael Penn* (⏲ 8:45)

b) Considera la sucesión recurrente dada por

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = 1 + a_n/2, \qquad \forall n \geq 1.$$

I) Prueba que $2 < a_n < 4$ para todo $n \geq 1$.
II) Prueba que $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
III) Calcula $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Monotone sequence theorem example 2 del canal *Michael Penn* (⏲ De 7:50 a 15:57)

c) Considera la sucesión recurrente dada por

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \log\left(\mathrm{e}^{a_n} - a_n\right), \qquad \forall n \geq 1.$$

I) Prueba que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.
II) Prueba que $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \geq 1$.
III) Calcula $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$.
IV) Suma, usando un argumento telescópico, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Putnam Exam | 2016: B1 del canal *Michael Penn* (⏲ 10:02)

264. *(Discontinuidad de un límite puntual de funciones continuas)* Considera la sucesión recurrente de funciones $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}, \qquad \forall n \geq 1.$$

[*Nota:* Esta sucesión recurrente es una generalización de la sucesión del apartado 263a.]

a) Prueba que todas las funciones $f_n(x)$ son continuas en el intervalo $[0,+\infty)$.
b) Prueba que si $x>0$, entonces

$$\sqrt{x} \le f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1+\sqrt{x}, \qquad \forall n \ge 1.$$

c) Deduce que existe la función límite $f_\infty : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_\infty(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
d) Prueba que $f_\infty(0)=0$ y $\lim_{x\to 0^+} f_\infty(x)=1$.
sqrt(0+sqrt(0+sqrt(0+...))) = ? del canal *blackpenredpen* (⏲ 7:55)

265. *(Media aritmético-geométrica)* Dados dos números positivos a y b, construimos dos sucesiones $(\alpha_n)_n$ y $(\beta_n)_n$ de forma recurrente mediante las fórmulas

$$\begin{cases} \alpha_0 = \max\{a,b\} \\ \beta_0 = \min\{a,b\} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_n = \mathrm{AM}(\alpha_{n-1},\beta_{n-1}) \\ \beta_n = \mathrm{GM}(\alpha_{n-1},\beta_{n-1}) \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$$

La media aritmética $\mathrm{AM}(a,b)$ y la media geométrica $\mathrm{GM}(a,b)$ se definieron en el problema 24.
a) Prueba por inducción que si $a \ne b$ entonces

$$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1} < \cdots < \alpha_{n+1} < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0.$$

b) Razona que las dos sucesiones son convergentes y prueba que ambas tienen el mismo límite.
c) Este límite es la media aritmético-geométrica de a y b:

$$\mathrm{AGM}(a,b) := \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n.$$

Deduce la desigualdad

$$\mathrm{GM}(a,b) \le \mathrm{AGM}(a,b) \le \mathrm{AM}(a,b)$$

y que la igualdad se cumple si y solo si $a=b$.
W Arithmetic–geometric mean

266. *(Aproximando el factorial)* En el problema 10 vimos que

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

luego ya sabemos que $n! \ll n^n$ cuando $n \to +\infty$. Queremos determinar con mayor precisión qué relación hay entre estas dos inmensas cantidades.
a) Prueba, usando el criterio cociente-raíz, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

A nice limit with a trick del canal *Michael Penn* (⏲ desde 11:10 hasta 15:55)
b) ¿Se puede deducir a partir del apartado anterior que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n} = 1$? ¿Y se puede deducir que la sucesión $a_n = n!\mathrm{e}^n/n^n$ es acotada?
W Stirling's approximation

267. *(El operador "derivada discreta" Δ)* Dada una sucesión (a_n), su derivada discreta es la sucesión

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Prueba que si dos sucesiones (a_n) y (b_n) tienen la misma derivada discreta, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_n = b_n + c, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Prueba, usando la propiedad anterior, la identidad

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! =: a_n = b_n := (n+1)! - 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Prueba la indentidad anterior por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Make it look like a simple calculus problem del canal *Michael Penn* (⏲ 13:56) [a) & b)]

268. *(Suma de las primeras potencias cuartas)* Queremos obtener una expresión cerrada de la suma de las primeras potencias p-ésimas

$$R_n(p) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

para la potencia $p = 4$ usando las expresiones cerradas para las potencias $p \in \{1, 2, 3\}$ ya vistas en el problema 247.

a) Desarrolla la potencia $(k+1)^5$ usando el teorema del binomio.

b) Deduce que

$$(n+1)^5 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^5 - k^5\right) = 5R_n(4) + 10R_n(3) + 10R_n(2) + 5R_n(1) + n.$$

c) Obtén la fórmula

$$R_n(4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

d) Explica cómo obtener fórmulas similares para las potencias $p \geq 5$.

Finding the sum of 4th powers del canal *SyberMath* (⏲ 8:45)

269. *(Aproximando la suma de las primeras potencias p-ésimas)* En los problemas 247 y 268 hemos visto que si $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ entonces

$$R_n(p) := 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \mathrm{O}(n^{p-1}) \qquad (\text{ cuando } n \to +\infty).$$

¿Será cierta esta aproximación para otros valores del exponente $p \in \mathbb{N}$?

a) Prueba, usando una suma de Riemann, que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

b) Prueba otra vez el límite anterior, pero ahora usando el criterio de Stolz y el teorema del binomio.

c) ¿Se puede deducir de los apartados anteriores que $R_n(p) = n^{p+1}/(p+1) + \mathrm{O}(n^p)$?

d) Escribe un programa que, dado un exponente $p \in \mathbb{N}$ y un número $n \in \mathbb{N}$, calcule el valor exacto de la suma $R_n(p)$. Ejecuta el programa para obtener en cuadro 10. A continuación, estudia el orden de magnitud de las cantidades

$$R_n(p), \qquad S_n(p) = R_n(p) - \frac{n^{p+1}}{p+1}, \qquad T_n(p) = R_n(p) - \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{n^p}{2}$$

y crea el cuadro 11. ¿Qué conclusión extraes?

W Faulhaber's formula

How to sum quadrillions of powers by hand! del canal *Mathologer* (⏲ 50:00) [sin relación directa]

p	$R_n(p)$
4	20000000005000000000333333333333333333333000000000
5	166666666716666666670833333333333333333325000000000000000000
6	1428571429071428571478571428571428571428404761904761904761905000000000
7	12500000005000000000583333333333333333330416666666666666666675000000000000000000
8	111111111161111111117777777777777777777731111111111111111111333333333333333333330000000000

CUADRO 10. Valor exacto de la suma de $R_n(p)$ para $4 \leq p \leq 8$ y $n = 10^{10}$.

p	4	5	6	7	8
$R_n(p)$	2.0×10^{49}	1.7×10^{59}	1.4×10^{69}	1.3×10^{79}	1.1×10^{89}
$S_n(p)$	5.0×10^{39}	5.0×10^{49}	5.0×10^{59}	5.0×10^{69}	5.0×10^{79}
$T_n(p)$	3.3×10^{29}	4.2×10^{39}	5.0×10^{49}	5.8×10^{59}	6.7×10^{69}

CUADRO 11. Órdenes de magnitud de las cantidades $R_n(p)$, $S_n(p)$ y $T_n(p)$ para $4 \leq p \leq 8$ y $n = 10^{10}$.

☣ **270.** *(Un límite "completo")* Consideramos la sucesión recurrente dada por

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \mathrm{e}^{-a_n}, \qquad \forall n \geq 0.$$

Queremos probar que el límite $L = \lim_{n \to +\infty} (a_n - \log n)$ existe y es finito.

a) Prueba que la sucesión (a_n) es creciente.
b) Prueba, por reducción al absurdo, que $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
c) Aplica el criterio de Stolz al límite

$$\mathrm{e}^L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{a_n}}{n}.$$

d) Deduce que $L = 0$.

▶ Putnam 2012 B4 with the Stolz Theorem del canal *Michael Penn* (⏲ desde 11:03 hasta 21:37)

271. *(Tetración infinita)* Consideramos la sucesión

$$a_n = \sqrt{2} \uparrow\uparrow n, \qquad \forall n \geq 1,$$

donde el símbolo $x \uparrow\uparrow n$ es la operación de tetración introducida en el problema 73.

a) Encuentra una fórmula recurrente para los términos de la sucesión.
b) Prueba que la sucesión es creciente.
c) Prueba por inducción que $a_n < 2$ para todo $n \geq 1$.
d) Razona que la sucesión es convergente y calcula su límite.

▶ An Infinite Tower of Exponents with sqrt(2) del canal *SyberMath* (⏲ 10:09)

❗ **272.** *("Demostración": 4 = 2)* Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".

Dado un número $y > 0$, sea $x > 0$ la solución de la ecuación

$$\lim_{n \to +\infty} (x \uparrow\uparrow n) = x^{x^{x^{\cdots}}} = y.$$

En particular, esto implica que

$$x^y = x^{x^{x^{x^{\cdots}}}} = y.$$

Si $y = 2$, entonces $x^2 = 2$ y $x = \sqrt{2}$. Si $y = 4$, entonces $x^4 = 4$ y $x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Por tanto

$$4 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2.$$

"Prove" 4 = 2. Can You Spot The Mistake? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 6:36)
The power tower puzzle del canal *3Blue1Brown* (⏲ 53:49) (con cálculos en Python)

273. *(Un "teorema" del valor intermedio para porcentajes de acierto)*

a) Un jugador de baloncesto lleva un registro del número S_n de tiros libres metidos tras tirar los n primeros tiros libres de la temporada. Prueba, por reducción al absurdo, que si al principio de la temporada su porcentaje de acierto estaba por debajo del 75 % y al final estaba por encima del 75 %, existió al menos un momento donde ese porcentaje era exactamente igual al 75 %.

b) ¿Qué otros porcentajes cumplen esta sorprendente propiedad?

Easy Problem From The Hardest Test del canal *MindYourDecisions* (⏲ 7:21)

274. *(La fórmula de Wallis y las raíces de la unidad)* Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos los números complejos

$$\zeta = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/(2n+1)}, \qquad \xi = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/(2n+1)},$$

y el polinomio

$$Q(x) = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n}.$$

a) Prueba que $(\zeta^k)^{2n+1} = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y que $\xi^{2n+1} = -1$.

b) Prueba que las raíces $(2n+1)$-ésimas de la unidad forman la unión de tres conjuntos

$$\{\zeta^k : k = 1, \dots, n\} \cup \{1\} \cup \{\zeta^{-k} : k = 1, \dots, n\}.$$

(Las raíces del primer/segundo/tercer conjunto tienen parte imaginaria positiva/nula/negativa.)

c) Justifica la factorización $Q(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (x - \zeta^k)(x - \zeta^{-k})$.

d) Deduce que

$$\frac{2n+1}{2}|1-\xi| = \left|\frac{Q(1)}{Q(\xi)}\right| = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|1-\zeta^k|}{|\xi-\zeta^k|}\frac{|1-\zeta^{-k}|}{|\xi-\zeta^{-k}|}.$$

e) Prueba que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2}|1-\xi| = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|1-\zeta^k|}{|\xi-\zeta^k|} = \frac{2k}{2k-1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{|1-\zeta^{-k}|}{|\xi-\zeta^{-k}|} = \frac{2k}{2k+1}.$$

f) Deduce, a nivel informal, que se cumple la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}\right) = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\cdots.$$

[*Advertencia:* Esta no es una prueba completa, pues no es verdad que el límite de un producto infinito sea igual al producto infinito de límites. Veremos una prueba completa en el problema 299.]

The Wallis product for pi, proved geometrically del canal *3Blue1Brown* (⏲ 25:26)

∀∃ **275.** *(Definición ϵ–N de sucesión convergente)* Sea a_n una sucesión de números reales. Sea $L \in \mathbb{R}$. La sucesión a_n converge a L si y solo si

$$\forall \epsilon\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

a) Prueba, usando la definición, que la sucesión $a_n = 1/n^2$ converge a $L = 0$.

b) Prueba, usando la definición, que la sucesión $a_n = 1 - 1/n$ converge a $L = 1$.

c) Prueba, usando la definición, que la sucesión $a_n = 1/\sqrt{n}$ converge a $L = 0$.

d) Prueba, usando la definición, que la sucesión $a_n = \frac{3n}{2n+5}$ converge a $L = 3/2$.

e) Prueba, usando la definición, que la sucesión $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+n}$ converge a $L = 1$.

W Limit of a sequence

Sequences and the ϵ–N definition of convergence del canal *Michael Penn* (⏲ 8:00) [a) & b)]

Three limits of sequences by the definition del canal *Michael Penn* (⏲ 19:22) [c), d) & e)]

∀∃ **276.** *(Examen Putnam A4-1970)* Sea x_n una sucesión de números reales.

a) Prueba que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

b) Prueba, dando un contraejemplo, que

$$\exists M > 0 \text{ tal que } |x_n - x_{n-2}| \leq M \text{ para todo } n \geq 0 \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

Real Analysis homework on the Putnam? del canal *Michael Penn* (⏲ 11:14) [solo a)]

∀∃ **277.** *(Sucesiones de Cauchy)* Una sucesión de números reales a_n es una sucesión de Cauchy si y solo si

$$\forall\epsilon\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

a) Prueba que la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ es de Cauchy usando la definición.

b) Prueba que una sucesión es de Cauchy si y solo si es convergente.

W Cauchy sequence

Cauchy Sequences del canal *Michael Penn* (⏲ 19:14)

∀∃ **278.** *(Criterios de convergencia para sucesiones)* Prueba los siguientes criterios.

a) *Criterio cociente-raíz:* Si a_n es una sucesión de términos positivos y existe el límite $L = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$.

A nice limit with a trick del canal *Michael Penn* (⏲ desde 4:00 hasta 11:00) [solo cuando $L \in \mathbb{R}$]

b) *Criterio de Stolz:* Si a_n y b_n son dos sucesiones tales que b_n es creciente y tiende a infinito: $b_n \nearrow +\infty$ y, además, existe el límite $L = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = L$.

Revisiting Putnam 2012 B4 with the Stolz Theorem del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 11:00)

Series

Th-Th-That's all, folks!
(Porky)

¿Qué hay que saber?

Este tema tiene tres partes: series numéricas, series de potencias y series de Taylor.

En la primera, se plantea el reto de sumar infinitas cantidades y entender qué problemas aparecen y cómo resolverlos. Se define convergencia y convergencia absoluta, copiando conceptos del tema de integrales. Se presentan varios criterios de convergencia para series de términos positivos: integral, comparación directa, comparación por paso al límite, cociente y raíz. Se presenta el criterio de Leibniz para estudiar la convergencia de series alternadas. Se estudian algunas series clásicas: geométricas, telescópicas, p-armónicas, p-armónicas alternadas, etcétera.

En la segunda, se plantea el reto de sumar infinitas potencias de exponentes diferentes:

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-c)^n.$$

Se determina para qué valores de la variable x es convergente una serie de potencias, lo cual da lugar a los conceptos de radio de convergencia e intervalo de convergencia. Se afirma que las series de potencias se pueden derivar e integrar término a término sin alterar su radio de convergencia, aunque el intervalo de convergencia puede ganar o perder los extremos.

En la tercera, se introducen las series de Taylor (usualmente de Maclaurin) de las funciones e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1-x)$, $\arctan x$, $1/(1-x)$ y $(1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y se explica cómo obtener muchas otras a partir de esas siete mediante operaciones estándar con funciones: suma, resta, producto, cociente, composición, derivación e integración.

Este tema también es una novedad completa para el estudiante novato. Es el tema más duro del curso.

Los contenidos de este tema se corresponden con los capítulos cinco y seis del libro:

Calculus: Volume 2 de Gilbert Strang & Edwin Herman (*829* páginas)

Michel van Biezen tiene una serie de 86 vídeos donde se explican los principales conceptos. Son vídeos muy cortos (algunos duran menos de dos minutos, casi ninguno dura más de siete minutos) y de nivel un tanto elemental, pero eso no es una crítica. La serie es la siguiente:

Calculus 2 Ch 14 Series and Sequences del canal *Michel van Biezen* (86 vídeos)

Al acabar el tema se espera que sepáis:

- Desarrollar la intuición necesaria para identificar series convergentes;
- Estudiar formalmente la convergencia de series numéricas;
- Ver cuál es el criterio de convergencia adecuado para cada serie;
- Determinar el radio e intervalo de convergencia de series de potencias;
- Obtener series de Taylor (usualmente, Maclaurin) de funciones elementales; y
- Sumar ciertas series numéricas identificando de qué serie de Taylor "provienen".

Problemas

279. *(100 Series)* Practica tus habilidades sumando y analizando series resolviendo algunas de las cien series del documento abajo enlazado. Es una lista preparada por Steve Chow y completamente resuelta en un vídeo de toma única que dura más de seis horas.

Si no os sale alguna serie, consultad los "timestamps" listados en la información del vídeo (debéis clicar en SHOW MORE) para ver cuándo empieza Steve a resolver esa serie concreta.

100 series de Steve Chow (7 páginas)

100 series del canal *blackpenredpen* (6:06:53)

280. *(Sumas y productos telescópicos)* Calcula las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}}$.

And It Magically Simplifies! del canal *MindYourDecisions* (4:35)

b) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{127} 128$.

Clever Logarithm Problem del canal *MindYourDecisions* (2:42)

c) $\dfrac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$.

[*Indicación:* Usa la identidad de Sophie-Germain $a^4+4b^4 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$.]

Miraculous Solution To HARD Test Problem del canal *MindYourDecisions* (5:25)

281. *(Un área "en serie")* Calcula el área de la región coloreada en azul en la figura 30.

What Is The Area Of This Infinitely Repeating Shape? del canal *MindYourDecisions* (7:37)

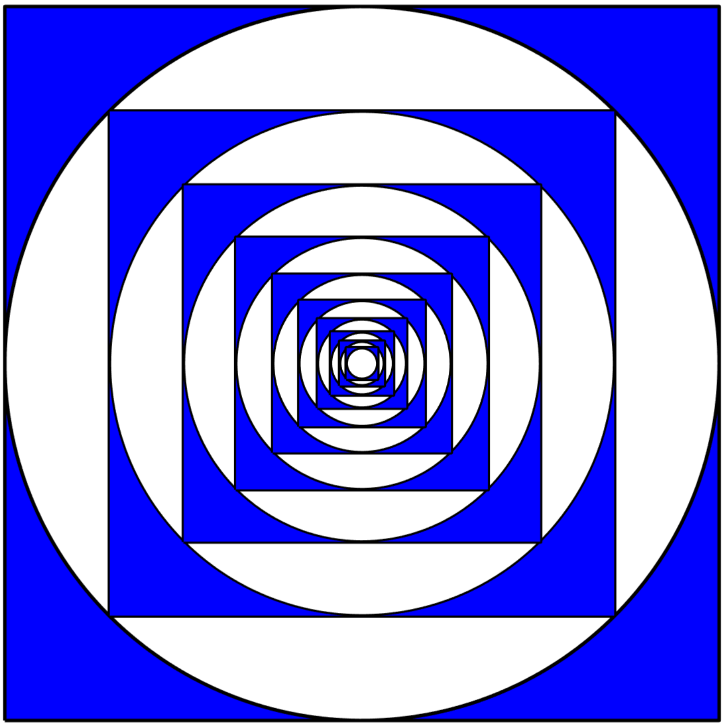


FIGURA 30. Región del problema 281. El cuadrado exterior tiene lado uno. El patrón se repite indefinidamente.

282. *(Sumando visualmente series geométricas)* Si $0 < r < 1$, entonces

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{r}{1-r}.$$

a) Encuentra una prueba visual del caso $r = 1/2$, cuando $S = 1$.
b) Encuentra una prueba visual del caso $r = 1/4$, cuando $S = 1/3$.
c) Encuentra una prueba visual del caso $0 < r < 1$ general.
Geometric Series - Explained Visually del canal *Think Twice* (⏲ 2:46)

283. *(Sumando visualmente series geométricas alternadas)* Si $0 < r < 1$, entonces

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^n = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots + (-1)^n r^n + \cdots = \frac{1}{1+r}.$$

a) Encuentra una prueba visual del caso $r = 1/2$, cuando $S = 2/3$.
Alternating series #1 - Visual solution del canal *Think Twice* (⏲ 1:36)
b) Encuentra una prueba visual del caso $r = 1/3$, cuando $S = 3/4$.
Alternating series #2 - Visual solution del canal *Think Twice* (⏲ 3:07)

284. *(El conjunto de Cantor)* Consideramos el intervalo $C_0 = [0,1]$. En un primer paso, quitamos de C_0 el tercio *abierto* central $(1/3, 2/3)$, obteniendo el conjunto $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. En un segundo paso, realizamos el mismo proceso con cada uno de los dos intervalos que forman C_1 y obtenemos el conjunto $C_2 = [1,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$. Repetimos este proceso indefinidamente obteniendo una sucesión de conjuntos $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, ver figura 31. El fractal obtenido en el límite $C_\infty = \lim_{n\to+\infty} C_n$ es el conjunto de Cantor. Esta formado por los puntos del intervalo original que no quitamos en ningún paso.
a) Di cuáles de los siguientes puntos pertenecen al conjunto de Cantor:

$$0, 1/81, 2/81, 1/9, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1/\sqrt{2}, 1.$$

b) Prueba que el conjunto de Cantor tiene infinitos puntos.
c) Prueba que el conjunto de Cantor tiene longitud cero.
d) Prueba que el conjunto de Cantor tiene dimensión $\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63092975357145743 71$.
[*Indicación:* El vídeo abajo enlazado explica que es la dimensión en este contexto.]
W Cantor Set
What happens at infinity? - The Cantor set del canal *Zach Star* (⏲ 16:24)

FIGURA 31. Conjuntos C_n para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (Imagen extraída de Wikipedia.)

285. *(El copo de nieve de Koch)* Tebemos un triángulo equilátero K_0 cuyos lados miden una unidad. En un primer paso, dividimos cada lado de K_0 en tres segmentos iguales y pegamos un triángulo equilátero en cada segmento central apuntando hacia afuera. Llamamos K_1 al polígono que queda. En un segundo paso, realizamos el mismo proceso con cada uno de los doce lados de K_1 y llamamos K_2 a la región que queda. Repetimos este proceso indefinidamente obteniendo una sucesión de polígonos $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$, ver figura 32. El fractal obtenido en el límite $K_\infty = \lim_{n\to+\infty} K_n$ se denomina copo de nieve de Koch.

a) ¿Cuántos lados tiene el polígono K_n?
b) Calcula el perímetro P_n del polígono K_n.
c) Calcula el área A_n del polígono K_n.
d) Deduce que el copo de nieve de Koch tiene área finita y perímetro infinito.
e) Entiende que la frontera de copo de nieve de Koch tiene dimensión $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.261859507143$.

Koch snowflake
Koch Snowflake Fractal: Area and Perimeter Calculation del canal *Tom Rocks Maths* (⏲ 29:23)

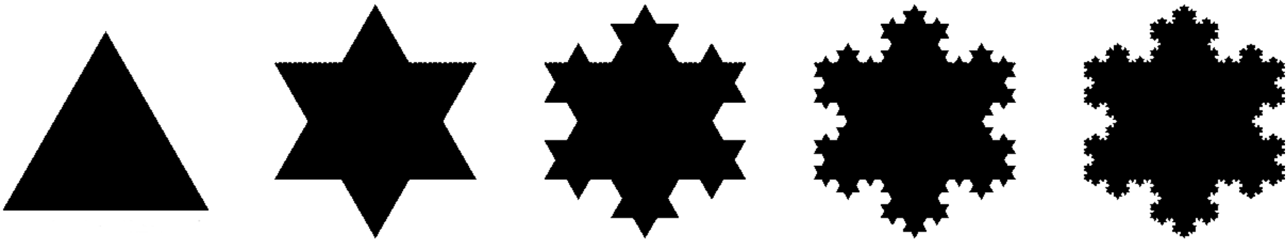


FIGURA 32. Polígonos K_n para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

286. *(El triángulo de Sierpiński)* Tenemos un triángulo equilátero T_0 cuyos lados miden una unidad. En un primer paso, subdividimos T_0 en cuatro triángulos equiláteros y borramos el triángulo central. Llamamos T_1 a la región que queda. En un segundo paso, realizamos el mismo proceso con cada uno de los tres triángulos que forman T_1 y llamamos T_2 a la región que queda. Repetimos este proceso indefinidamente obteniendo una sucesión de regiones $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, ver figura 33. El fractal obtenido en el límite $T_\infty = \lim_{n\to+\infty} T_n$ se denomina triángulo de Sierpiński.

a) ¿Cuántos triángulos contiene T_n?
b) Calcula el perímetro P_n de la región T_n.
c) Calcula el área A_n de la región T_n.
d) Deduce que el triángulo de Sierpiński tiene área cero y perímetro infinito.
e) Entiende que el triángulo de Sierpiński tiene dimensión $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58496250072115618$.

Sierpiński triangle
Sierpinski Triangle | Part 1 del canal *thinkeccel* (⏲ 5:47)
Sierpinski Triangle | Part 2 del canal *thinkeccel* (⏲ 5:02)
Fractals are typically not self-similar del canal *3Blue1Brown* (⏲ hasta 7:15)

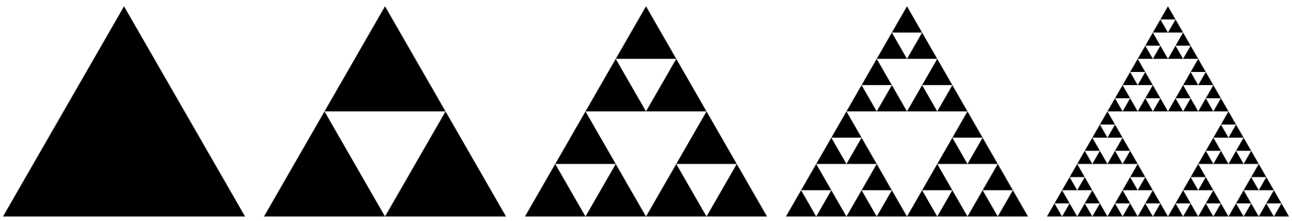


FIGURA 33. Regiones T_n para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. (Imagen extraída de Wikipedia.)

287. *(Serie telescópica clásica)* Suma la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots .$$

Can You Solve A Cambridge Exam Question? (1802) del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:32)

288. *(Serie telescópica alternada)* Suma la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)} = \frac{1}{1\times 3} - \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{3\times 5} - \frac{1}{4\times 6} + \cdots .$$

Can You Solve A Very Old Cambridge Exam Question? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 5:52)

289. *(Divergencia de la serie armónica)* Prueba que

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deduce que la serie armónica $\sum_{n=1} 1/n$ es divergente.
a stylish proof that... del canal *Michael Penn* (⏲ 8:16)

290. *(La hormiga paciente)* Tenemos una goma elástica de un metro de longitud y una hormiga empieza a recorrerla desde un extremo avanzando a una velocidad de un centímetro por segundo. Cada segundo que pasa, estiramos ambos extremos de la goma aumentando su longitud en un metro. Suponemos que la goma nunca se rompe. Prueba que después de n segundos la hormiga ha recorrido el $H_n\,\%$ de la goma, donde

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

es la n-ésima suma parcial de la serie armónica. Deduce que la hormiga consigue llegar al extremo opuesto.
[*Nota:* En el problema 323 veremos que el tiempo estimado para completar el recorrido es del orden de 10^{43} segundos. La edad estimada del Universo es del orden de 10^{17} segundos.]
The mystery of 0.577 del canal *Numberphile* (⏲ hasta 6:20)

291. *(La fila de coches)* Échale un vistazo al vídeo abajo enlazado y entiende por qué, si tienes una fila de n coches detenidos por un obstáculo en una carretera unidireccional de carril único donde es imposible adelantar, el número esperado de grupos de coches que surgirán al eliminar el obstáculo es igual a $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$.
An unexpected application of the harmonic series del canal *Zach Star* (⏲ 7:19)

292. *(Apilando bloques; a.k.a. "La torre inclinada de Lira")* Tenemos n bloques rectangulares (ortoedro es el término matemático) idénticos de longitud uno (la anchura y la altura no son relevantes) y densidad uniforme. Apilamos bloque sobre bloque formando una torre que sobresale de una mesa como en la figura 34, con un único bloque en cada piso y en equilibrio inestable. Esto último significa que el centro de masas de los k bloques superiores está situado exactamente sobre el borde del bloque $k+1$, para todo $1 \leq k \leq n$. Se entiende que el bloque $n+1$ es la mesa. Por tanto, no se puede mover ningún bloque hacia afuera sin tirar la torre.

Sea Δ_n la medida total del voladizo de esta torre con n pisos.

a) Prueba que la sucesión $(\Delta_n)_n$ está definida por la recurrencia

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}, \qquad \Delta_n = \Delta_{n-1} + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 2.$$

b) Deduce que $\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = +\infty$.

W Block-stacking problem

Lec 38 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 22:00)

700 years of secrets of the Sum of Sums del canal *Mathloger* (⏲ hasta 15:30)

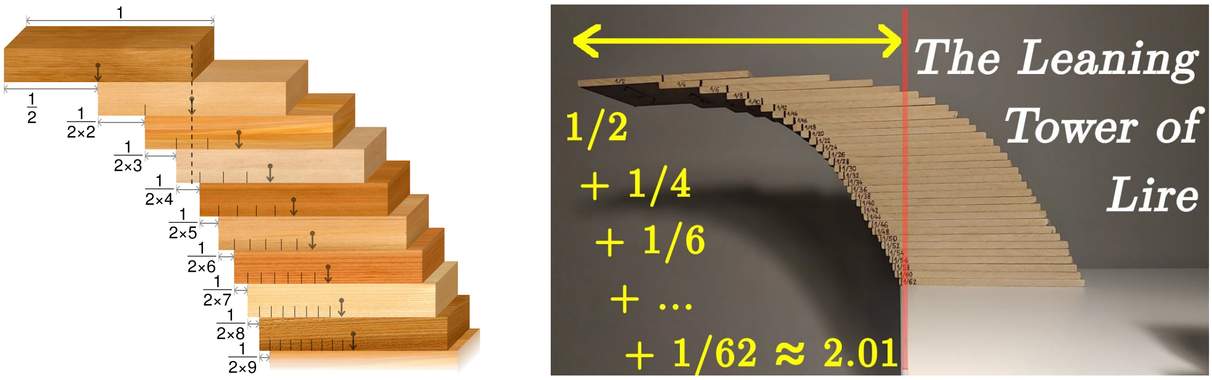


FIGURA 34. Izquierda: Una representación de la torre en equilibrio inestable con $n = 9$ bloques. (Imagen extraída de Wikipedia.) Derecha: Un experimento con $n = 31$ bloques, donde los cuatro bloques superiores están completamente fuera de la mesa.

293. *(El teorema de reordenación de Riemann)* Todas las series que estudiamos en este documento son o bien de términos positivos o bien alternadas. (La serie del problema 296 es la única excepción.) El motivo es que las demás series pueden tener comportamientos bastante perturbadores.

a) Encuentra y explica el error de la siguiente "demostración".
Se sabe que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$. Usamos la conmutatividad y asociatividad de la suma para reordenar esa serie de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

Por tanto, simplificando el logaritmo y multiplicando por dos, obtenemos que $2 = 1$.

b) En realidad, según el teorema de reordenación de Riemann, la serie armónica alternada se puede reordenar de forma que la suma de la nueva serie sea cualquier valor previamente escogido, tal y como se explica en el vídeo abajo enlazado. Échale un vistazo.

W Riemann series theorem

Riemann's paradox del canal *Mathologer* (⏲ 11:57)

294. *(El algoritmo de Chudnovsky para calcular π)* Timothy Mullican publicó 50 billones (50 trillones en terminología americana) de decimales de π el 29 de enero de 2020. Podéis ver su blog aquí.

N	p_N
0	3.14159265358973420766845359157829834076223326091570659089414549873766620940165910806611735
1	3.14159265358979323846264338358735068847586634599637431565490580680130145056520359110583091
2	3.14159265358979323846264338327950288419716767885484628791272779037064297733517695872692291
3	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582098494740802066245278971734636410362
4	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781634669469024771726817
5	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862839573
6	3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803483

CUADRO 12. Primeras aproximaciones de π por el algoritmo de Chudnovsky.

El algoritmo está basado en una serie alternada rápidamente convergente:

$$\pi = \frac{426880\sqrt{10005}}{S}, \qquad S := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n, \qquad a_n = \frac{(6n)!(545140134n + 13591409)}{(3n)!(n!)^3 640320^{3n}}.$$

a) Calcula el límite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) Sea $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$ la N-ésima suma parcial de S y sea $p_N = 426880\sqrt{10005}/S_N$ la N-ésima aproximación de π. Deduce que si se opera con una aritmética de precisión arbitraria, entonces p_{N+1} tiene aproximadamente catorce decimales correctos más que p_N.

c) Calcula, usando una calculadora u ordenador, las primeras aproximaciones para comprobar la estimación anterior hasta obtener el cuadro 12. Probablemente, vuestra calculadora u ordenador no serán capaces de trabajar con tantas cifras.

W Chudnovsky algorithm

295. *(El criterio de Raabe)* Si a_n es una sucesión de términos positivos tal que

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \qquad M := \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

entonces

- $M > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge;
- $M < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge; y
- $M = 1 \Rightarrow$ El criterio de Raabe no da información.

a) Usa el criterio de Raabe para probar que la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{n^2 \cdot 3^n \cdot n!}$$

es convergente.

b) Prueba que $S > \pi^2/6$ por comparación con la serie 2-armónica (ver problema 322).

The series test you didn't learn in Calculus! del canal *Michael Penn* (⏲ desde 5:55)

296. *(El criterio de Dirichlet)* Si a_n y b_n son dos sucesiones tales que

- a_n es monótona decreciente y tiende a cero: $a_n \searrow 0$, y
- $B_N := \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right|$ es una sucesión acotada,

entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

a) Usa las formulas trigonométricas de adición

$$\sin(n \pm 1/2) = \sin n \cos(1/2) \pm \cos n \sin(1/2)$$

para probar que

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n = \frac{\sin(1/2) - (-1)^N \sin(N+1/2)}{2\cos(1/2)}, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

b) Usa el criterio de Dirichlet para probar que la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$

converge. ¿Por qué no es posible aplicar el criterio de Leibniz a esta serie?
[*Nota:* Usando variable compleja se puede probar que $S = 1/2$, pero no se pide que lo probéis.]

c) Deduce el criterio de Leibniz a partir del criterio de Dirichlet.

W Dirichlet's test

I really like this sum! del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 8:30)

297. *(El criterio de condensación de Cauchy)* Estudia la convergencia de las series de la forma

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\log n)^q (\log\log n)^r}$$

donde los exponentes p, q y r son números reales arbitrarios.
[*Indicación:* Usa el criterio de condensación de Cauchy enunciado en el problema 333e.]

W Cauchy condensation test

298. *(Infinitas raíces anidadas)* Prueba que las siguientes expresiones son convergentes y calcula su valor.

a) $10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\cdots}}}}$.

b) $3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\cdots}}}}$.

c) $10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{10\sqrt[n]{\cdots}}}}$.

d) $10\sqrt[2]{10\sqrt[3]{10\sqrt[4]{10\sqrt[5]{\cdots}}}}$.

Can You Solve This? Infinite Radicals del canal *MindYourDecisions* (⏲ 7:59)

299. *(La fórmula de Wallis)* Wallis estableció en 1655 la siguiente fórmula para calcular π mediante un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\cdots .$$

a) Considera la sucesión de integrales definidas

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x \; \mathrm{d}x, \qquad n \geq 0.$$

Prueba, integrando por partes con $u = \sin^{n-1} x$ y $\mathrm{d}v = \sin x \ \mathrm{d}x$, la relación de recurrencia

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad \forall n \geq 2.$$

b) Deduce, aplicando repetidamente la fórmula anterior, que

$$I_{2n} = \pi \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}, \qquad I_{2n+1} = 2 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

c) Prueba la desigualdad

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

d) Deduce la fórmula de Wallis probando antes que $\lim_{n\to+\infty} I_{2n-1}/I_{2n+1} = 1$.

The Wallis Product del canal *MindYourDecisions* (⏲ 11:56)

300. *(Una sucesión de rectángulos)* Considera la sucesión de rectángulos $(R_n)_{n\geq 1}$ definida de forma recurrente mediante la siguientes reglas, ver la figura 35. El primer rectángulo R_1 es un cuadrado de área uno. El rectángulo R_n se genera a partir del rectángulo R_{n-1} en dos pasos:

I) Se obtiene un rectángulo R'_n pegando un rectángulo de área uno a un lado vertical de R_{n-1};

II) El rectángulo R_n se obtiene pegando un rectángulo de área uno a un lado horizontal de R'_n.

Sea b_n la base de R_n. Sea h_n la altura de R_n. Usa la fórmula de Wallis para probar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{h_n} = \frac{\pi}{2}.$$

Can You Solve The HARD Rectangle Ratio Puzzle? del canal *MindYourDecisions* (⏲ 9:10)

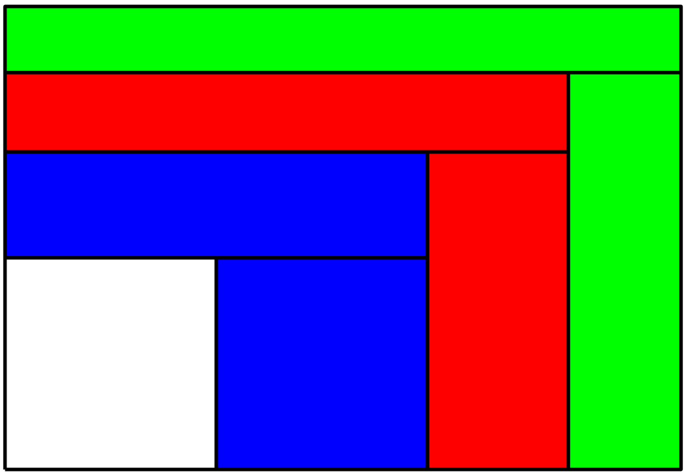


FIGURA 35. Geometría del problema 300. R_1 es el cuadrado blanco, R_2 es la unión de R_1 y los dos rectángulos azules, R_3 es la unión de R_2 y los dos rectángulos rojos, R_4 es la unión de R_3 y los dos rectángulos verdes, etcétera. Todos los rectángulos auxiliares tienen área uno.

301. *(Intervalos de convergencia)* Calcula el intervalo de convergencia de estas series de potencias.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$.

Interval of Convergence of a Power Series: Example 1 del canal *Michael Penn* (⏲ 3:45)

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$.

Interval of Convergence of a Power Series: Example 2 del canal *Michael Penn* (⏲ 4:38)

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{3^n(n+1)^2}$.

Interval of Convergence of a Power Series: Example 3 del canal *Michael Penn* (⏲ 6:45)

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n$.

Interval of Convergence of a Power Series: Example 4 del canal *Michael Penn* (⏲ 13:39)

302. *(Definición de la exponencial como serie)* Definimos la exponencial como una serie de potencias y probamos algunas de sus propiedades básicas. Para evitar razonamientos circulares, no podemos usar ninguna propiedad de la exponencial antes de probarla. Enfatizamos esta restricción notando como $\exp(x)$ a la función aquí definida. Solo tras acabar el problema diremos que $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Considera la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la serie de potencias

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

a) Prueba que $\exp(x)$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) Prueba que $\exp(0) = 1$.
c) Prueba, derivando término a término, que

$$\exp'(x) = \exp(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) Prueba que dados $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios, el producto

$$\exp(x+y)\exp(-x)$$

no depende de $x \in \mathbb{R}$. [*Indicación:* Deriva respecto x.]
e) Deduce que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Defining exp del canal *Michael Penn* (⏲ 10:37)

303. *(Prueba de la fórmula de Euler)* Calcula las series de Maclaurin de las funciones e^x, $\sin x$ y $\cos x$. Prueba, usando que las tres series tienen radio de convergencia infinito, que

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x} = \cos x \pm \mathrm{i} \sin x.$$

Power Series / Euler's Great Formula del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ hasta 25:18)

304. *(Serie de Leibniz para π)* La serie de Leibniz para calcular π es una serie alternada formada por los recíprocos de todos los números impares:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots .$$

a) Calcula la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

y prueba que su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

b) Calcula la serie de Maclaurin de la función arcotangente integrando la serie anterior y prueba que su intervalo de convergencia es $[-1, 1]$.
c) Deduce, aunque no sea rigurosamente, la fórmula de Leibniz.
d) ¿Cuántos términos hemos de sumar para aproximar π con un error menor que 10^{-3}?

W Leibniz formula for π
How to Find the Value of pi: Part 1 del canal *Michel van Biezen* (⏲ 3:30)
How to Find the Value of pi: Part 2 del canal *Michel van Biezen* (⏲ 2:15)

305. *(Aproximando integrales mediante series)* Usa una serie numérica para aproximar los valores de las siguientes integrales definidas con un error menor que ϵ.

a) $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ con $\epsilon = 10^{-9}$.
Power Series to Solve Definite Integral del canal *Michel van Biezen* (⏲ 4:50)

b) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ con $\epsilon = 10^{-3}$.
Evaluating the integral of e^{-x^2} del canal *Michel van Biezen* (⏲ 5:13)

306. *(La función error)* La función error $\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función integral

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Calcula su serie de Maclaurin y determina el correspondiente radio de convergencia.

W Error function
Lec 39 | Single Variable Calculus del canal *MIT OpenCourseWare* (⏲ desde 33:55)

STOP **307.** *(Primera aproximación de π mediante series por Isaac Newton, 1666)* Los métodos geométricos para aproximar π se abandonaron cuando Newton descubrió cómo aproximar π mediante series.

a) Prueba, usando la serie de Maclaurin de la función $\sqrt{1-x^2}$, que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{6} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n(2n+1)n!}.$$

[*Indicación:* La serie de Maclaurin de la función $\sqrt{1+x}$ se calculó en el problema 142.]

b) Prueba, usando la misma serie de Maclaurin, que

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^{3n+1}(2n+1)n!}.$$

c) ¿Cuál de estas dos fórmulas proporciona una forma más eficiente de aproximar π? ¿Por qué?
The Discovery That Transformed Pi del canal *Veritasium* (⏲ 18:39)

308. *(Serie de una función racional)* Considera la función racional

$$f(x) = \frac{9}{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

a) Calcula su descomposición como suma de fracciones simples.
b) Calcula su serie de Maclaurin.
c) Calcula el intervalo de convergencia de la serie de potencias obtenida.
d) Comprueba que el radio de convergencia de la serie coincide con el módulo de la raíz (real o compleja) más cercana al origen del denominador.

University of Cambridge Taylor series question del canal *Mu Prime Math* (⏲ 17:46)

309. *(Derivadas en el origen & series de Maclaurin)* Calcula la derivada $f^{(100)}(0)$ de la función

$$f(x) = x^2 e^x.$$

Calculus competition problem: the 100th derivative? del canal *Mu Prime Math* (⏲ 5:12)

310. *(Producto de series de potencias)* Tenemos tres series de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots,$$
$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots,$$

con radio de convergencia positivo tales que $h(x) = f(x)g(x)$.

a) Prueba que $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ para todo $n \geq 0$.
[*Nota:* Esta fórmula es una extensión del proceso presentado en el problema 143.]
Catalan Numbers del canal *Michael Penn* (⏲ desde 2:45 hasta 7:05)

b) Prueba, usando que $e^{(a+b)x} = e^{ax} e^{bx}$, el teorema del binomio enunciado en el problema 13. Es decir, prueba que, dados dos números reales a y b y una potencia $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \qquad \forall n \geq 0.$$

311. *(Función generatriz con los números de Fibonacci)* Sean F_n, $n \geq 0$, los números de Fibonacci introducidos en el problema 9.

a) Prueba que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} F_n x^n$ es $R = 1/\varphi$, donde φ es el número áureo introducido en el problema 8.

b) Prueba que si $F(x) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} F_n x^n$, entonces

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

c) Suma las series $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} F_n$ y $\sum_{n\geq 0} n 2^{-n} F_n$.

A nice Fibonacci sum done two ways!! del canal *Michael Penn* (⏲ 16:12)

312. *(Una fracción mágica)* Los primeros 240 decimales de la fracción

$$\frac{1}{99999999989999999999}$$

son

0.000000000**0** 000000000**1** 000000000**1** 000000000**2** 000000000**3** 000000000**5**
000000000**8** 00000000**13** 00000000**21** 00000000**34** 00000000**55** 00000000**89**
0000000**144** 0000000**233** 0000000**377** 0000000**610** 0000000**987** 000000**1597**
000000**2584** 000000**4181** 000000**6765** 00000**10946** 00000**17711** 00000**28657**.

a) ¿Qué sucesión forman los números marcados en negrita?

b) Explica el porqué de este comportamiento usando el problema 311.

c) ¿Cuándo acaba este comportamiento?

The Magical Fraction del canal *MindYourDecisions* (⏲ 4:50)

n	$p_n = 10^{n+2} \cdot f(1/\alpha_n)$
1	3.4906514152237322674044629932198697641
2	3.1733258594579905912629053761597607151
3	3.1447373904624493148585927939798972058
4	3.1419068442690513971247003676405898119
5	3.1416240698304398646999318237974297520
6	3.1415957951855879072782391124153119815
7	3.1415929677490900082039303900798608241
8	3.1415926850057200884681671391271320037
9	3.1415926567313858951935125071939768518
10	3.1415926539039525038530334659520251473
20	3.1415926535897932384940593098154008166
30	3.1415926535897932384626433832826444769
∞	3.1415926535897932384626433832795028842

CUADRO 13. Valores de $p_n = 10^{n+2} \cdot f(1/\alpha_n)$ para $1 \leq n \leq 10$.

313. *(Dos formas de calcular una suma)* Consideramos la serie

$$S = 0.1 + 0.02 + 0.003 + \cdots + 0.000000009 + 0.0000000010 + 0.00000000011 + \cdots .$$

Cada término de la serie se obtiene a partir del anterior añadiendo un cero después del punto decimal y aumentando en una unidad la última cifra. Si la última cifra era un 9, al aumentarla una unidad se convierte en 0 y nos llevamos una.

a) Calcula la suma con el método que se enseña a los niños, teniendo cuidado con el acarreo.

b) Calcula la suma y prueba que $S \in \mathbb{Q}$, usando la suma de la serie geométrica.

Just as astounding: 0.01+0.002+0.0003+... = ? del canal *blackpenredpen* (⏲ 10:22)

314. *(Una relación entre π y 5)* Sea $f(x)$ el valor del seno del ángulo de x **grados**. En particular, la función $f(x)$ es 360-periódica, no 2π-periódica. Sea $p_n = 10^{n+2} \cdot f(1/\alpha_n)$ donde α_n es el número natural que se obtiene al escribir n cincos seguidos:

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 55, \quad \alpha_3 = 555, \quad \alpha_4 = 5555, \quad \alpha_5 = 55555, \quad \alpha_6 = 555555, \ldots .$$

Usa que

$$\frac{100}{180} = \frac{5}{9} = 0.555555555555555555555555555555555555555555555555555555555555\ldots$$

para probar que $\lim_{n \to +\infty} p_n = \pi$ y que p_n da aproximadamente n digitos correctos de π. En el cuadro 13 se muestran los valores de p_n para algunos valores de n.

A Surprising Pi and 5 del canal *Numberphile* (⏲ 16:39)

315. *(¿Qué función puede ser?)* Tenemos un algoritmo que calcula una función $f(x)$ con precisión arbitraria y queremos determinar qué función es. Sabemos que $f(x)$ es infinitamente derivable en el origen. Además, $f(0) = 0$.

a) Prueba que si $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ es el desarrollo de Maclaurin de $f(x)$, entonces

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+2} x^{2n}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n}.$$

b) Obtenemos con nuestro algoritmo las aproximaciones

$g(10^{-5}) \approx 0.5000000000\ 2500000000\ 1666666666\ 7916666666\ 7666666666\ 7500000000,$

$h(10^{-5}) \approx 1.0000000000\ 3333333333\ 5333333333\ 4761904762\ 0158730158\ 8210678210.$

¿Qué función puede ser? Se pide un candidato convincente, no una prueba rigurosa.

W Arbitrary-precision arithmetic

316. *(Series de potencias & EDOs)* Recordamos que si la serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

tiene un radio de convergencia positivo, entonces se puede derivar término a término y, además,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots.$$

a) Encuentra todas las series de potencias que son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = y$. Calcula sus radios de convergencia y reconoce de qué funciones provienen.
Differential Equations | Series Solutions Example 1 del canal *Michael Penn* (⏲ 10:58)

b) Encuentra todas las series de potencias que son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = y/x$. Calcula sus radios de convergencia y reconoce de qué funciones provienen.
Differential Equations | Series Solutions Example 2 del canal *Michael Penn* (⏲ 5:56)

c) Encuentra todas las series de potencias que son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $y'' = y$. Calcula sus radios de convergencia y reconoce de qué funciones provienen.
Differential Equations | Series Solutions Example del canal *Michael Penn* (⏲ 12:49)

317. *(Series de potencias & PVIs)* Encuentra la única series de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que cumple el problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' = xy' + y, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Calcula su radio de convergencia y reconoce de qué función proviene.
A“non-elementary” differential equation del canal *Michael Penn* (⏲ 10:02)

318. *(¿Integral o serie?)* Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}\, \mathrm{d}x,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función “floor” definida en el problema 19.
Indicación: Realiza el cambio $u = 1/x$ y recuerda el valor de la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots = \log 2.$$

An interesting integral with the floor function del canal *Michael Penn* (⏲ 12:09)

319. *(Integral de una función constante en infinitos trozos)* Considera la función

$$f(x) = \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor, \qquad x > 0,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$ son las funciones “floor” y “ceil” definidas en el problema 19.

a) Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x > 1$.
b) Prueba que $f(x) = n$ para todo $x \in (1/b^{n+1}, 1/b^n]$ y para todo entero $n \geq 0$.
c) Dibuja la gráfica de la función $f(x)$.
d) Calcula la integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A viewer suggested floor integral! del canal *Michael Penn* (⏲ 11:45)

320. *(Series alternadas con la función “floor”)* Consideramos las series alternadas

$$S_r := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lfloor \sqrt[r]{n} \rfloor}, \qquad r \geq 2.$$

a) Argumenta que todas son convergentes.
b) ¿Cuántos términos hay que sumar para que el error sea menor que 10^{-10}?
c) Calcula el valor exacto de S_2.

[*Nota:* Sorprendentemente, $S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = \cdots$, pero no se pide que lo probéis.]

an alternating floor sum del canal *Michael Penn* (⏲ 13:30)

321. *(Raíces de* e*)* Considera el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[2k-1]{\mathrm{e}}}{\sqrt[2k]{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \cdot \frac{\sqrt[5]{\mathrm{e}}}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}} \cdots.$$

Prueba que es convergente y calcula su valor.

The Answer Is Too Good del canal *MindYourDecisions* (⏲ 2:01)

STOP **322.** *(El problema de Basilea)* Mengoli propuso el problema de Basilea en 1650 y Euler lo “resolvió” en 1734 con 28 años y saltó a la fama. El problema consiste en sumar la serie 2-armónica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = ?.$$

La clave está en observar que $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ es una (en cierto sentido, la “única”) función que se anula en los múltiplos enteros no nulos de π y, además, cumple que $f(0) = 1$.

a) Prueba que

$$Q_N(x) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

es el único polinomio de grado $2N$ que se anula en los puntos

$$-N\pi, -(N-1)\pi, \ldots, -2\pi, -\pi, \pi, 2\pi, \ldots, (N-1)\pi, N\pi$$

y, además, cumple que $Q_N(0) = 1$.

b) Prueba que

$$Q_N(x) = 1 - \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right) x^2 + \frac{1}{2\pi^4}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^2 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}\right] x^4 + \mathrm{O}(x^6).$$

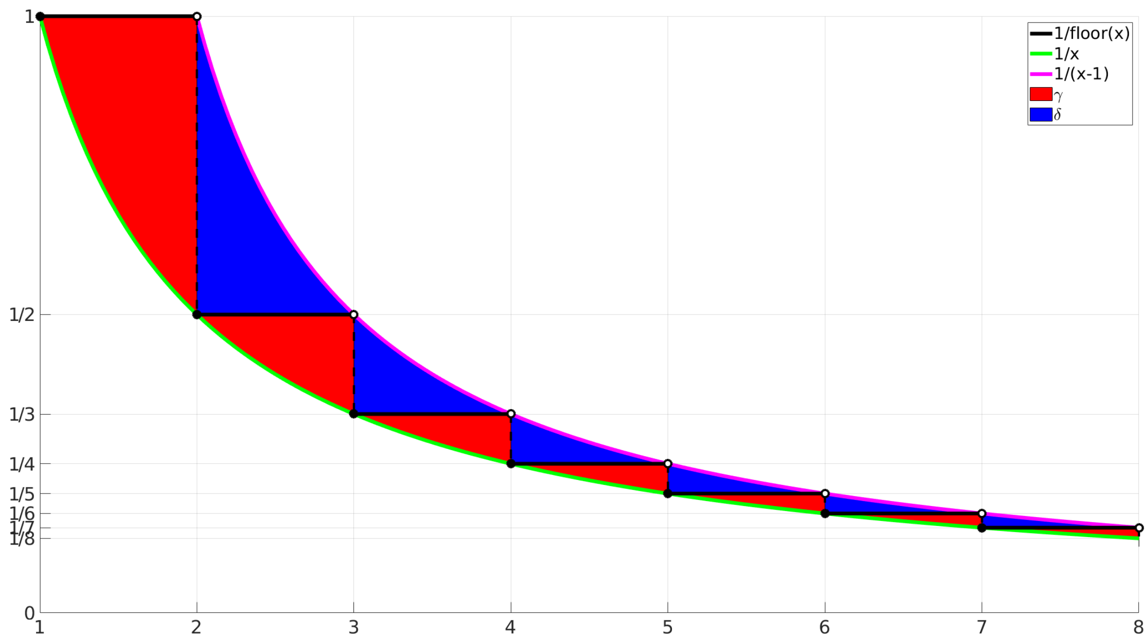


FIGURA 36. Geometría para calcular la constante de Euler-Mascheroni.

c) Supón que $\frac{\sin x}{x} = \lim_{N\to+\infty} Q_N(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ para deducir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n}.$$

[*Nota:* La última identidad es la fórmula de Wallis.]

W Basel problem

Euler's real identity del canal *Mathologer* (⏲ 17:16)

323. *(La constante de Euler-Mascheroni)* La n-ésima suma parcial de la serie armónica es

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Queremos determinar a qué velocidad diverge esta serie.

a) Dibuja las gráficas de las funciones

$$y = \frac{1}{x-1}, \qquad y = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}, \qquad y = \frac{1}{x},$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la función "floor" definida en el problema 19.

b) Considera las integrales impropias

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x, \qquad \delta = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right) \mathrm{d}x.$$

Justifica que γ (respectivamente, δ) es la suma de todas las áreas rojas (respectivamente, azules) de la figura 36 y, por tanto, ambas integrales son convergentes y positivas. Prueba que $\gamma + \delta = 1$. [*Nota informativa:* La integral impropia γ es la constante de Euler-Mascheroni. Se sabe que

$$\gamma \approx 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677.]$$

c) Considera las integrales definidas

$$\gamma_n = \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x, \qquad \delta_n = \int_2^{n+1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \right) \mathrm{d}x.$$

Prueba que las sucesiones (γ_n) y (δ_n) son crecientes y además

$$\gamma_n = H_n - \log(n+1), \qquad \delta_n = 1 + \log n - H_n.$$

d) Deduce que $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(H_n - \log n) \in (0,1)$.
e) Usa la convexidad de la función $f(x) = 1/x$ para deducir que $\gamma > 1/2$.
f) Estima el orden de magnitud del primer $n \in \mathbb{N}$ tal que $H_n \geq 100$.

W Euler-Mascheroni constant

700 years of secrets of the Sum of Sums del canal *Mathologer* (⏲ desde 21:00 hasta 29:44)

El número más misterioso del mundo del canal *Derivando* (⏲ 4:20) [de carácter divulgativo]

[*Curiosidad:* En los vídeos Can 1+1/2+1/3+...+1/n be an integer? del canal *blackpenredpen* y This is never an integer! del canal *Michael Penn* se prueba que $H_n \notin \mathbb{N}$ para todo $n \geq 2$.]

☣ **324.** *(El sueño del sofomoro)* Las identidades entre integrales y series

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}, \qquad \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-n)^{-n}$$

se conocen como el sueño del sofomoro (así llaman en EUA a los estudiantes universitarios de segundo año), por ser demasiado bonitas para ser ciertas. ¡Pero son ciertas! Fueron descubiertas por Jacob Bernoulli en 1697. Nos centramos en la primera identidad.

a) Dibuja las gráficas de las funciones $f(x) = x^x$ y $g(x) = x^{-x}$ para $x \in [0,1]$, ver figura 37.

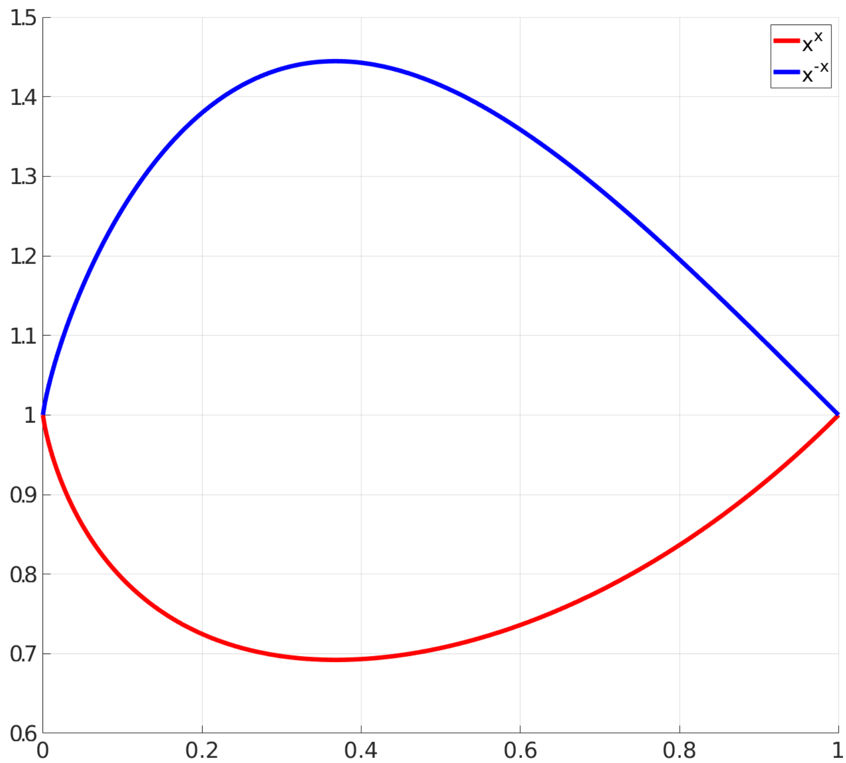


FIGURA 37. Gráficas de las funciones x^x y x^{-x}.

b) Prueba por inducción que, dado $a > 0$ arbitrario, $\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = n!/a^{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

c) Prueba la primera identidad del sueño del sofomoro usando que

$$x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\log x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(-\log x)^n}{n!}$$

y realizando el cambio de variable $u = -\log x$.

Sophomore's dream [Prueba de la segunda identidad]

Two dreams del canal *Michael Penn* (⏲ 15:27) [Prueba la primera identidad]

325. *(Divergencia de la suma de los recíprocos de los números primos por Ivan Niven, 1971)* Euler argumentó en 1737, usando un método no completamente riguroso, que la serie

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \cdots$$

es divergente. Ivan Niven dió una prueba corta y completamente rigurosa, basada en la combinación de cuatro desigualdades.

a) Prueba, usando la forma del resto de Lagrange, que $\mathrm{e}^x > 1 + x$ para todo $x > 0$.
[*Nota:* En el problema 253 se prueba que $\mathrm{e}^x > \sum_{k=1}^{n} x^k/k!$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x > 0$, pero aquí no necesitamos un resultado tan potente.]

b) Prueba que $\log(1+n) < H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
[*Nota:* En el problema 323 se prueba que $\exists\gamma = \lim_{n\to+\infty}\big(H_n - \log(n+1)\big)$ y $\gamma \in (0,1)$, pero aquí no necesitamos un resultado tan preciso.]

c) Prueba que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{5}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
[*Nota:* En el problema 322 se prueba que $\sum_{m=1}^{+\infty} 1/m^2 = \pi^2/6$, pero aquí no necesitamos un resultado tan preciso.]

d) Prueba la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \prod_{p\leq n}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e) Deduce que la serie dada por los recíprocos de todos los números primos es divergente.

Divergence of the sum of the reciprocals of the primes

A harmonic series with only primes del canal *Michael Penn* (⏲ 14:12)

326. *(Prueba de la irracionalidad de* e *por Fourier, primera versión)* Probamos que e es irracional por reducción al absurdo. Empezamos suponiendo que existen dos números naturales p y q tales que

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}.$$

A continuación, consideramos la igualdad

$$\frac{p}{q} = \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Pasando la suma parcial a la izquierda y multiplicando ambos lados por $q!$, queda que

$$(q-1)!p - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{n!} = \Lambda(q),$$

donde $\Lambda(q)$ es una serie de términos positivos.

a) Razona que la parte izquierda de la última igualdad es un número entero.

b) Prueba que $0 < \Lambda(q) < 1/q$ para todo natural $q \in \mathbb{N}$.

c) Deduce que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Proof that e is irrational

A proof that e is irrational del canal *Numberphile* (16:28)

327. *(Prueba de la irracionalidad de* e *por Fourier, segunda versión)* Probamos que e es irracional por reducción al absurdo. Empezamos suponiendo que existen dos números naturales p y q tales que

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}.$$

A continuación, consideramos la igualdad

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pasando la suma parcial a la izquierda y multiplicando ambos lados por $(-1)^{-p-1}p!$, queda que

$$(-1)^{-p-1}q(p-1)! - \sum_{n=0}^{p}(-1)^{n-p-1}\frac{p!}{n!} = \sum_{n=p+1}^{+\infty}(-1)^{n-p-1}\frac{p!}{n!} =: \Omega(p),$$

donde $\Omega(p)$ es una serie alternada.

a) Razona que la parte izquierda de la última igualdad es un número entero.

b) Prueba que $0 < \Omega(p) < 1/(p+1)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

c) Deduce que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Proving e Is An Irrational Number (3 Methods) del canal *MindYourDecisions* (13:17)

328. *(Otra prueba de la irracionalidad de* e*)*

a) Prueba que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{m!} = 0$.

b) Prueba que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{m!} = 1$.

c) Usa la identidad $\mathrm{e} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ para probar que

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(2\pi \mathrm{e} n!) = 2\pi.$$

d) Deduce que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

e is irrational del canal *Michael Penn* (17:56)

329. *(Un sorprendente problema de probabilidad)* Sean x e y dos números escogidos al azar en el intervalo $[0,1]$ siguiendo una distribución uniforme. Sea p la probabilidad de que el número

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$$

sea par. Prueba que $p = 1 - \frac{1}{2}\log 2$.

Tips to be a better problem solver del canal *3Blue1Brown* (⏲ 1:08:59)

330. *(Otro sorprendente problema de probabilidad)* Sean x e y dos números escogidos al azar en el intervalo $[0, 1]$ siguiendo una distribución uniforme. Calcula la probabilidad de que

$$\lfloor \log_2 x \rfloor = \lfloor \log_2 y \rfloor.$$

Interesting probability question from the AMC del canal *Mu Prime Math* (⏲ 8:34)

∀∃ **331.** *(Definición de serie convergente)* La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente si y solo si la sucesión de sus sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ tiene un límite finito S. En tal caso, escribiremos que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

a) Prueba que las sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n^2$ de la serie 2-armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ forman una sucesión monótona creciente y acotada. Deduce que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ es convergente. Prueba que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 < 2$.

b) Prueba que la serie 1-armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ es divergente.

A first look at series del canal *Michael Penn* (⏲ 12:35)

∀∃ **332.** *(Criterio de convergencia de Cauchy para series)* Prueba que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y solo si

$$\forall \epsilon\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \geq N \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n| < \epsilon.$$

W Cauchy's convergence test

Cauchy Criterion for Series del canal *Michael Penn* (⏲ desde 7:00)

∀∃ **333.** *(Criterios de convergencia para series)* Prueba los siguientes criterios.

a) *Criterio de comparación directa:* Si $0 \leq a_n \leq b_n$, entonces:
   - $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge; y
   - $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge.

b) *Test de convergencia absoluta:* $\sum_n |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge.

c) *Criterio de Leibniz:* $a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_n (-1)^n a_n$ converge.

d) *Criterio de Raabe:* Si a_n es una sucesión de términos positivos tal que

$$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \qquad M := \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

entonces
   - $M > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge;
   - $M < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge; y
   - $M = 1 \Rightarrow$ El criterio de Raabe no da información.

e) *Criterio de condensación de Cauchy:* Si a_n es una sucesión monótona decreciente de términos positivos, entonces $\sum_n a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_n 2^n a_{2^n}$ converge.

Proving some series tests del canal *Michael Penn* (⏲ 15:49) [a), b) & c)]

The series test you didn't learn in Calculus! del canal *Michael Penn* (⏲ hasta 5:55) [d)]

The Cauchy Condensation Test del canal *Michael Penn* (⏲ 13:46) [e)]

Una obra de arte nunca se termina, solo se abandona. (Leonardo da Vinci)

Índice

Páginas donde se define y/o debe usarse cada ítem. Cada página puede contener varias apariciones del ítem en cuestión.

Índice de nombres

Este índice lista matemáticos, físicos, autores y "Youtubers".