
Preguntes test d'equacions diferencials ¹

Rafael Cubarsi

Departament de **M**atemàtica **A**plicada **4**

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

¹Recull de preguntes aparegudes en exàmens durant els anys 1996-2005.

Amb la col·laboració de Germinal Camps (beca de suport a la docència UPC 009155-230-743-2 (2005-2006)).

Copyright ©2005-2010 by Rafael Cubarsi



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 3.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

o envieu una carta a:

Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA

1 Equacions de primer ordre

1. Considereu el p.v.i. $y' = 2xy^2$, $y(2) = -2/3$.
 - (a) l'equació és homogènia
 - (b) no podem garantir l'existència i la unicitat de la solució del p.v.i.
 - (c) la solució maximal del p.v.i. passa per $(0, 2)$
 - (d) la solució maximal del p.v.i. és sempre negativa
2. Les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1-x$, $a \in \mathbb{R}$ són:
 - (a) $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
 - (b) $y + 2(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$
 - (c) $y + 9(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
 - (d) $y + 5(1-x)^{\frac{2}{3}} + a = 0$
3. Sobre p.v.i. $y' = \sin(|x|)y^{2/3}$, $y(x_0) = y_0$, és *FALS* que
 - (a) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 1$, té una única solució
 - (b) si $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
 - (c) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$, té, almenys, dues solucions diferents
 - (d) si $x_0 = 0$ i $y_0 = 1$, té, almenys, dues solucions diferents
4. L'equació diferencial de la família de corbes $x^3 + y^3 = C$ **NO** és:
 - (a) lineal
 - (b) de variables separades
 - (c) cap de les altres
 - (d) homogènia
5. Quina de les equacions diferencials següents *NO* és homogènia?:
 - (a) $yy' = x^2 + y^2$
 - (b) $y' + 1 = e^{x/y}$
 - (c) $\log x^2 = y' + 2 \log(2y)$
 - (d) $xy' = x + y$
6. Les corbes tals que, en cada punt (x, y) , la projecció del segment de normal comprès entre el punt de contacte a la corba i l'eix OX té punt mig $(2x, 0)$ són:
 - (a) El·lipses
 - (b) Paràboles
 - (c) Hipèrboles
 - (d) Rectes
7. Considereu el problema de valor inicial $y' = |x|f(y)$, $y(x_0) = y_0$, on $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua. Llavors és cert que
 - (a) Si f és C^1 , el problema de valor inicial té solució única
 - (b) El problema de valor inicial té sempre solució única

- (c) Si $x_0 = 0$, el problema de valor inicial té més d'una solució
 - (d) El problema de valor inicial té més d'una solució
8. Sigui $y'(x) = y(x)^\alpha$, $y(0) = 1$; aleshores és *FALS* que:
 - (a) Si $\alpha = 2$ la solució maximal està definida $\forall x < 1$
 - (b) Si $\alpha = 1$ la solució maximal està definida $\forall x \in \mathbb{R}$
 - (c) Si $1 < \alpha < 2$ la solució maximal està definida $\forall x < \frac{1}{\alpha-1}$
 - (d) Si $1 < \alpha < 2$ la solució maximal està definida $\forall x \in \mathbb{R}$
 9. Podem assegurar que el problema de valor inicial $\{y' = f(x)g(y), y(1) = 0\}$ té solució única quan:
 - (a) $f \in C^1((-\infty, 1])$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$
 - (b) $f \in C^1(\mathbb{R})$ i g derivable a $\mathbb{R}$
 - (c) f és contínua a $(0, +\infty)$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$
 - (d) $f \in C^1(\mathbb{R})$ i $g \in C^1((0, \infty))$
 10. La solució maximal $y(x)$ del problema de valor inicial
$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1$$
satisfà
 - (a) $y(2) = -1$
 - (b) $y(2) = 0$
 - (c) $y(2) = 2$
 - (d) No està definida per a $x = 2$
 11. Considerem l'equació
$$y' + \frac{y}{t} = t^3 y^3$$
És *FALS* que:
 - (a) La solució $y(t)$ tal que $y(2) = \frac{1}{2}$ està definida en $-\sqrt{5} < t < \sqrt{5}$
 - (b) Fent el canvi $z = y^{-2}$ es converteix en lineal
 - (c) La solució $y(t)$ tal que $y(1) = 1$ està definida en $0 < t < \sqrt{2}$
 - (d) Tota solució $y(t)$ té signe constant a l'interval on està definida
 12. Les trajectòries ortogonals a les corbes d'equació $x^2 + y^2 = 2ax$, són les solucions de l'equació:
 - (a) $y' = \frac{y}{x-a}$
 - (b) $x^2 y' - y^2 y' = 2xy$
 - (c) $2xyy' = y^2 - x^2$
 - (d) $(y^2 - x^2)y' = 2xy$
 13. Quines són les corbes tals que tot punt és punt mig del segment de recta tangent en aquest punt comprès entre els dos eixos?
 - (a) $y = kx$
 - (b) $y = \frac{k}{x}$
 - (c) $x^2 + y^2 = R^2$
 - (d) Cap de les altres

14. Considerem $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ amb $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i $|g'(x)| > 1$. Sigui el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ amb $f(x, y) = g(\frac{x}{y})$. Quina de les següents afirmacions és *FALSA* ?
- El problema té solució única per a $a = 1, b = 0$
 - El problema té solució única per a $a = 0, b = 1$
 - Es tracta d'una equació de tipus homogeni
 - L'equació es transforma en una de variables separades si s'aplica el canvi $z = \frac{x}{y}$
15. La família de corbes ortogonals a les hipèrboles $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ és:
- $\log y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$
 - $\log y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c$
 - $\log y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$
 - $\frac{x^2}{c^2} + y^2 = 1$
16. Sigui $y(x)$ la solució del p.v.i. $y' = 1 - \sin y$, $y(0) = 0$. En aproximar $y(\pi)$ pel mètode d'Euler amb 2 iteracions obtenim
- $\frac{\pi}{2}$
 - $1 - \pi$
 - 1
 - 0
17. Considereu les corbes tals que, per a cadascun dels seus punts, l'eix Y divideix en dos parts iguals el segment de recta tangent a la corba comprès entre el punt de tangència i l'eix X. Aleshores és *FALS* que
- satisfan l'e.d.o. $2xy' = y$
 - les seves trajectòries ortogonals satisfan $yy' + 2x = 0$
 - són del tipus: $y = C\sqrt{x}$
 - són del tipus: $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$
18. La solució del problema de valor inicial
- $$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1,$$
- satisfà
- $\lim_{x \rightarrow e} y(x) = \infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \infty$
 - $y(e) = -e$
 - $y(e) = 0$
19. L'equació que satisfan les trajectòries ortogonals a la família $x^2 - y^2 = kx$, $k \in \mathbb{R}$, és
- $y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
 - $y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$
 - $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$
 - $y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$
20. Quines d'aquestes corbes satisfan que la projecció sobre l'eix OY del tros de normal limitat pel punt de la corba i l'eix OY té longitud $\frac{1}{2}$?
- $x = y^2 + C$
 - $y = x^2 + C$
 - $y = -\frac{1}{2} \ln x + C$
 - $e^y = \sqrt{x} + C$
21. Sigui l'equació $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$. El canvi de variable $y = \frac{1}{x} + u$ la converteix en una del tipus:
- Cap de les altres
 - Bernoulli
 - Lineal
 - Homogènia
22. Podem assegurar que el problema de valor inicial $\{y' = |x - 1||x - 2| + x \cos\left(\frac{1}{y}\right), y(a) = b\}$ té solució única quan
- $a = 1, b = 0$
 - $a = 2, b = 1$
 - $a = 3, b = 0$
 - Cap de les altres
23. La trajectòria ortogonal a les corbes d'equació $x^2 + 2y^2 = c$, i que passa pel punt $(1, 1)$ és:
- $y = kx^2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
 - $x = ky^2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
 - $y = x^2$
 - $x = y^2$
24. L'equació resultant de fer el canvi $v = \frac{1}{\cos y}$ a l'equació $y' \sin y = \cos y(1 - x \cos y)$ és:
- $v' + v = x$
 - $v' = 1 - \frac{x}{v}$
 - $v' = 1 + \frac{x}{v}$
 - $v' = v - x$
25. Quines són les corbes tals que l'àrea del triangle limitat per l'eix OY , el radi vector i la recta tangent a un punt de la corba és igual que l'àrea del triangle limitat per l'eix OX , el radi vector i la recta normal?
- Rectes
 - Circumferències
 - Hipèrboles
 - Paràboles
26. Sigui la família de corbes $x^2y + xy^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$. Les corbes normals a les donades són les solucions de l'equació diferencial:
- $(2x - y)yy' + x(x + 2y) = 0$
 - $(2x - y)yy' - x(x - 2y) = 0$
 - $(2x + y)yy' + x(x - 2y) = 0$
 - $(2x + y)yy' - x(x + 2y) = 0$

27. Considereu el problema $(y')^2 = 4x^2$, $y(0) = 0$. Quina de les següents afirmacions és correcta?

- (a) Té diverses solucions
- (b) El teorema d'existència i unicitat assegura que té una única solució
- (c) No té cap solució
- (d) Té una única solució, tot i que no s'hi pot aplicar el teorema d'existència i unicitat

28. De quin tipus *NO* és l'equació diferencial de les trajectòries ortogonals a la família de corbes $xy = c$?

- (a) de tipus homogeni
- (b) lineal
- (c) de primer ordre
- (d) de variables separades

29. La corba que passa per $(0, 1)$ i tal que la recta tangent en (x, y) talla l'eix OX en el punt $(y, 0)$ és:

- (a) $y = e^{x/y}$
- (b) $y = e^{-2x/y}$
- (c) $y = e^{2x/y}$
- (d) $y = e^{-x/y}$

30. L'equació diferencial de la família de corbes $(k - \cos x)y = 1$, $k \in \mathbb{R}$, és

- (a) lineal
- (b) de variables separables
- (c) de tipus homogenia
- (d) cap de les altres

31. La corba per la que l'àrea del triangle que formen l'eix d'abscisses, la tangent a la corba i el radi vector del punt de contacte (x, y) és constant i igual a a^2 verifica:

- (a) $x - \frac{y}{y'} = \frac{2a^2}{y}$
- (b) $x + \frac{y'}{y} = \frac{2a^2}{y}$
- (c) $x - \frac{y}{y'} = 2a^2$
- (d) $x + \frac{y'}{y} = 2a^2$

32. Per a quin valor d' a la solució del problema

$$y' + y = a\delta(t - 1), \quad y(0) = 1$$

verifica $y(0) = y(1)$:

- (a) $1 - e^{-1}$
- (b) $1 + e^{-1}$
- (c) $1 - e$
- (d) $1 + e$

33. Segui la família de corbes

$$\frac{x^2}{a} + \frac{a}{y^2} = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

L'equació diferencial que satisfan les corbes normals a aquesta família és:

- (a) $(1 + x^2) - xyy' = 0$

- (b) $(1 - x) - xy' = 0$
- (c) $(1 + x) + xyy' = 0$
- (d) $(1 - x^2) + xyy' = 0$

34. La solució del problema de valor inicial

$$ty' + (2t + 1)y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$$

satisfà que $y(2)$ val:

- (a) e^{-4}
- (b) $\frac{3}{4}e^{-2}$
- (c) $\frac{3}{4}e^{-4}$
- (d) 0

35. La família de corbes $C = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $C \in \mathbb{R}$, és la solució general d'una ecuació diferencial de tipus

- (a) homogenia
- (b) lineal homogenia
- (c) separable
- (d) lineal no homogenia

36. La corba que pasa pel punt $(1, 1)$ tal que la tangent a cada punt (x, y) talla l'eix OY a $(0, x^2)$ verifica que:

- (a) $y(2) = -3$
- (b) $y(2) = 4$
- (c) $y(3) = -3$
- (d) $y(3) = -6$

2 Equacions d'ordre superior

1. Considereu l'equació $y'' + 2ay' \cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. Amb el canvi de variable $u(x) = y(x) \sin ax$ es transforma en:

- (a) $u''(x) + b^2u(x) = 0$
- (b) $u''(x) - b^2u(x) = 0$
- (c) $u''(x) + a^2u(x) = 0$
- (d) $u''(x) - a^2u(x) = 0$

2. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de

$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$

llavors un sistema fonamental de solucions és

- (a) $\{e^{-5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
- (b) $\{e^{5x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
- (c) $\{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$
- (d) $\{e^{3x}, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$

3. Si el wronskià $W(x)$ de dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definida $\forall x \in \mathbb{R}$, amb p derivable i $p \neq 0$, és solució de l'equació diferencial, llavors és *FALS* que:

- (a) $p'(x) = q(x)$
- (b) $W'' + p(x)W' + q(x)W = 0$

- (c) $W' + p(x)W = 0$
 (d) $W' + q(x)W = 0$
4. La solució general de l'equació $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$ és:

- (a) $y = C_1 \exp 2t + C_2 \exp(-t) + C_3 \exp(-3t)$
 (b) $y = C_1 t^2 \exp 2t + C_2 t^{-1} \exp(-t) + C_3 t^{-3} \exp(-3t)$
 (c) $y = C_1 \exp 2t + C_2 t \exp 2t + C_3 \exp(-t)$
 (d) $y = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) \exp 2t + C_3 \exp t$

5. Considerem dues solucions y_1, y_2 de l'equació $y'' + y' + y \cos t = 0$. Aleshores és *FALS* que:

- (a) Si $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ llavors $\{y_1, y_2\}$ són linealment dependents en qualsevol interval $I \subset \mathbb{R}$
 (b) Si $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ llavors $W[y_1, y_2]$ no s'anul·la mai
 (c) $\{y_1, y_2\}$ són linealment independents en $\mathbb{R}$ si i només si són un sistema fonamental de solucions
 (d) L'equació diferencial $W[y_1, y_2, y] = 0$ té les mateixes solucions que l'equació original.

6. Mitjançant el canvi $z = (\ln |y|)'$, l'equació diferencial $y'' + ay' + by = 0$, on $a, b \in \mathbb{R}$, es transforma en:

- (a) $z' + z^2 + az + b = 0$
 (b) $z' + az + b = 0$
 (c) $z'z'' + (z')^2 + az' + b = 0$
 (d) $(zz')' + az' + b = 0$

7. L'equació

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_6y^{(6)} + a_5y^{(5)} + y^{(4)} = x^2$, amb $n \geq 7$, admet com a solució algun polinomi de grau:

- (a) 2
 (b) 4
 (c) 6
 (d) n

8. Considereu l'equació

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

on $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ són contínues, i siguin y_1 i y_2 dues solucions d'aquesta. Llavors és *FALS* que:

- (a) Si y_1 i y_2 tenen un màxim a $x_0 \in (a, b)$, llavors són linealment dependents
 (b) Si en $x_0 \in (a, b)$, y_1 té un mínim i $y_1(x_0) = 0$, llavors $y_1(x) = 0, \forall x \in [a, b]$
 (c) Si y_1 té un màxim a $x_0 \in (a, b)$, i y_2 té un mínim al mateix punt, llavors són linealment dependents
 (d) Si y_1 i y_2 tenen un màxim a $x_0 \in (a, b)$, llavors $y_1(x) = y_2(x), \forall x \in [a, b]$

9. L'equació

$$y'' - f(x)y = 0$$

es transforma, mitjançant el canvi $z = y'/y$, en l'equació

- (a) $z' + z^2 = f(x)$
 (b) $z' + z = f(x)$

(c) $z' + 1/z = f(x)$

(d) $z' + f(x)z = 0$

10. La solució de l'equació diferencial d'ordre 2

$$y'' + 4y' + 8y = (\sin 2x + \cos 2x)e^{2x}$$

NO es pot escriure, per a algun valor de les constants, com:

- (a) $y = Ae^{-2x} \cos 2x + Be^{-2x} \sin 2x + Ce^{2x} \cos 2x + De^{2x} \sin 2x$
 (b) $y = Ae^{-2x} \cos 2x + Be^{-2x} \sin 2x + (Ce^{2x} \cos 2x + De^{2x} \sin 2x)x$
 (c) $y = \sin 2x(Ae^{2x} - Be^{-2x}) + \cos 2x(Ce^{2x} - De^{-2x})$
 (d) $y = Ae^{-2x} \sin 2x + Be^{-2x} \cos 2x + Ce^{2x} \sin 2x$

11. Sigui $x^2y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y = x^3$. Per a aquesta equació lineal és *FALS* que:

- (a) $\cosh(x)$ és solució de l'equació homogènia
 (b) El canvi $y(x) = xz(x)$ la converteix en una equació amb coeficients constants
 (c) La solució tal que $y(0) = y'(0) = 0$ no és única
 (d) Existeix una solució de la forma $cx^n, c \in \mathbb{R}$

12. Donada l'equació

$$y'' - 4y' + 4y = (1 + x)e^{2x} + \sin x + x \cos x$$

quina de les següents en pot ser solució particular?

- (a) $(Ax + B)e^{2x} + (Cx + D) \sin x + (Ex + F) \cos x$
 (b) $(Ax + B)e^{2x} + C \sin x + (Dx + E) \cos x$
 (c) $x^2(Ax + B)e^{2x} + (Cx + D) \sin x + (Ex + F) \cos x$
 (d) $x^2(Ax + B)e^{2x} + C \sin x + (Dx + E) \cos x$

13. Podem assegurar que el problema de valor inicial $\{y'' + \frac{1}{x}y' + x\sqrt{y} = 1, y(a) = b, y'(a) = c\}$ té solució única quan:

- (a) $a = c = 1, b = 0$
 (b) $a = 0, b = c = 1$
 (c) $a = b = 0, c = 1$
 (d) $a = b = 1, c = 0$

14. x^r és solució de l'e.d.o. $x^3y''' - 6xy' + 12y = 0$ si i només si

- (a) $r = 2, r = 3$
 (b) $r = 2, r = 3, r = -2$
 (c) $r = 2, r = -2$
 (d) $r = 2, r = 1, r = 0$

15. Per a quin valor de n la solució general de l'equació $x^2y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y = 2x^n e^x$ és $y(x) = Axe^x + Bxe^{-x} + x^2e^x$?

- (a) 3
 (b) 2
 (c) 1
 (d) 0

16. Supposeu que $y_1(t) = 1 + t$, $y_2(t) = 1 + t^2$ i $y_3(t) = 1 + 2t + 3t^2$ són solució de $y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t)$. Llavors
- els coeficients de l'equació són constants
 - els coeficients de l'equació són continus en $\mathbb{R}$
 - totes les solucions són creixents
 - les solucions satisfan $y(0) = 1$
17. L'ordre mínim de l'equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants que admet com a solució particular la funció $12t^2 + 9t^3 \sin(t) - te^{13t}$ és
- 9
 - 13
 - 12
 - Cap de les altres
18. Siguin $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tals que $f_1(x) = \{x^3 \text{ si } x \in [-1, 0], 0 \text{ altrament}\}$, $f_2(x) = \{0 \text{ si } x \in [-1, 0], x^3 \text{ altrament}\}$. Considerem l'equació $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, amb $a(x), b(x)$ funcions contínues. Llavors:
- f_1, f_2 poden ser sistema fonamental de solucions per a certes $a(x), b(x)$
 - f_1, f_2 no poden ser sistema fonamental de solucions perquè són linealment dependents
 - f_1, f_2 no poden ser sistema fonamental de solucions perquè no són de classe $C^2([-1, 1])$
 - f_1, f_2 no poden ser sistema fonamental de solucions perquè $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$, per a tot $x \in [-1, 1]$
19. L'equació $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = xe^x$, amb el canvi $y = xv$, es transforma en:
- $v'' + v = e^x$
 - $v'' - v = e^x$
 - $v'' + v = xe^x$
 - Cap de les altres
20. Donada l'equació $y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$, quina de les següents respostes és *FALSA* ?
- Si $f(t) + tg(t) = 0$, aleshores $y(t) = t$ és solució
 - Si $f(t) + g(t) = -1$, aleshores $y(t) = e^t$ és solució
 - Si $f(t) - g(t) = 1$, aleshores $y(t) = e^{-t}$ és solució
 - Si $f(t) - tg(t) = 0$, aleshores $y(t) = -t$ és solució
21. Si fem el canvi de variable $s = \tan t$ dins l'equació $y'' - 2 \tan t y' + (1 + \tan^2 t)^2 y = 0$, s'obté l'equació diferencial en la nova variable s :
- $y'' + y' + y = 0$
 - $y'' - 2sy' + (1 + s^2)^2 y = 0$
 - $y'' + y = 0$
 - $y'' - 2y' + y = 0$
22. Considereu dues solucions u_1, u_2 de l'equació diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, amb p i q contínues en $\mathbb{R}$. Aleshores és *FALS* que:
- Si $\{u_1, u_2\}$ són linealment dependents en $\mathbb{R}$, llavors existeix un t_0 tal que $W[u_1, u_2](t_0) = 0$
 - Si $W[u_1, u_2]$ s'anul·la en algun punt llavors s'anul·la en tot punt
 - Si $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ per a cert t_0 , llavors les dues solucions coincideixen
 - Si $\{u_1, u_2\}$ són linealment independents llavors l'equació diferencial $W[u_1, u_2, y] = 0$ té les mateixes solucions que l'equació original
23. L'equació diferencial $y'' + y = \cos t + t$ admet solucions del tipus següent, per a certs valors de les constants:
- $A \cos t + Bt \cos t + a + bt$
 - $At \cos t + Bt \sin t + a$
 - $A \cos t + Bt \cos t + bt$
 - $A \cos t + Bt \sin t + bt$
24. Donada l'equació $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, quina de les afirmacions següents és *FALSA* ?
- Existeix alguna solució de la forma x^n , $n > 0$
 - Existeix alguna solució constant
 - Existeix alguna solució de la forma x^n , $n < 0$
 - Existeixen dues solucions que satisfan $y(0) = y'(0) = 0$
25. L'equació lineal homogènia amb coeficients constants d'ordre més petit que admet com a solució $x \sin x$ és:
- $y^{iv} + 2y'' + y = 0$
 - $y'' + 2y' + y = 0$
 - $y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$
 - $y^{iv} + 2y''' + y'' = 0$
26. Considereu l'equació lineal homogènia
- $$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$
- La funció $y_1(t) = t$ n'és solució. Llavors és *FALS* que:
- La solució $y(t)$ tal que $y(1) = 3$ i $y'(1) = 5$ verifica que $y(2) = 0$
 - Tota solució $y(t)$ verifica que $y(0) = 0$
 - La solució $y(t)$ tal que $y(1) = 2$ i $y'(1) = 3$ verifica que $y(2) = 6$
 - La solució $y(t)$ tal que $y(1) = 0$ i $y'(1) = -1$ verifica que $y(2) = -2$
27. Sigui $y''' + 4y' = t^2 + t \cos 2t$. Aquesta e.d.o. admet una solució particular del tipus:
- $at^3 + (c_1 t + c_2 t^2)(A \cos 2t + B \sin 2t)$
 - $at^2 + bt + (At + Bt^2) \cos 2t + (Ct + Dt^2) \sin 2t$
 - $at^3 + bt^2 + ct + (At + Bt^2) \cos 2t + (Ct + Dt^2) \sin 2t$
 - $at^3 + bt^2 + ct + t(A \cos 2t + B \sin 2t)$
28. Donades $u_1(t) = e^{\alpha t}$ i $u_2(t) = e^{\beta t}$ amb $\alpha \neq \beta$, és *FALS* que:
- $\{u_1(t), u_2(t)\}$ és un sistema fonamental de $W[u_1(t), u_2(t), y] = 0$
 - $\{u_1(t), u_2(t)\}$ és un sistema fonamental de $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$

- (c) qualsevol equació que tingui $u_1(t)$ i $u_2(t)$ com a solucions ha de ser de coeficients constants
- (d) $u_1(t)$ i $u_2(t)$ són solucions de $y''' - (\alpha + \beta)y'' + \alpha\beta y' = 0$
29. Donada l'equació $yy'' - y'(1 + y') = 0$, és *FALS* que

- (a) $y = ae^{\frac{t}{b}} + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$
- (b) admet alguna solució polinòmica de grau u
- (c) $\ln\left|\frac{y-a}{b}\right| = \frac{t}{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$
- (d) admet alguna solució constant no nul·la

30. Sigui l'equació $y^{iv} + \frac{1}{2}y''' + 4y'' + 2y' = 0$. Les arrels del seu polinomi característic verifiquen:

- (a) te 3 arrels amb part real negativa
- (b) existeix alguna arrel amb real positiva
- (c) te dues arrels amb part real negativa
- (d) te 3 arrels amb part real nul·la

31. Sabent que

$$ty'' - y' + \frac{3}{4t}y = 0$$

admet solucions de la forma t^k , $k \in \mathbb{R}$, si $y(1) = 0$ i $y'(1) = 1$, llavors $y(2)$ val:

- (a) 0
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) $2\sqrt{2}$
- (d) $3\sqrt{2}$

32. Si te^{2t} i e^{-t} són solucions de l'equació diferencial amb coeficients constants $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, llavors a_0 val:

- (a) -4
- (b) 4
- (c) -2
- (d) No es pot determinar

33. Les solucions de l'equació diferencial

$$y'' - yy' = 0$$

verifiquen, definint $p = y'$,

- (a) $p = y^2 + C$
- (b) $p = 0$
- (c) $p(\frac{dp}{dy} - y) = 0$
- (d) $\frac{dp}{dy} + y = 0$

3 Sistemes d'equacions diferencials

1. Sigui Φ una matriu fonamental d'un sistema lineal homogeni de primer ordre definit a $\mathbb{R}^n$, i sigui també $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Aleshores,

- (a) si $\det(M) \neq 0$, $M \cdot \Phi$ és una matriu fonamental
- (b) $\Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

- (c) si $\det(M) \neq 0$, $\Phi \cdot M^{-1}$ és una matriu fonamental
- (d) si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} \cdot \Phi \cdot M$ és una matriu fonamental

2. Sigui el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Siguin $\vec{v}_1 \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, $\vec{v}_2 \in \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \setminus \text{Ker}(A - \lambda I)$. Aleshores és *FALS* que:

- (a) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}(A - \lambda I)\vec{v}_2$ és solució
- (b) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}_2$ és solució
- (c) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_2 + t(A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució
- (d) $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_1 + (A - \lambda I)\vec{v}_2]$ és solució

3. Supposeu que

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Llavors

- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Pel sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$ és *FALS* que:

- (a) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t + \vec{v}_2)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
- (b) existeix una solució del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$
- (c) existeixen solucions del tipus $\vec{v}_1 e^{4t}$, $\vec{v}_2 e^{4t}$ linealment independents
- (d) existeix una solució del tipus $(\vec{v}_1 t^2 + \vec{v}_2 t + \vec{v}_3)e^{4t}$ amb $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

5. Es considera el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, amb $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Siguin $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ i $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 0)$. Un sistema fonamental de solucions del sistema està format per:

- (a) $e^{-t}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 + t\mathbf{v}_2$
- (b) $e^{-t}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e^t\mathbf{v}_3$
- (c) $e^{-t}\mathbf{v}_1, t\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
- (d) $e^{-t}\mathbf{v}_1, e^t\mathbf{v}_2, te^t\mathbf{v}_3$

6. La solució del problema $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y$, $Y(0) = (2, 0)$, compleix:

- (a) $Y(1/2) = (1 - e^{-1}, 1 + e^{-1})$
- (b) $Y(2) = (-2 + e^{-2}, -2 - e^{-2})$
- (c) $Y(3) = (1 + e^{-6}, 1 - e^{-6})$
- (d) $Y(1) = (1 - e^{-2}, 1 + e^{-2})$

7. La matriu $M(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental del sistema lineal homogeni $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Llavors és cert que:

- (a) La matriu $A(t)$ és amb coeficients constants

- (b) Els coeficients de la matriu $A(t)$ tenen discontinuïtats per a $t = k\pi$, amb k enter
- (c) La solució que val $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $t = \pi/2$ és $\begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$
- (d) No hi ha cap solució que valgui $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $t = \pi/2$
8. Quina és la matriu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associada al sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ que té per solucions $\vec{x}_1(t) = \vec{v} \cos t$ i $\vec{x}_2(t) = \vec{w} \sin t$, amb $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents?
- (a) No existeix
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. Sigui $M(t)$ una matriu fonamental del sistema $x' = A(t)x$, on $A(t)$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients continus a $\mathbb{R}$. Llavors és *FALS* que
- (a) si C és una matriu $n \times n$, constant, $M(t)C$ és matriu fonamental
- (b) tota matriu fonamental del sistema és de la forma $M(t)C$, on C és una matriu constant $n \times n$
- (c) tota solució del sistema és de la forma $M(t)\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$
- (d) $\det M(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$
10. Si $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ és solució del sistema $x' = Ax$, llavors també és solució
- (a) $e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (b) $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (c) $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (d) $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$
11. El sistema $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ te per matriu fonamental de solucions, en un cert interval,
- $$X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 + 1 \end{pmatrix}$$
- Llavors es verifica:
- (a) $A(t)$ és matriu constant
- (b) Si $t \neq 0$, $\det A(t) \neq 0$
- (c) $A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (d) $A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1-t^2 & t^2 \\ 1-t^2 & t^2 \end{pmatrix}$
12. Quantes solucions l.i. del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, satisfan $\vec{x}(1) = k\vec{x}(0)$, $k \in \mathbb{R}$?
- (a) Tantes com vectors propis l.i. associats a valors propis reals d' A
- (b) Tantes com valors propis reals d' A comptats amb la seva multiplicitat
- (c) 1
- (d) Cap
13. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Llavors:
- (a) $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(3) & -e \sin(3) \\ e \sin(3) & -e \cos(3) \end{pmatrix}$
- (b) $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(3) & -e \sin(3) \\ e \sin(3) & e \cos(3) \end{pmatrix}$
- (c) $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(1) & -e \sin(1) \\ e \sin(1) & -e \cos(1) \end{pmatrix}$
- (d) $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(1) & -e \sin(1) \\ e \sin(1) & e \cos(1) \end{pmatrix}$
14. Sabem que $\vec{x}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ és solució de $\vec{x}' = A\vec{x}$. Aleshores,
- (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és vector propi de A
- (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $e^t \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és matriu fonamental de solucions
- (d) A té 2 valors propis diferents
15. Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Si $\vec{x}_1 = e^{-t}(\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{v}_3)$ i $\vec{x}_2 = e^{-t}\vec{v}_4$ són solucions del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, llavors quina de les següents **NO** n'és solució?
- (a) $e^{-t}(\vec{v}_3 - \vec{v}_4)$
- (b) $e^{-t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_3)$
- (c) $e^{-t}(\vec{v}_1 + t\vec{v}_2)$
- (d) $e^{-t}\vec{v}_3$
16. Sigui $V(t)$ una matriu fonamental del sistema lineal homogeni $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$. Suposem que $V(t+s) = V(t)V(s)$, per a qualsevol s i t de $\mathbb{R}$. Llavors és *FALS* que
- (a) $V(t) = V(t)^{-1}$ per a tot t
- (b) la matriu $A(t)$ és constant
- (c) $V(0) = Id$
- (d) $V(t)V(s) = V(s)V(t)$
17. Sabent que
- $$x(t) = \left(e^t \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2} \right), e^t \left(2t + \frac{t^2}{2} \right), e^t \left(t + \frac{t^2}{2} \right) \right)$$
- és solució d'un sistema lineal a coeficients constants en dimensió 3, una altra solució és
- (a) $(e^t, 0, 0)$
- (b) $(e^t(1+2t), e^t(1+2t), e^t(1+t))$

- (c) (e^t, e^t, e^t)
 (d) $(2e^t, 2e^t, e^t)$
18. Considerem el sistema $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, on $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ té coeficients continus a $\mathbb{R}$. Si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions i $W(t) = \det X(t)$ llavors
- (a) $W'(t) = (a(t) + d(t))W(t)$
 (b) $W'(t) = (b(t) + c(t))W(t)$
 (c) $W'(t) = \det A(t)W(t)$
 (d) $\det X'(t) = (a(t) + d(t))W(t)$
19. Sigui A una matriu $n \times n$, constant. Considereu el sistema $\dot{\vec{x}} = \frac{1}{t}A\vec{x}$. Llavors és *FALS* que
- (a) amb el canvi $t = e^s$ es transforma en $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.
 (b) si λ és valor propi de A i $\vec{v} \in \ker(A - \lambda \text{Id})$, $t^\lambda \vec{v}$ és solució del sistema
 (c) si $t^\lambda \vec{v}$ és solució del sistema, λ és valor propi de A .
 (d) amb el canvi $t = e^{-s}$ es transforma en $\dot{\vec{x}} = -A\vec{x}$.
20. La solució del p.v.i. $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, -3)$, val, en $t = 1$,
- (a) $(e^2 + e^7, e^2 - 4e^7)$
 (b) $(e^2 - 4e^7, e^2 + e^7)$
 (c) $(e^2 + e^7, -4e^2 + e^7)$
 (d) $(4e^2 - e^7, e^2 + e^7)$
21. $V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cos t + \beta \sin t & \sin t \\ 0 & \beta \cos t - \alpha \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental d'un sistema a coeficients constants si
- (a) $\alpha = 1, \beta = 0$
 (b) $\alpha = 0, \beta = 1$
 (c) $\alpha = 0, \beta = -1$
 (d) $\beta \alpha, \beta$
22. La solució del problema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ compleix que $\vec{x}(1)$ val:
- (a) $\begin{pmatrix} 3e + e^2 \\ e^2 \\ e \end{pmatrix}$
 (b) $\begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}$
 (c) $\begin{pmatrix} 3e^2 \\ e^2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 (d) $\begin{pmatrix} 2e + e^2 \\ e^2 \\ e \end{pmatrix}$
23. Sigui $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ una solució del sistema lineal $\vec{x}' = A\vec{x}$. Llavors és *FALS* que:
- (a) A és constant i $\det A = 0$
 (b) $e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ és solució
 (c) $e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és solució
 (d) A és constant i 2 és valor propi doble
24. Sigui el sistema lineal amb coeficients constants $\vec{x}' = A\vec{x}$. Aleshores és *FALS*:
- (a) $e^{At}\vec{v}$ és solució només quan $\vec{v}$ és un vector propi de la matriu A
 (b) e^{At} és una matriu fonamental del sistema d'equacions
 (c) $e^{At}M$ és una matriu fonamental si i només si M és invertible
 (d) si $N(t)$ és una matriu fonamental llavors $N^{-1}(t)e^{At}$ és sempre una matriu que no depèn de t i de determinant no nul
25. Si $\vec{x}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 t + \vec{v}_2 t^2$ és una solució no nul·la del sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, amb $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, aleshores és *FALS* que:
- (a) Si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ llavors $\vec{x}, \vec{x}'$ i $\vec{x}''$ són solucions linealment independents
 (b) Si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ llavors $\vec{x}$ i $\vec{x}'$ són solucions linealment independents
 (c) Si $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ llavors $\vec{x}'$ i $\vec{x}''$ són solucions linealment independents
 (d) Si $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ llavors $\vec{x}, \vec{x}'$ i $\vec{x}''$ són solucions linealment independents
26. Sabent que $e^{\frac{1}{2}At^2}$ és una matriu fonamental del sistema $\vec{x}' = tA\vec{x}$, i $\lambda \neq 0$ és un valor propi real doble de la matriu $A \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, quina *NO* és solució del sistema?
- (a) $e^{\frac{1}{2}\lambda t^2}(I + \frac{1}{2}t^2(A - \lambda I))\vec{v}$, amb $\vec{v} \in \ker(A - \lambda I)^2$
 (b) $e^{\frac{1}{2}\lambda t^2}\vec{v}$, amb $\vec{v} \in \ker(A - \lambda I)$
 (c) $e^{\frac{1}{2}At^2}\vec{v}$, amb $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$
 (d) $e^{\frac{1}{2}\lambda t^2}(I + t^2(A - \lambda I))\vec{v}$, amb $\vec{v} \in \ker(A - \frac{\lambda}{2}I)^2$
27. La solució $x(t)$ del problema de valor inicial $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ compleix que:
- (a) $x(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix}$
 (b) $x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 (c) $x(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (d) $x(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$
28. Sigui $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Supposeu que $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$. Llavors

- (a) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$
 (b) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$
 (c) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$
 (d) $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} + te^{2t} \end{pmatrix}$

29. Siguen $V(t)$ y $W(t)$ matrius fonamentals del sistema amb coeficients constants $\vec{x}' = A\vec{x}$.

- (a) Si existeixen vectors tals que $V(t)\vec{c}_1 = W(t)\vec{c}_2$, llavors $V(t) = W(t)$
 (b) $V(t) + W(t)$ és una altra matriu fonamental
 (c) $V(t) = MW(t)$ sent $\det(M) \neq 0$
 (d) Si per a cert t_0 , $V(t_0) = W(t_0)$, llavors $V(t) = W(t)$

30. Sabent que $e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 3t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$ és solució d'un sistema amb coeficients constants, llavors també n'és solució:

- (a) $\begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$
 (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$
 (c) $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 e^{2t}$
 (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

31. El sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, NO admet com a matriu fonamental de solucions:

- (a) $e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt & \frac{1}{2}b^2t^2 \\ 0 & 1 & bt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (b) $e^{At} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (c) $e^{at} \begin{pmatrix} 1 & bt & \frac{1}{2}b^2t^2 \\ 0 & b & b^2t \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$
 (d) $e^{at} \left(I + (A - aI)t + \frac{1}{2}(A - aI)^2t^2 \right)$

32. Sigui $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ i $e^{\lambda t}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1t + \vec{v}_2t^2)$ una solució del sistema, amb $\vec{v}_2$ no nul. Es *FALS* que:

- (a) $e^{\lambda t}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1t)$ sigui solució
 (b) $e^{\lambda t}\vec{v}_2$ sigui solució
 (c) $e^{\lambda t}(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2t)$ sigui solució
 (d) $\vec{v}_2$ sigui vector propi

33. Sigui $V(t)$ matriu fonamental del sistema d'equacions diferencials amb coeficients constants $X' = AX$. Si $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ llavors es verifica que:

- (a) $W(t) = V(t)C$ és una altra matriu fonamental
 (b) $W(t) = CV(t)$ és una altra matriu fonamental
 (c) $V(t)$ és única perquè es verifica el teorema d'existència i unicitat
 (d) $W(t) = V(t)C$ satisfà el sistema

34. La solució del problema $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica que $\vec{x}(-1)$ val:

- (a) $\begin{pmatrix} 3/e \\ 1/e \end{pmatrix}$
 (b) $\begin{pmatrix} 1/e \\ 1/e \end{pmatrix}$
 (c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/e \end{pmatrix}$
 (d) $\begin{pmatrix} -1/e \\ 1/e \end{pmatrix}$

4 Estudi qualitatiu

1. Considerem el sistema $\vec{x}' = f(\vec{x})$. Siguen $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Aleshores és *FALS* que:

- (a) si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0 , $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable
 (b) si $\vec{x}_0$ és inestable, $p(\lambda)$ no té totes les arrels amb part real < 0
 (c) si $p(\lambda)$ té alguna arrel amb part real 0, $\vec{x}_0$ no pot ser asimptòticament estable
 (d) si totes les arrels de $p(\lambda)$ tenen part real ≤ 0 , $\vec{x}_0$ pot ser inestable

2. Sigui el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y), \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + \alpha(y - 1) \\ 1 + 2xy - y^2 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. A partir de l'estudi dels valors propis del jacobià de F calculat en el punt d'equilibri (p.e.) corresponent podem afirmar que:

- (a) si $\alpha = 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. inestable
 (b) si $\alpha > 0$, aleshores no podem decidir sobre l'estabilitat del p.e. $(0, 1)$
 (c) si $\alpha < 0$, aleshores $(0, 1)$ és un p.e. asimptòticament estable
 (d) si $\alpha > 0$, el p.e. $(0, 1)$ es estable

3. Les solucions de $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \rightarrow +\infty$ si i només si:

- (a) $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$
 (b) $a + d > 0$ i $ad - bc > 0$
 (c) $a + d < 0$ i $ad - bc < 0$
 (d) $a + d > 0$ i $ad - bc < 0$

4. Considereu el sistema $\dot{x} = A(t)x$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Llavors es compleix que

- (a) totes les seves solucions són inestables

- (b) totes les seves solucions són estables però no asimptòticament estables
- (c) totes les seves solucions són asimptòticament estables
- (d) té solucions estables i inestables

5. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$

- (a) No té cap punt d'equilibri
- (b) Té un sol punt d'equilibri, que és estable
- (c) Té més d'un punt d'equilibri
- (d) Té un sol punt d'equilibri, que és inestable

6. Sigui el sistema

$$\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$$

Es pot afirmar que:

- (a) el sistema linealitzat al punt $(0, 1)$ té òrbites paral·leles a l'eix OY
- (b) el sistema linealitzat al punt $(0, 0)$ és del tipus punt de sella
- (c) quatre de les òrbites són semirectes
- (d) té un punt d'equilibri aïllat a l'origen, es a dir, hi ha un entorn de l'origen en el que l'únic punt d'equilibri és l'origen

7. Sigui $\mathbf{x}_c$ un punt d'equilibri del sistema de quatre equacions diferencials $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, i sigui A la matriu jacobiana de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_c$. És cert que:

- (a) Si els valors propis de A són $-1 + \sqrt{2}i$ i $-1 - \sqrt{2}i$, amb multiplicitat 2, llavors la solució d'equilibri és estable
- (b) Si 0 és valor propi de A , llavors la solució d'equilibri és inestable
- (c) Si els valors propis de A són $-3, -2, i, -i$, simples, llavors la solució d'equilibri és estable
- (d) Si A és diagonalitzable llavors la solució d'equilibri és estable

8. El punt d'equilibri del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ és:

- (a) Un coll (o punt de sella)
- (b) Un focus inestable
- (c) Un centre
- (d) Un node inestable

9. Què es pot afirmar sobre el sistema $\begin{cases} x' = x - x^2y \\ y' = y - xy^2 \end{cases}$

- (a) Té infinits punts d'equilibri asimptòticament estables
- (b) $(0, 0)$ és un punt d'equilibri estable
- (c) La recta $y = -5x$ conté tres òrbites
- (d) La recta $y = 5x$ conté tres punts d'equilibri: un d'estable i dos d'inestables

10. Considereu l'equació $x' = f(x)$, on $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció estrictament creixent, de classe C^1 i tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Observeu que l'equació té un únic punt d'equilibri. Llavors és cert que:

- (a) El punt d'equilibri és estable
- (b) Hi ha una solució no constant que tendeix al punt d'equilibri quan $t \rightarrow +\infty$
- (c) Hi ha solucions que tendeixen al punt d'equilibri quan $t \rightarrow -\infty$
- (d) La estabilitat del punt d'equilibri depèn del valor de f' en el punt d'equilibri

11. Com són les solucions del sistema $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$

- (a) Inestables
- (b) L'estabilitat depèn de les condicions inicials
- (c) Periòdiques
- (d) Asimptòticament estables

12. Considerem el sistema lineal $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. El punt d'equilibri $(0, 0)$ és

- (a) un focus per algun valor de a
- (b) estable $\iff a \neq 0$
- (c) un node quan $a \neq 0$
- (d) estable $\iff a \leq 0$

13. Considereu el sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2 \end{cases}$

És *FALS* que

- (a) $(0, 0)$ és un punt d'equilibri estable però no asimptòticament estable
- (b) el sistema té dos punts d'equilibri, un d'estable i un d'inestable
- (c) l'òrbita que passa pel punt $(0, 1/\sqrt{3})$ tendeix a $(1, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (d) el sistema no té òrbites periòdiques

14. Considerem el sistema lineal no homogeni

$$\begin{cases} x' - y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$$

Llavors les solucions són

- (a) periòdiques i estables
- (b) periòdiques i inestables
- (c) no periòdiques i estables
- (d) no periòdiques i inestables

15. Les solucions de l'equació

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + ay = 0$$

són:

- (a) Asimptòticament estables si $a \in [0, 1]$ i inestables a la resta.
- (b) Asimptòticament estables si $a \in (0, 1)$, estables si $a = 0$ i inestables a la resta.
- (c) Asimptòticament estables si $a \in (0, 1)$, estables si $a = 1$ i inestables a la resta.
- (d) Asimptòticament estables si $a \in (0, 1)$, estables si $a = 0$ o $a = 1$ i inestables a la resta.
16. El sistema $\begin{cases} x' = 1 + xy \\ y' = x + y^3 \end{cases}$ té:
- (a) Dos punts d'equilibri estables
- (b) Un punt d'equilibri estable i un d'inestable
- (c) Dos punts d'equilibri inestables
- (d) Un únic punt d'equilibri, que és inestable
17. Considereu l'equació diferencial $y' = g(x)y$, on $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua. Llavors és *FALS* que
- (a) per a tot parell $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, l'equació té una única solució $y(x)$ tal que $y(x_0) = y_0$
- (b) si $\int_0^\infty g(x) dx = -\infty$, llavors totes les solucions són asimptòticament estables
- (c) si $\int_0^\infty g(x) dx = +\infty$, llavors totes les solucions són inestables
- (d) si les solucions són estables, llavors necessàriament $g(x) < 0$ per a tot x
18. Sigui una equació lineal homogènia tal que el seu polinomi característic presenta totes les arrels amb part real negativa excepte una, que és $\lambda = 0$. Aleshores,
- (a) Les solucions són asimptòticament estables
- (b) Les solucions són estables
- (c) Si 0 és doble, les solucions són inestables
- (d) Si 0 és simple, les solucions són inestables
19. Considerem el sistema $\begin{cases} x' = a^2y + \cos at \\ y' = -\epsilon^2x + b \sin at \end{cases}$ amb $a, b \neq 0$. En quin dels següents casos **NO** existiran solucions periòdiques? (Indicació: transformeu-ho en una equació de segon ordre).
- (a) $\epsilon^2 = 1, ab \neq 1$
- (b) $\epsilon^2 = 1, ab = 1$
- (c) $\epsilon^2 \neq 1, ab = 1$
- (d) $\epsilon^2 \neq 1, ab \neq 1$
20. Sigui el sistema $x' = -x + xy$, $y' = y - xy$. A partir de l'estudi de l'aproximació lineal del sistema al voltant dels seus punts d'equilibri, podem afirmar que:
- (a) Té un punt d'equilibri inestable
- (b) Té un punt d'equilibri estable
- (c) Té un punt d'equilibri asimptòticament estable
- (d) Té una recta de punts d'equilibri
21. Sigui $(x(t), y(t))$ una solució del sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{e^x}{2} \end{cases}$. Del retrat de fases es pot deduir que és *FALS* que
- (a) $y(t)$ no canvia mai de signe
- (b) si $(x(0), y(0)) = (0, 1)$, llavors $y(t) \rightarrow 0$ quan $t \rightarrow -\infty$
- (c) si $(x(0), y(0)) = (0, -\frac{1}{2})$, llavors $y(t) \rightarrow +\infty$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (d) $y(t)$ és sempre creixent
22. Considerem el sistema lineal $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. El punt d'equilibri $(0, 0, 0)$ és asimptòticament estable si i només si:
- (a) $a < 0$
- (b) $a > 0$
- (c) $a > 1$
- (d) $a < 1$
23. La solució del p.v.i.
- $$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2 \cos x \\ y(0) = a, y'(0) = b \end{cases}$$
- és una funció periòdica
- (a) per a tot $a, b \in \mathbb{R}$,
- (b) només si $a = 0$ i $b = 1$
- (c) només si $a = 1$ i $b = 0$
- (d) cap de les altres
24. Considerem el sistema autònom que en coordenades polars està expressat per
- $$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)(r^2 - 9), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$
- Aleshores,
- (a) hi ha un punt d'equilibri estable
- (b) $\{r = 3\}$ és una òrbita periòdica estable
- (c) $\{r = 1\}$ és una òrbita periòdica estable
- (d) hi ha infinits punts d'equilibri
25. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = y(x^2 - y^2) \\ y' = -x(x^2 - y^2) \end{cases}$. Podem afirmar que
- (a) el punt d'equilibri $(0, 0)$ és estable pero no asimptòticament estable
- (b) el punt d'equilibri $(1, 1)$ és estable
- (c) el punt d'equilibri $(-1, 1)$ és inestable
- (d) tots els punts d'equilibri sobre la recta $y = x$ tenen el mateix tipus d'estabilitat
26. Les solucions de $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y' + ky = 0$ són
- (a) asimptòticament estables per a $k \in [0, 2]$ i inestables per a la resta
- (b) asimptòticament estables per a $k \in (0, 2)$, estables per a $k = 2$ i inestables per a la resta
- (c) asimptòticament estables per a $k \in (0, 2)$, estables per a $k = 0$ i inestables per a la resta
- (d) asimptòticament estables per a $k \in (0, 2)$, estables per a $k = 2$ i $k = 0$ i inestables per a la resta
27. Considereu el sistema lineal amb coeficients constants $\vec{x}' = A\vec{x}$. Llavors

- (a) si $\vec{x}(t) = \vec{0}$ és estable, tots els valors propis de A tenen part real negativa
- (b) si el sistema té una solució inestable, totes les solucions són inestables
- (c) si els valors propis de A tenen part real menor o igual que 0, les solucions són estables
- (d) si els valors propis de A tenen part real més gran o igual que 0, les solucions són inestables

28. Considereu el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Llavors es compleix que

- (a) hi ha solucions estables i inestables
 - (b) totes les solucions són inestables
 - (c) l'origen és estable però no asimptòticament estable
 - (d) totes les solucions són estables
29. Sigui $\vec{x}' = A\vec{x}$ amb $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda$ valor propi, $Re(\lambda) \leq 0$ i $\exists \lambda$ amb $Re(\lambda) = 0$. Els punts d'equilibri són:

- (a) Estables no asimptòticament
- (b) Inestables
- (c) Estables si tots els valors propis són simples
- (d) Inestables si hi ha un valor propi múltiple de part real nul·la

30. Considerem $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ un sistema no lineal autònom. Sigui $\vec{x}_0$ un punt d'equilibri aïllat i $\vec{0}$ el corresponent punt d'equilibri del sistema linealitzat.

- (a) Si $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable, $\vec{0}$ també ho és
- (b) Si $\vec{x}_0$ és inestable, $\vec{0}$ també ho és
- (c) Si $\vec{0}$ és asimptòticament estable, $\vec{x}_0$ també ho és
- (d) Si $\vec{0}$ és estable, $\vec{x}_0$ també ho és

31. Les solucions de $y''' + ay'' + by' + y = 0$ són asimptòticament estables si i només si

- (a) $b > \frac{1}{a}$
- (b) $ab > 0$
- (c) $a > 0$ i $a > \frac{1}{b}$
- (d) $ab > 1$ i els dos paràmetres amb el mateix signe

32. Suposem que la part homogènia de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = \cos(2x)$ admet la solució $\sin(2x)$. Aleshores les solucions són:

- (a) estables si qualsevol constant és solució de l'homogènia
- (b) periòdiques si qualsevol constant és solució de l'homogènia
- (c) inestables si $p(x) = 0$
- (d) periòdiques si $q(x) = 0$

33. Les solucions del sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\alpha t}$$

són estables si

- (a) $\alpha = 0, \beta < 0$
- (b) $\alpha < 0, \beta = 0$
- (c) $\alpha\beta > 0$
- (d) $\alpha\beta < 0$

34. El punt d'equilibri del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ és:

- (a) Cap de les altres
- (b) Un focus
- (c) Un centre
- (d) Un node

35. Què es pot afirmar sobre el sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$

- (a) Té dos punts d'equilibri estables
- (b) Cap de les altres
- (c) Té dos punts d'equilibri, un d'estable i un altre d'inestable
- (d) Té dos punts d'equilibri inestables

36. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = (1 - a^2)x - y \end{cases}$ Llavors:

- (a) Les solucions sempre seran estables
- (b) Si $a = 2$ hi ha infinits punts d'equilibri estables
- (c) Si $a = -2$ les solucions són asimptòticament estables
- (d) Si $a = 0$ les òrbites són semirectes

37. Considereu el sistema $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x^2 \end{cases}$ Podem afirmar:

- (a) El sistema linealitzat al voltant del punt d'equilibri té les mateixes solucions d'equilibri que les del sistema donat
- (b) Les òrbites presenten simetria respecte de l'eix OY
- (c) L'òrbita que passa pel punt $(3, -3)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$
- (d) El punt d'equilibri és estable

38. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que existeix $M > 0$ amb $|\int_0^t f(s) ds| < M$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Llavors és *FALS* que les solucions de l'equació $y' = f(t)y$ compleixen:

- (a) són totes estables
- (b) algunes són estables i altres inestables
- (c) estan definides en tot $\mathbb{R}$
- (d) són fitades en tot $\mathbb{R}$

5 Transformada de Laplace

1. L'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{s^2 + 2s + 5}$ és:

- (a) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{t+1}\sin(2(t+1))$
- (b) $f(t) = 7te^{2t}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$
- (c) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t}\cos(2t)$

- (d) $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4} + e^t \cos(2t)$
2. La transformada de Laplace $X(s)$ de la solució del problema de valor inicial $x'' + tx = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$, satisfà:
- (a) $s^2 X(s) - sx_0 - x'_0 - X'(s) = 0$
 (b) $s^2 X(s) - sx_0 - x'_0 - \int_0^s X(\sigma) d\sigma = 0$
 (c) $s^2 X(s) - sx_0 - x'_0 + \int_0^s X(\sigma) d\sigma = 0$
 (d) $s^2 X(s) + sx_0 + x'_0 - \int_0^s X(\sigma) d\sigma = 0$
3. Sigui $h(t)$ la resposta impulsional associada a l'equació $y'' + 2y' + 2y = f(t)$. Aleshores, la solució del problema de valor inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ és:
- (a) $e^{-t} \cos t$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = y'_0 = 0$
 (b) $h(t)$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = y'_0 = 0$
 (c) $2h(t)$, en el cas $f(t) = \delta(t)$ i $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$
 (d) $2h(t) * 1$, en el cas $f(t) = 1$ i $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$
4. Una d'aquestes transformades de Laplace *NO* és correcta:
- (a) $\mathcal{L}((t+1)^2) = e^s/s^2$
 (b) $\mathcal{L}(te^{3t}) = 1/(s-3)^2$
 (c) $\mathcal{L}(\sin t) = 1/(s^2+1)$
 (d) $\mathcal{L}(e^{t-2}u(t-2)) = e^{-2s}/(s-1)$
5. La solució del problema de valor inicial $y'' + y = u(t-1)$, $y(0) = 0 = y'(0)$, on $u(t)$ és la funció de Heaviside, és
- (a) $y(t) = u(t-1)(1 - \cos(t-1))$
 (b) $y(t) = u(t-1)(1 - \sin(t-1))$
 (c) $y(t) = u(t)(1 - \cos(t-1))$
 (d) $y(t) = u(t)(1 - \sin(t-1))$
6. La solució del problema $y' - \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t) + \delta(t-1)$, $y(0) = 1$, té com a transformada de Laplace
- (a) $\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1}e^{-s}$
 (b) $\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1}e^s$
 (c) $\frac{s}{s^2-1}(e^{-s} + 1)$
 (d) $\frac{s}{s^2-1}(e^s + 1)$
7. Si una funció $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$, amb $\int_0^\infty f(t) dt = 1$ i $\int_0^\infty tf(t) dt = a < +\infty$, se satisfà:
- (a) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = -a$
 (b) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = 0$
 (c) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = \infty$
 (d) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = -f(0)$
8. La funció que té per transformada de Laplace $e^{-s} \frac{1}{s^2} + e^{-2s} \frac{1}{s^2+4}$ és ($u(t)$ és la funció de Heaviside)
- (a) $u(t-1)(t-1) + \frac{1}{2}u(t-2)\sin(2(t-2))$
 (b) $u(t-1)(t-1) + u(t-2)\sin(2(t-2))$
- (c) $u(t-1)t + \frac{1}{2}u(t-2)\sin(t)$
 (d) $u(t-1)(t-1) + \frac{1}{2}u(t-2)\sin(2t-2)$
9. El valor de $\int_0^a \sin(\frac{a-x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) dx$ és:
- (a) $\frac{a}{2} \cos(\frac{a}{2})$
 (b) $\frac{a}{2} \sin(\frac{a}{2})$
 (c) $2a \cos(2a)$
 (d) $2a \sin(2a)$
10. Usant la transformada de Laplace, digueu quina de les següents integrals és zero:
- (a) $\int_0^\infty e^{-\pi t} \sin t dt$
 (b) $\int_0^\infty e^{-\pi t} t \cos \pi t dt$
 (c) $\int_0^\infty e^{-\pi t} t \sin \pi t dt$
 (d) $\int_0^\infty e^{-t} t \cos \pi t dt$
11. Sigui $F(s) = L(f)(t)$. Aleshores, la transformada de Laplace de la funció $u(t-a) \int_0^{t-a} f(\tau) d\tau$ (on u és la funció de Heaviside) val:
- (a) $\frac{e^{as}}{s} F(s-a)$
 (b) $\frac{e^{-as}}{s} F(s+a)$
 (c) $\frac{e^{as}}{s} F(s)$
 (d) $\frac{e^{-as}}{s} F(s)$
12. La funció que té per transformada de Laplace $\frac{2}{s^2-2s-3}$ és
- (a) $\frac{e^{2t}}{2} \sinh(t)$
 (b) $\frac{e^t}{2} \sinh(2t)$
 (c) $e^{2t} \sinh(t)$
 (d) $e^t \sinh(2t)$
13. Sigui $F(s) = L[f](s)$, la transformada de Laplace de f . Aleshores, la transformada de Laplace de $te^{at}f(at)$ és:
- (a) $-\frac{1}{a} F'(\frac{s-a}{a})$
 (b) $-\frac{1}{a^2} F'(\frac{s-a}{a})$
 (c) $-\frac{1}{a} F'(\frac{s}{a} - a)$
 (d) $-\frac{1}{a^2} F'(\frac{s+a}{a})$
14. L'antitransformada de Laplace de la funció
- $$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$
- és ($u(t)$ és la funció de Heaviside)
- (a) $f(t) = \sum_{k \geq 0} u(t+kT)$
 (b) $f(t) = u(t-T)$
 (c) $f(t) = \frac{e^{sT}}{sT}$
 (d) $f(t) = \sum_{k \geq 0} u(t-kT)$
15. La solució del problema de valor inicial $\{y'' - y = 2\delta(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 0\}$ en $t = 2$ és

- (a) 0
 (b) $e - e^{-1}$
 (c) $e^{-1} - e$
 (d) 2
16. Sigui $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funció contínua tal que la seva transformada de Laplace és

$$L(f)(s) = \frac{e^{-s}}{(s+3)^3}.$$

Llavors

- (a) no hi ha cap funció contínua amb aquesta transformada
 (b) la derivada de f no és contínua en $t = 1$
 (c) f és de classe C^1 , però la segona derivada és discontinua en $t = 1$
 (d) f és de classe C^2 , però la tercera derivada és discontinua en $t = 1$
17. Denotem per $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$. Quina de les següents igualtats és *FALSA* ?
- (a) $L[(1 * f)'] = F(s)$
 (b) $L[(t * f)'] = F(s)$
 (c) $L[\cosh(t)f(t)] = \frac{1}{2}(F(s-1) + F(s+1))$
 (d) $(1 * f)(0) = f(0)$

18. La transformada de Laplace de $e^{at}f(at)$ és

- (a) $\frac{1}{a}F(\frac{s}{a} - 1)$
 (b) $aF(as)$
 (c) $\frac{1}{a}F(\frac{s}{a} - a)$
 (d) $F(s - a)$

19. Considerem la funció $y(t)$, amb transformada $Y(s)$, tal que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n), y(0) = 1$$

si H representa la funció de Heaviside, **NO** és cert:

- (a) $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^s}{e^s - 1}$
 (b) $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n) * 1$
 (c) $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t - n) * 1$
 (d) $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t - n)$
20. Sigui f amb f' admissible i amb transformada de Laplace $L[f(t)] = F(s)$. Quina de les afirmacions següents és *FALSA* ?

- (a) $L[te^{\alpha t}f(t)] = -F'(s - \alpha)$
 (b) $L[tf(at)] = -\frac{1}{a^2}F'(\frac{s}{a})$
 (c) $L[tf'(t)] = -F(s) - sF'(s) - f'(0)$
 (d) $L[\frac{d}{dt}f(at)] = \frac{s}{a}F(\frac{s}{a}) - f(0)$

21. Una d'aquestes transformades de Laplace *NO* és correcta, on H és la funció de Heaviside o de salt unitat:

- (a) $L[\cos 2t] = s/(s^2 + 4)$
 (b) $L[te^{3t}] = 1/(s - 2)^3$
 (c) $L[e^{t-1}H(t - 1)] = e^{-s}/(s - 1)$

- (d) $L[2 \sin t] = 2/(s^2 + 1)$

22. Sigui $f_k(t) = e^{\alpha t} * \dots * e^{\alpha t}$. Llavors

- (a) $f_k(t) = e^{k\alpha t}$
 (b) $f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\alpha t}$
 (c) $f_k(t) = t^k e^{\alpha t}$
 (d) $f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{(k-1)\alpha t}$

23. Si $f_n(t) = t^n$, n natural, llavors

- (a) $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m)!} t^{n+m}$
 (b) $(f_n * f_m)(t) = \frac{1}{(n+m+1)!} t^{n+m+1}$
 (c) $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m+2)!} t^{n+m+2}$
 (d) $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} t^{n+m+1}$

24. Sabent que $L\{f(3t)\} = \frac{1}{1+s^2}$

- (a) $L\{f(5t)\} = \frac{5}{3} \frac{1}{1+(5s/3)^2}$
 (b) $L\{f(5t)\} = \frac{3}{5} \frac{1}{1+(3s/5)^2}$
 (c) $L\{f(5t)\} = \frac{3}{5} \frac{1}{1+s^2}$
 (d) $L\{f(5t)\} = \frac{1}{1+(3s/5)^2}$

25. Si $F(s) = L\{f(t)\}(s)$ y $f(t)$ és solució del problema $f'' - f = t \cos(t)$ amb condicions inicials $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, llavors:

- (a) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
 (b) $F(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+1} \right)$
 (c) $F(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}$
 (d) $F(s) = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2+2} \right)$

26. La transformada de Laplace de

$$f(t) = (t^2 - 2t)e^{-t}u(t - 1)$$

on u representa la funció esglaó, és:

- (a) $\left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \right) e^{-s+1}$
 (b) $\left(\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-s-1}$
 (c) $\left(\frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{s-1} \right) e^{-s+1}$
 (d) $\left(\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-s-1}$

27. La transformada de Laplace de la funció $f(t) = 1$ si $0 < t < 1$, i $f(t) = e^{1-t}$ si $t > 1$ és:

- (a) $\frac{s+1-e^{-s}}{s(s+1)}$
 (b) $\frac{1-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s+1}$
 (c) $\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{(s+1)s}$
 (d) $\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s(s+1)} + \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$

28. Si una funció admissible $f(x)$, amb derivada admissible, te transformada de Laplace $F(s)$, i els límits següents existeixen, llavors és *FALS* que:

- (a) $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$
- (b) $\lim_{s \rightarrow 0} sF'(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} -tf(t)$
- (c) $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$
- (d) $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$

6 Problemes de contorn

1. Del problema de contorn

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

podem dir que

- (a) 0 no és autovalor
 - (b) en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ hi ha un únic autovalor
 - (c) té autovalors negatius
 - (d) totes les autofuncions són periòdiques
2. Considerem el problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$ amb $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.
- (a) Té solucions no nul·les únicament per a $\lambda = k^2$, amb k enter ≥ 0
 - (b) Existeix un valor de $\lambda < 0$ per al qual hi ha solucions no nul·les
 - (c) Té solucions no nul·les per a qualsevol $\lambda > 0$
 - (d) L'única solució és $y(t) = 0$
3. Considerem el problema de contorn $y'' - \lambda y = 0$ amb $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$. Llavors és cert que:
- (a) $\lambda_k = -4\pi^2 k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, són autovalors, i per a cada un d'ells l'espai d'autofuncions té dimensió 2
 - (b) $\lambda = 0$ és un autovalor, i el seu espai d'autofuncions té dimensió 2
 - (c) $\lambda_k = -4\pi^2 k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, són autovalors, i per a cada un d'ells l'espai d'autofuncions té dimensió 1
 - (d) $\lambda = 0$ no és autovalor
4. Considereu el problema de contorn

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0.$$

Es compleix que

- (a) només té un nombre finit d'autovalors
 - (b) els autovalors estan fitats inferiorment
 - (c) els autovalors estan fitats superiorment
 - (d) per a cada autovalor, la dimensió de l'espai d'autofuncions és 2
5. Les funcions pròpies del problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ són, amb $n > 0$,

- (a) $\cos((n - \frac{1}{2})\pi x)$
- (b) $\sin((n - \frac{1}{2})\pi x)$
- (c) $\sin((n - \frac{1}{2})x)$
- (d) $\cos((n - \frac{1}{2})x)$

6. Considerem el problema de contorn homogeni

$$\begin{cases} y'' \sin x + y' \cos x + (1 + \lambda)y = 0, & x \in (a, b) \\ y(a) + y'(a) = y(b) + y'(b) = 0 \end{cases}$$

Es compliran les condicions de Sturm-Liouville si $[a, b]$ val:

- (a) $[\pi/4, 3\pi/4]$
- (b) $[-\pi/2, \pi/2]$
- (c) Mai pot ser d'Sturm-Liouville
- (d) $a \neq b$

7. Sigui el problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$. Aleshores,

- (a) No és un problema de Sturm-Liouville
- (b) els autovalors són $\lambda_k = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, i les autofuncions $y_k(x) = \sin(kx)$
- (c) els autovalors són $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, i les autofuncions $y_k(x) = \sin(kx)$
- (d) els autovalors són $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, i les autofuncions $y_k(x) = \cos(kx)$

8. Considereu el problema de contorn

$$y'' + \lambda e^x y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0$$

Llavors és *FALS* que:

- (a) $\lambda = 0$ és autovalor
- (b) hi ha infinits autovalors positius
- (c) $\lambda_k \rightarrow +\infty$ quan $k \rightarrow +\infty$
- (d) els autovalors formen una successió ordenada en forma creixent

9. Donat $N \in \mathbb{N}$, sigui $y(t)$ la solució del problema

$$y'' + \pi^2 y = \pi \sum_{n=0}^N (-1)^n \delta(t - n), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

essent δ la delta de Dirac i H la funció de Heaviside o de salt unitat. Llavors:

- (a) $y(t) = \sum_{n=0}^N \sin(\pi t) H(t - n)$
- (b) $y(t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \sin(\pi t) H(t - n)$
- (c) $y(t) = \sum_{n=0}^N \sin(\pi(t - n)) H(t - n)$
- (d) $\lim_{N \rightarrow \infty} y(t)$ no està definit

10. Es *FALS* que pel problema de contorn

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1) \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

- (a) $\lambda = 0$ no és valor propi
- (b) existeixen valors propis que satisfan $\tan(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$
- (c) $x - 1$ és funció pròpia
- (d) si $\lambda > 0$ és valor propi, llavors $\sin(\sqrt{\lambda}x) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x)$ és funció pròpia

11. Els valors propis i vectors propis del problema de contorn $y'' - (\frac{\pi^2}{a^2} - \lambda)y = 0, y(0) = y(a) = 0$ venen donats per

- (a) $\lambda_k = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2 - 1)$ i $\phi_k(x) = \sin(\frac{\pi kx}{a})$
 (b) $\lambda_k = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2 - 2)$ i $\phi_k(x) = \cos(\frac{\pi kx}{a})$
 (c) $\lambda_k = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2 + \frac{1}{2})$ i $\phi_k(x) = \cos(\frac{\pi(2kx-a)}{2a})$
 (d) $\lambda_k = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2 + 1)$ i $\phi_k(x) = \sin(\frac{\pi kx}{a})$

12. Considereu el problema de contorn

$$y'' + (1 + \lambda e^t)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Llavors és *FALS* que:

- (a) $\lambda = 0$ és autovalor i la dimensió del seu espai d'autofuncions és 2
 (b) Si ϕ_1 i ϕ_2 són autofuncions d'autovalores diferents, llavors $\int_0^\pi e^t \phi_1(t) \phi_2(t) dt = 0$
 (c) Els autovalors estan acotats inferiorment
 (d) Els autovalors *NO* estan acotats superiorment

13. Donat el problema de contorn

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

quina resposta és *FALSA* ?

- (a) Existeixen autovalors negatius
 (b) Zero és un autovalor
 (c) Existeixen autovalors positius
 (d) Els autovalors estan acotats superiorment

14. Siguin $y_1(x), y_2(x)$ dues solucions l.i. de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tals que $y_1(0) \cdot y_2'(1) = y_2(0) \cdot y_1'(1)$. Llavors podem assegurar que el problema de contorn amb condicions de contorn $\{y(0) = 1, y'(1) = 1\}$:

- (a) Té infinites solucions
 (b) Té solució única
 (c) No té solució
 (d) Si té solució, no és única

RESPOSTES

	1	2	3	4	5	6
1	D	A	C	C	C	B
2	A	C	B	C	A	A
3	D	D	A	A	C	A
4	A	A	D	A	A	C
5	A	D	A	D	A	A
6	C	A	D	A	A	A
7	A	C	B	A	A	C
8	D	D	A	A	A	A
9	C	A	A	C	B	A
10	D	B	C	C	B	A
11	A	A	D	C	D	D
12	B	C	A	C	D	A
13	B	D	B	D	B	C
14	A	B	B	A	D	D
15	A	A	C	D	B	
16	A	D	A	C	C	
17	D	B	C	D	D	
18	D	D	A	C	A	
19	A	A	C	A	C	
20	B	D	C	A	C	
21	B	C	A	A	B	
22	B	C	A	A	B	
23	C	D	C	B	D	
24	D	D	A	C	B	
25	A	A	A	A	A	
26	D	A	D	D	B	
27	A	C	A	B	A	
28	B	C	A	B	A	
29	D	C	D	C		
30	B	D	D	C		
31	A	B	C	C		
32	A	B	A	A		
33	D	C	D	D		
34	C		D	A		
35	A			C		
36	C			B		
37				C		
38				B		