

Pràctica 3.2

Estudi qualitatiu d'un sistema no lineal en el pla de fases. El díode tunel⁽¹⁾

Departament de Matemàtica Aplicada IV, UPC

1 Objectius

En aquesta pràctica es pretén il·lustrar l'estudi de sistemes no lineals autònoms utilitzant el pla de fases. Prenent com a exemple un cas real, un oscil·lador amb díode túnel, es mostra el significat de les trajectòries en el pla de fases, els conjunts límit (punts d'equilibri i cicles límit) i la seva estabilitat.

2 Introducció

2.1 Trajectòries en el pla de fases

Donat un sistema autònom amb dos graus de llibertat, és a dir, un sistema modelable amb un sistema d'equacions de la forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

podem representar les solucions $(x(t), y(t))$ com corbes en el pla de fases, XY , parametritzades per la variable t , que habitualment representa el temps. Aquestes corbes les denominem *òrbites* o *trajectòries*. En la representació d'un sistema en el pla de fases es prescindeix del valor del paràmetre t en cada punt de la trajectòria, recordant únicament el sentit amb que es recorren quan t augmenta.

Donat que cada punt del pla de fases correspon a una de les possibles condicions inicials del sistema, si es compleixen les condicions d'existència i unicitat de solució, per cada punt del pla de fases passa una i només una trajectòria. És a dir, trajectòries diferents no poden tallar-se i

¹Pràctica original de J. Villar. Versió per a MAPLE de S. Gallego, amb beca de "Suport a la Docència" UPC-002799 230-743-1(2001-2002), sota la direcció de R. Cubarsi

el conjunt de les trajectòries cobreixen tota la regió del pla de fases en la qual es compleixen les condicions anteriors.

Molts sistemes autònoms reals tendeixen a un estat estacionari quan es deixa transcórrer el temps suficient des que es dona la condició inicial. En alguns casos, aquest estat estacionari es caracteritza perquè totes les variables prenen un valor constant. Les solucions constants d'un sistema es denominen *punts d'equilibri*.

Donat que les derivades temporals de les variables són nul·les en els punts d'equilibri aquests poden calcular-se resolent el sistema d'equacions

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Un altre tipus d'estat estacionari on pot arribar un sistema autònom correspon a una variació periòdica de les variables del sistema. Això equival a trobar una solució periòdica del sistema d'equacions diferencials. En el pla de fases, una solució periòdica correspon a una trajectòria tancada, ja que cada punt de la trajectòria representa un valor de les variables que s'hi arriba cada cop que transcorre un període.

Per exemple, exepete el punt d'equilibri en l'origen, totes les trajectòries del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega_o^2 x \end{cases}$$

que correspon a un oscil·lador harmònic, són trajectòries tancades. Recordem que diferents sistemes ideals, per exemple un sistema massa-molla o condensador-bobina (LC), es comporten segons les equacions anteriors.

El càlcul de solucions periòdiques d'un sistema d'equacions diferencials és molt més complicat que la determinació de solucions constants o punts d'equilibri. Tot i així, en la pràctica els sistemes que presenten solucions periòdiques tenen molta importància, ja que es tracta de sistemes que de forma autònoma generen senyals que varien amb el temps d'una forma definida. Aquest és el cas dels oscil·ladors utilitzats en tot sistema de transmissió, o de les bases de temps dels instruments electrònics i també dels circuits de temporització en circuits digitals (per exemple, ordenadors).

2.2 Conjunts límit: estabilitat

Si deixem evolucionar un sistema autònom, després d'un cert temps el sistema arriba a un estat o un conjunt d'estats que es succeeixen regularment. A aquest comportament se'l denomina conjunt *ω -límit*. Condicions inicials diferents poden portar a conjunts límit diferents.

Per exemple, un oscil·lador harmònic ideal (sense fregament) oscil·la contínuament amb una amplitut constant, de manera que tots els estats que componen aquesta oscil·lació es succeeixen regularment. En aquest cas, totes les trajectòries són conjunts límit.

Si considerem el cas real amb fregament

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega_o^2 x - 2\sigma y \end{cases}$$

l'amplitud de les oscil·lacions decreix amb el temps de manera que la trajectòria en el pla de fase és una espiral que es va tancant al voltant de l'estat de repòs o punt d'equilibri fins a arribar-hi². En aquest cas, l'únic conjunt límit és el punt d'equilibri (origen en el pla de fases).

Si, com en l'últim cas, totes les trajectòries suficientment properes a un punt d'equilibri es mantenen pròximes i tendeixen a ell quan $t \rightarrow +\infty$, diem que el punt d'equilibri és asimptòticament estable.

Els punts d'equilibri asimptòticament estables són estats finals per tot un conjunt de condicions inicials, el que significa que són estats fàcilment observables³. Aquest és el cas del punt de repòs d'un oscil·lador harmònic.

2.3 Oscil·ladors

També podem parlar d'estabilitat en altres trajectòries, en particular, en trajectòries tancades. Si totes les trajectòries properes a una trajectòria tancada tendeixen cap a ella quan $t \rightarrow +\infty$ diem que aquesta trajectòria és un cicle límit (asimptòticament) estable.

L'oscil·lador harmònic no presenta cap cicle límit, ja que si variem l'amplitud de la oscil·lació simplement saltam a un altre trajectòria i no tornem més a l'amplitud inicial.

Un sistema amb un cicle límit oscil·la únicament amb l'amplitud que fixa el mateix cicle. Si es fa augmentar l'amplitud (donant una condició inicial en l'exterior del cicle) apareix una pèrdua neta d'energia que fa disminuir de nou l'amplitud de l'oscil·lació. Pel contrari, si es redueix l'amplitud (interior del cicle límit) algun component del sistema aporta energia suficient per provocar un augment de l'amplitud de l'oscil·lació.

La utilitat d'aquests sistemes és la de generar senyals de forma i amplitud ben definides. Aquest és el cas real dels sistemes usats com a temporitzadors i generadors de senyal. Tals sistemes es denominen *oscil·ladors* i es caracteritzen perquè tota solució no estacionària tendeix al cicle límit. Aquesta condició (condició *d'arrencada*) significa que l'oscil·lador sempre arribarà al cicle independentment de l'estat inicial en que es trobi el sistema.

Es pot demostrar que cap sistema lineal pot contenir cicles límit i, per tant, no pot comportar-se com un oscil·lador. Pròpiament la part no lineal d'un oscil·lador és el component encarregat de

²Les solucions són en aquest cas de la forma

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{-\sigma t} \cos(\omega t - \phi) \\ y(t) = x'(t) \end{cases}$$

que corresponen a oscil·lacions que s'amorteixen segons $e^{-\sigma t}$.

³En general no tots els conjunts límit són fàcilment observables. Per això tan sols cal suposar un punt d'equilibri en el qual totes (o algunes de) les trajectòries properes a ell se'n allunyin. Aleshores només és possible observar aquest estat el temps que tardi el sistema en abandonar-lo. El cas descrit es denomina punt d'equilibri inestable. En rigor, per a que un punt d'equilibri sigui inestable cal que hi hagi trajectòries tan properes a ell com volguem, i que se'n allunyin. Es pot definir conjunt α -límit anàlogament al ω -límit considerant en aquest cas $t \rightarrow -\infty$. En una simulació, alguns conjunts α -límit poden observar-se si invertim el sentit del temps (substituir t per $-t$ en el model).

restaurar l'energia dissipada en la resta del sistema i, per tant, de mantenir l'amplitud de la oscil·lació.

3 Descripció del sistema escollit

El sistema que es simula en aquesta pràctica és un oscil·lador amb díode túnel, l'esquema del qual es mostra en la Figura 1.

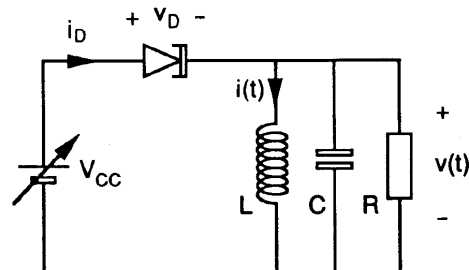


Figura 1: Esquema de l'oscil·lador amb díode túnel

Aquest sistema és un oscil·lador elèctric que consta d'una autoinducció L , un condensador C , i un element no lineal denominat *díode túnel* que es comporta com una resistència no lineal, es a dir, que no compleix la llei d'Ohm. El díode túnel, com a qualsevol resistència no lineal, es caracteritza per la corba tensió-corrent. Aquesta corba, denominada *corba característica*⁴, es mostra en la Figura 2, i representa un corrent a través del díode en funció de la tensió aplicada entre els seus extrems, $i_D = f(v_D)$.

Inevitablement hi ha una resistència R (aquest cop lineal), que modela tant les pèrdues pròpies del circuit real (resistència del fil de la bobina i pèrdues en el dielèctric del condensador) com l'energia útil⁵ que extraiem del sistema. Finalment, una bateria V_{CC} proporciona al circuit l'energia necessària pel seu funcionament.

La tensió de la bateria, V_{CC} , la prendrem com a paràmetre del sistema. Aquest sistema es comporta com un oscil·lador únicament en un determinat rang de valors del paràmetre anterior. El sistema d'equacions diferencials que descriu l'oscil·lador s'obté a través de l'anàlisi estàndar del circuit (lleis de Kirchoff), resultant

$$\begin{cases} i' = \frac{v}{L} \\ v' = -\frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v + \frac{1}{C}f(V_{CC} - v) \end{cases}$$

⁴La característica tensió-corrent en un díode normal té la forma $i_D = I_{D0} (e^{v_D/v_T} - 1)$, on $v_T = kT/q = 25mV$ a temperatura ambient. En el díode túnel apareix un corrent addicional apreciable únicament en un determinat rang de valors de v_D que s'explica a través de l'efecte túnel predit per la Mecànica Quàntica. Aquest efecte només apareix sota determinades condicions de fabricació.

⁵Per a utilitzar un oscil·lador necessitem extreure del mateix una certa energia, ja sigui fonamentalment en forma de corrent elèctric o tensió.

essent i i v el corrent i la tensió en l'autoinducció L , respectivament⁶

Es pot comprovar que el sistema anterior presenta un únic punt d'equilibri⁷ en $v = 0$ i $i = f(V_{CC})$.

Per tal d'analitzar l'estabilitat del punt d'equilibri podem considerar que el díode túnel es comporta al voltant de aquest punt ($v_D = V_{CC}$) com una resistència lineal de valor $\frac{1}{f'(V_{CC})}$ ⁸. A aquesta resistència se l'anomena *resistència dinàmica* del díode. Observi's que un valor negatiu de la resistència dinàmica del díode significa que aquest està subministrant energia al circuit LC, mentre que un valor positiu, com és el cas de les resistències reals, indica consum d'energia. La resistència efectiva total del circuit, R_{eq} , és l'associació en paral·lel de la resistència R i la resistència dinàmica del díode. El signe de R_{eq} determinarà si el punt d'equilibri és estable (dissipació d'energia) o inestable (aportació d'energia).

4 Entorn de treball

Per tal de fer l'estudi del circuit de la Figura 1 usarem el MAPLE, que ens permetrà fer la simulació del díode túnel.

El díode túnel utilitzat no correspon a cap díode comercial i tèn la característica⁹ mostrada en la Figura 2.

Els valors inicials dels components passius que es poden prendre per fer la simulació del circuit mitjançant el programa són els següents, $C=100\text{pF}$, $L=10\mu\text{H}$ i $R=1\text{K}\Omega$. Aquests valors són els adequats per què puguem treballar còmodament amb valors de tensió i corrent no massa elevats. Com ja sabem el programa MAPLE disposa d'un paquet d'eines especial per a equacions diferencials: "DEtools". Per carregar-lo posarem la instrucció:

with(DEtools);

⁶Aquest sistema és equivalent a una equació de segon ordre que és un cas particular de l'equació de Lienard i per a alguns valors de V_{CC} es pot aproximar per l'equació de Van der Pol, $x'' = -x - x' + x'^3$, estudiada ampliament en els textos d'equacions diferencials. (Veure per exemple la bibliografia).

⁷Raonant sobre el sistema real, ja que un punt d'equilibri es caracteritza per mostrar valors constants de v i i , haurà de ser $v = 0$ si considerem que el valor mig de la tensió en una autoinducció és nul·la. D'aquesta manera tota la tensió de la bateria recau en el díode túnel, on hi circula un corrent igual a $f(V_{CC})$. Finalment $i = f(V_{CC})$ donat que $v = 0$ i, per tant, no circula corrent alguna ni per la resistència ni pel condensador.

⁸En efecte, si variem lleument la tensió v_D en el díode, la variació del seu corrent es pot aproximar per $di_D = f'(v_D)dv_D$, tot comportant-se com la resistència citada.

⁹S'ha modelat la funció f que apareix en el corrent del díode túnel (em mV) amb la funció:

$$f(v_D) = 1.5e^{\frac{(v_D - v_m)^2}{2uv_m}} + 35e^{\frac{(v_D - 1.094)^2}{-0.1}}$$

que correspon a la suma de dos funcions gaussines, on prenem $v_m = 0.35$ i $u = -0.01$.

La forma exacta de la corba característica és complexa, es dona aquesta per aproximació, en el cas d'un component comercial es desconeix. Tot i això cal saber interpretar el comportament del díode en cada tram significatiu de la seva corba característica. Per exemple, haurem de distingir el màxim, el mínim, la zona de pendent negatiu, etc.

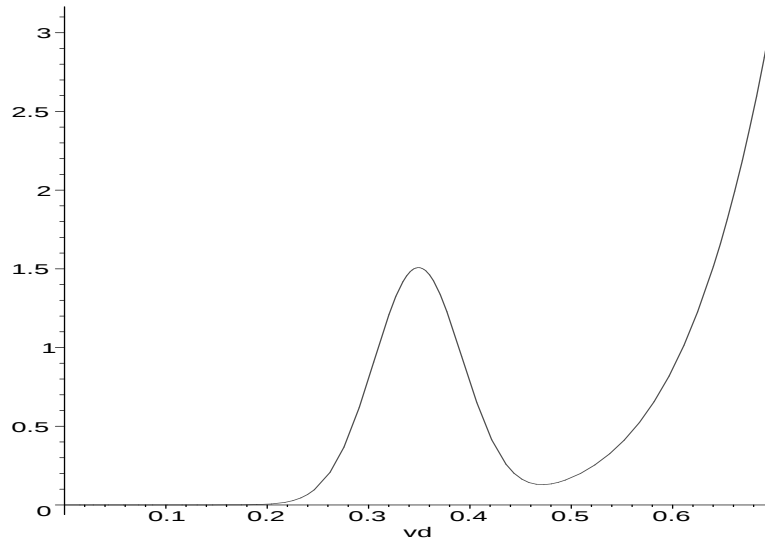


Figura 2: Corba característica d'un díode túnel $i_D = f(v_D)$

També carregarem el paquet d'àlgebra "linalg", que necessitarem si cal treballar amb les matrius de coeficients d'un sistema linealitzat:

```
with(linalg);
```

Així, considerant el sistema de la §2.1, les condicions inicials es poden indicar per:

```
> inicials := [[t1, x(t1), y(t1)], [t2, x(t2), y(t2)], ..., [tn, x(tn), y(tn)]];
```

La instrucció "DEplot3d" ens permet dibuixar les corbes integrals donat un conjunt de condicions inicials. Es pot usar¹⁰ de diferents maneres, una d'elles:

```
> DEplot3d(D(x)(t) = f(x, y), D(y)(t) = g(x, y), [x, y], trange, inicials,
xrange, yrange, stepsize, linecolor);
```

La instrucció "phaseportrait" ens permet dibuixar, donades unes condicions inicials, les òrbites corresponents. Té l'aspecte¹¹:

```
> phaseportrait(D(x)(t) = a * x + b * y, D(y)(t) = c * x + d * y, [x, y], trange, inicials,
xrange, yrange, stepsize, linecolor);
```

5 Exercicis

1. Comprovar els càlculs del punt d'equilibri i de la matriu Jacobiana del sistema, i discutir l'estabilitat en primera aproximació.

¹⁰Consultar el help(DEplot3d)

¹¹Consultar el help(phaseportrait).

2. Analitzar en funció del paràmetre V_{CC} el tipus de trajectòries corresponents al sistema linealitzat (prenent $C=100\text{pF}$, $L=10\mu\text{H}$ i $R=1\text{K}\Omega$) per a alguns valors característics de V_{CC} , considerant la gràfica de la Figura 2.
3. Dibuixar les trajectòries en el pla de fases de l'oscil·lador per a diferents valors representatius de la tensió de la bateria V_{CC} .
Trobar aproximadament el rang de valors de V_{CC} en els que s'aprecia l'existència de cicle límit. Interpretar-ho en funció de R_{eq} , i relacionar-ho amb l'estabilitat del punt d'equilibri.
Redibuixar les trajectòries ampliant la zona al voltant del punt d'equilibri i comparar amb els resultats previstos en l'exercici anterior.
4. Triar un punt del pla de fases que no sigui el punt d'equilibri (per exemple un punt en el cicle límit) i dibuixar les trajectòries ampliant una zona al voltant del punt. Comprovar que el diagrama resultant no s'assembla al de cap punt d'equilibri d'un sistema lineal.
5. Suposem que l'oscil·lador porta un cert temps en funcionament i que es pot considerar que està seguint el cicle límit (amb la tensió V_{CC} adequada). Què passaria si es perturba el sistema allunyant-lo lleugerament del cicle límit? Quantes oscil·lacions són necessàries per a tornar pràcticament a la situació d'equilibri?

6 Exemple de full MAPLE

```
> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

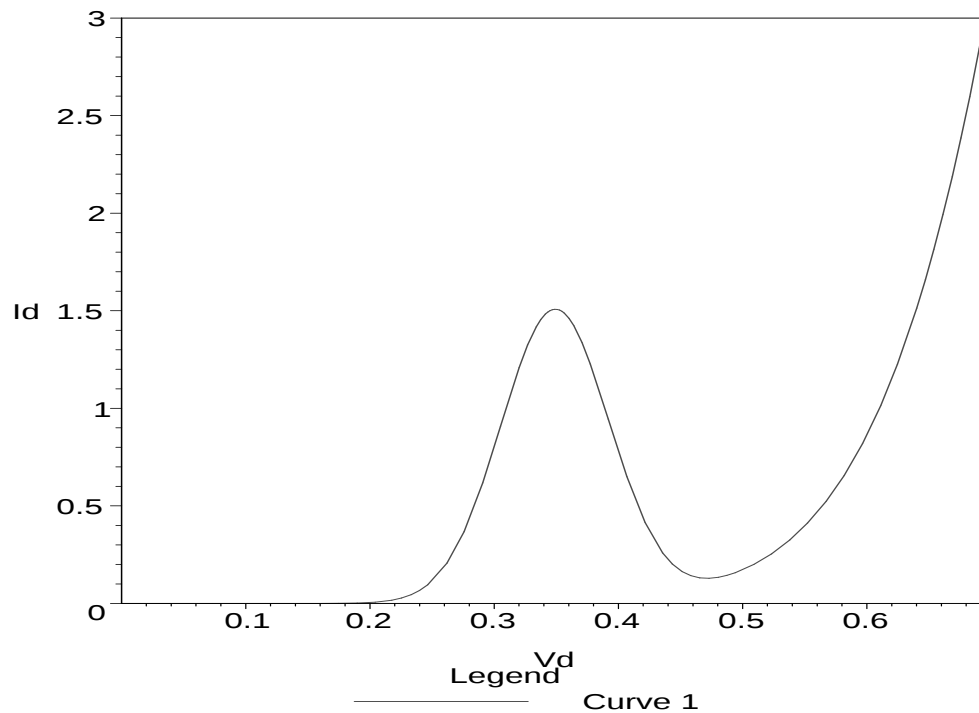
> with(DEtools):

Warning, the name adjoint has been redefined

> #definició de la funció característica;
> v1:=0.349:s1:=v1/8:s2:=4*s1:v2:=v1+4*s2:
> f:=vd->(1.5*exp(-((vd-v1)/s1)^2/2)+(1/(v2-v1))*(s2/s1)^2*exp(-((vd-v2
> )/s2)^2/2))/1000;


$$f := vd \rightarrow .001500000000 e^{(-1/2 \frac{(vd-v1)^2}{s1^2})} + \frac{1}{1000} \frac{s2^2 e^{(-1/2 \frac{(vd-v2)^2}{s2^2})}}{(v2 - v1) s1^2}$$


> plot(1000*f(Vd),Vd=-0..2*v1,Id=0..3,axes=boxed);
```



```

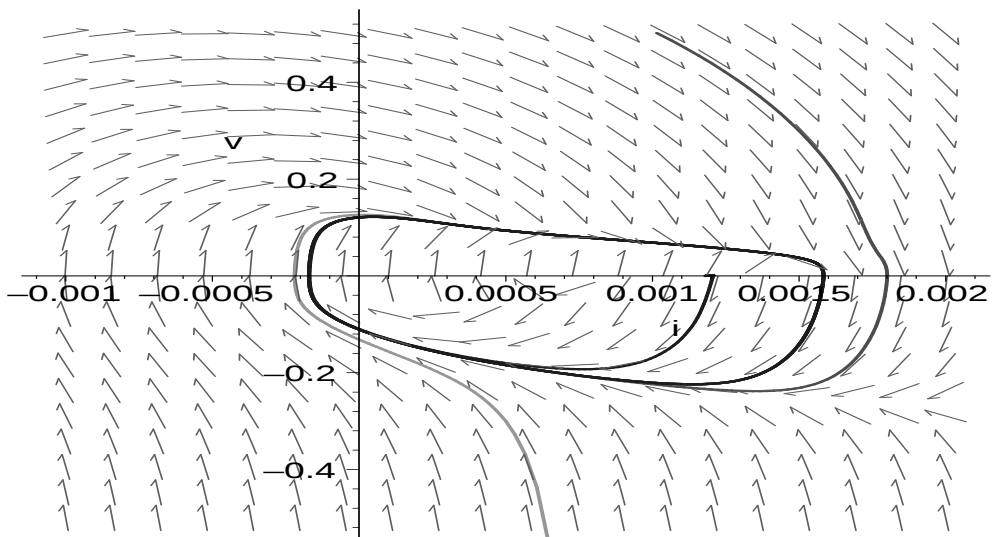
> #pendent de la característica
> fprima:=x->eval(subs(v=x,diff(f(v),v)));
      fprima := x → eval(subs(v = x,  $\frac{\partial}{\partial v} f(v)$ ))
> #resistencia dinamica del diode
> Rd:=x->1/fprima(x);
      Rd := x →  $\frac{1}{fprima(x)}$ 
> #primera equacio
> F:=(i,v)->v/L;
      F := (i, v) →  $\frac{v}{L}$ 
> #segona equacio
> G:=(i,v)->-(1/C)*i-(1/R/C)*v+(1/C)*f(Vcc-v);
      G := (i, v) →  $-\frac{i}{C} - \frac{v}{RC} + \frac{f(Vcc - v)}{C}$ 
> #fixem tensio del diode, resistencia dinamica i punt d'equilibri
> Vcc:=0.38; 'punt_equil_I' := f(Vcc); 'res_dinamica_Rd' := Rd(Vcc);
> R:=1000;
> 'R_equival' := 1/(1/R+1/Rd(Vcc));
> C:=1.*10**(-10);

```

```

> L:=1.*10**(-5);
                                Vcc := .38
                                punt_equil_I := .001180715806
                                res_dinamica_Rd := -53.63614441
                                R := 1000
                                R_equival := -56.67602804
                                C := .1000000000 10-9
                                L := .000010000000000
> #unes condicions inicials
> inicials:=[[0,f(Vcc),-0.05],[0,0.0015,0.3],[0,0.0005,-0.3]];
                                inicials := [[0, .001180715806, -.05], [0, .0015, .3], [0, .0005, -.3]]
> # retrat de fase amb oscilador
> phaseportrait({D(i)(t)=F(i(t),v(t)),
> D(v)(t)=G(i(t),v(t))
> },[i(t),v(t)],t=-10**(-6)..10**(-6),inicials,i=-0.001..0.002,
> v=-0.5..0.5, stepsize=10**(-9),linecolor=[blue,red,green]);

```



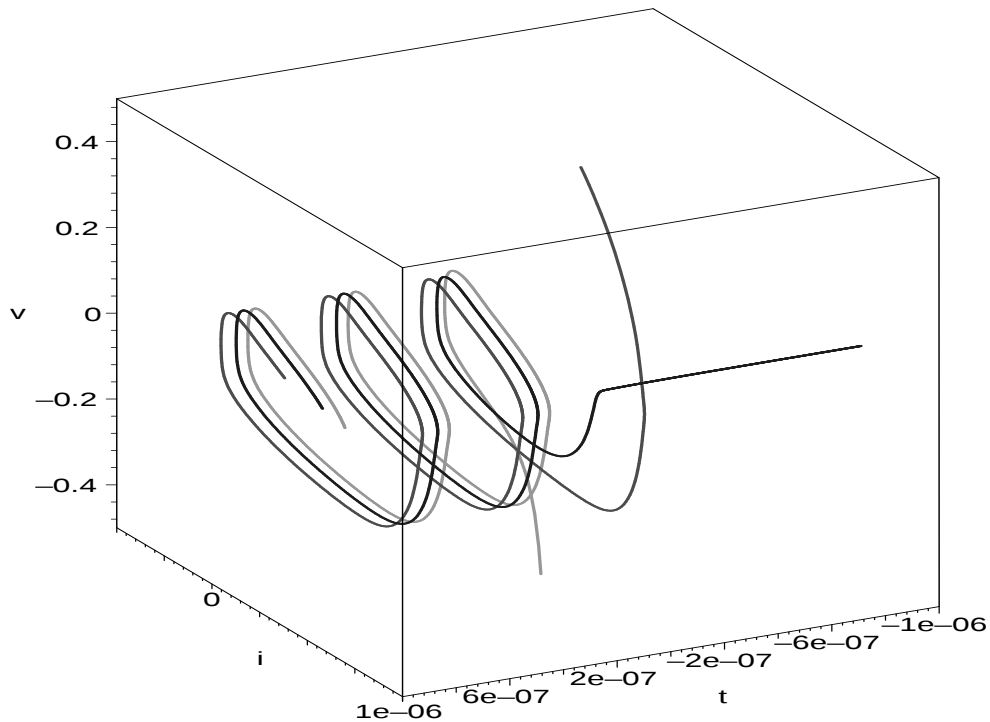
Legend

	Curve 1
	Curve 2
	Curve 3
	Curve 4

```

> #corbes integrals
> DEplot3d({D(i)(t)=F(i(t),v(t)),
> D(v)(t)=G(i(t),v(t))
> },[i(t),v(t)],t=-10**(-6)..10**(-6),inicials,scene=[t,i,v],
> i=-0.001..0.002,v=-0.5..0.5,stepsize=10**(-9),linecolor=[blue,red,green
> n]);

```



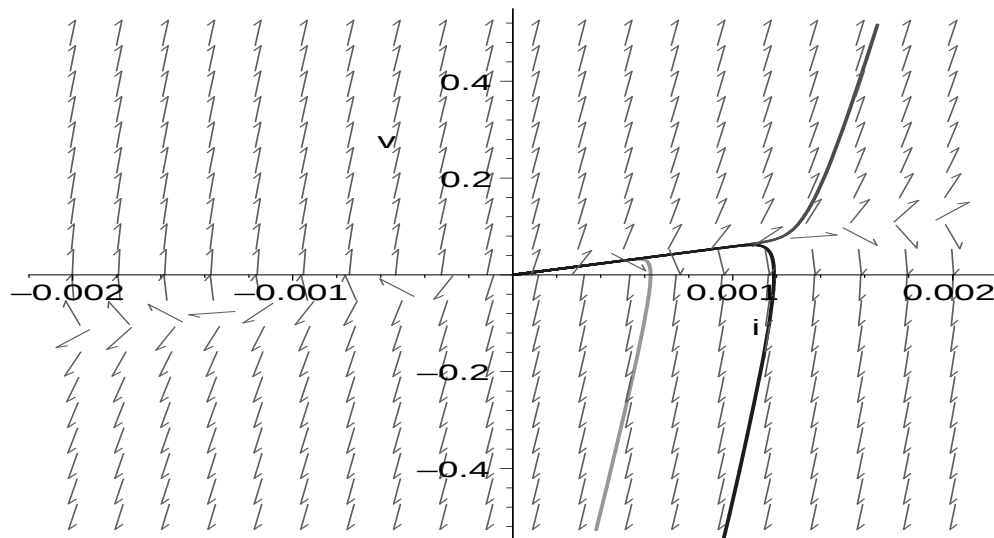
```
> #sistema linealitzat: res a veure amb l'anterior
> J:=evalf(subs({i=f(Vcc),v=0},jacobian([F(i,v),G(i,v)], [i,v])));
> eigenvects(J);
```

$$J := \begin{bmatrix} 0. & 100000.0000 \\ -.10000000000 \cdot 10^{11} & .1764414404 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

$$[.1705790560 \cdot 10^9, 1, \{[-.0006081454257, -1.037368726]\}],$$

$$[.58623844 \cdot 10^7, 1, \{[-.0009982860390, -.05852336521]\}]$$

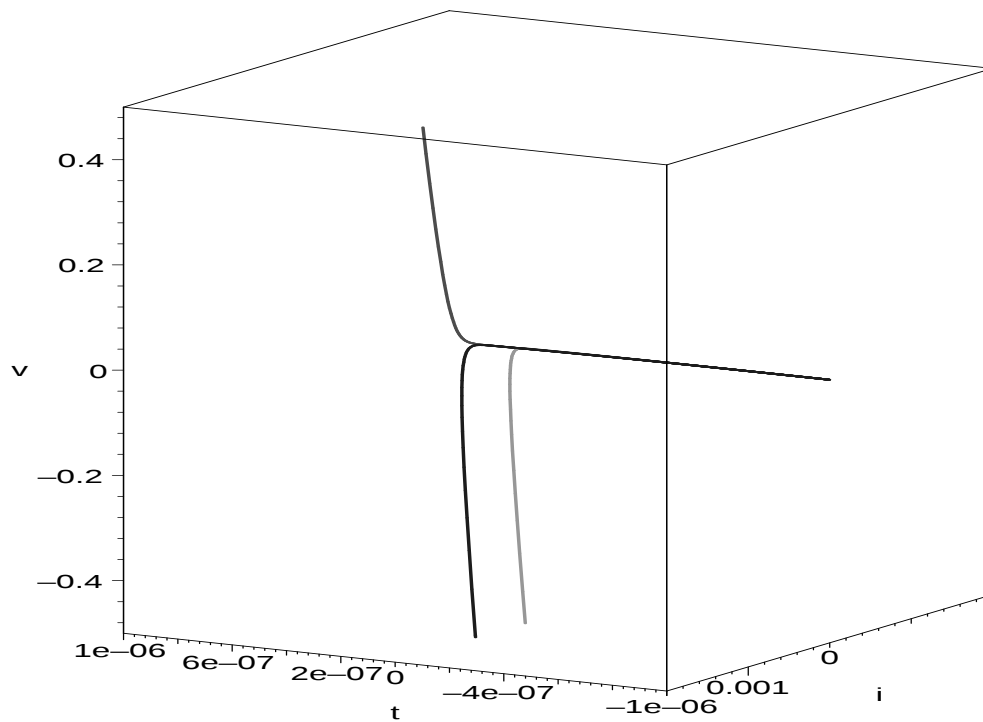
```
> Flin:=(i,v)->J[1,1]*i+J[1,2]*v;
> Glin:=(i,v)->J[2,1]*i+J[2,2]*v;
      Flin := (i, v) → J1,1 i + J1,2 v
      Glin := (i, v) → J2,1 i + J2,2 v
> phaseportrait({D(i)(t)=Flin(i(t),v(t)),
> D(v)(t)=Glin(i(t),v(t))
> },[i(t),v(t)],t=-10**(-6)..10**(-6),inicals,i=-0.002..0.002,
> v=-0.5..0.5, stepsize=10**(-9),linecolor=[blue,red,green]);
```



Legend

—	Curve 1
—	Curve 2
—	Curve 3
—	Curve 4

```
> DEplot3d({D(i)(t)=Flin(i(t),v(t)),
> D(v)(t)=Glin(i(t),v(t))
> },[i(t),v(t)],t=-10**(-6)..10**(-6),inicals,scene=[t,i,v],
> i=-0.002..0.002,v=-0.5..0.5,stepsize=10**(-9),linecolor=[blue,red,gree
> n]);
```



Bibliografía

- Hirsch, M.W., Smale, S. (1983) Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. Alianza Editorial.
- Simmons, F. (1993) Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill (segunda edición).