

PROBLEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS APAREGUTS A EXÀMENS PARCIAIS, I ALTRES CURIOSITATS

Recopil·lació realitzada per R. Nouayhid, amb beca de “Suport a la Docència” UPC-001167 230-728-3(2000-2001), sota la direcció de R. Cubarsi

Departament de Matemàtica Aplicada IV, UPC

TEMA 1: EQUACIONS DIFERENCIALS DE PRIMER ORDRE

1.1

Trobar la solució general de l'equació

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$$

mitjançant el canvi $z = y - x$

Indicació: Les equacions de Bernoulli es resolen mitjançant el canvi $u = z^{1-m}$ on m és la potència de la funció incògnita en l'equació diferencial $z' + p(x)z = q(x)z^m$.

1.2

Donada l'equació següent:

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right)y' = y \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

- a) Trobar la solució general.
- b) Discutir l'existència i unicitat de solucions d'aquesta equació.
- c) Trobar la solució maximal i l'interval de definició si $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1.3

Resoleu l'equació diferencial:

$$x + y^3 + 6xy^2y' = 0 \quad x > 0$$

fent un canvi de variable que la converteixi en lineal.

1.4

Resoleu :

$$y' = \frac{y}{-1 + x + y}$$

Calculeu les trajectòries ortogonals de les corbes.

1.5

Donada l'equació:

$$y' = (y + 1)^2$$

- a) Calculeu la solució maximal de l'equació que passa per (0,-2).
- b) Podem afirmar l'existència i unicitat de solució per a qualsevols condicions inicials? Justifiqueu la resposta.

1.6

Donada l'equació:

$$t^2y' = y^2$$

- a) En quins punts es compleixen les condicions del teorema d'existència i unicitat de solucions?
- b) Discutiu el problema de valors inicials en els altres casos.

1.7

Resoleu l'equació:

$$x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + y' x \cos \frac{y}{x} = 0$$

1.8

Donada l'equació lineal $y' + q(x)y = r(x)$, prova que tres solucions particulars diferents $y_1(x)$, $y_2(x)$ i $y_3(x)$ satisfan

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_2(x) - y_3(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'_1(x) - y'_3(x)}{y'_2(x) - y'_3(x)} \right) = 0$$

1.9

a) Resoleu l'equació:

$$(t+1)y' = 2y(y-1)$$

b) Estudieu l'existència i unicitat de solucions a partir de la condició inicial $y(x_0) = y_0$ segons els diferents valors de (x_0, y_0) .

TEMA 2: EQUACIONS LINEALS D'ORDRE SUPERIOR

2.1

Trobeu la solució general de l'equació

$$y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

2.2

Trobeu la solució de l'equació

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$$

que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

2.3

L'equació que regeix l'amplitud d'una molla dins d'oli amb una força cíclica $f(t)$ és:

$$x'' + 2x' + 5x = f(t)$$

on $f(t) = \sin 2t$

El sistema per $t = 0$ està parat amb una amplitud de 13/17 metres.

a) Calcular l'amplitud de la molla $\forall t$.

b) Interpretar físicament els resultats incloent-hi una representació esquemàtica.

2.4

Resoleu la següent equació diferencial sabent que $y_1(x) = x^{-1}$ n'és solució:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \quad x > 0$$

2.5

Trobar la solució del següent problema de valors inicials:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2 \sinh t \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = \frac{-13}{6} \end{cases}$$

2.6

Expliqueu com són les solucions particulars de les següents equacions no homogènies:

- a) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$
- b) $y'' - 4y' + 4y = \sin(2x) + e^{2x}$
- c) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin(x)$
- d) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$
- e) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos(2x) - x^2 e^x \sin(2x)$

2.7

a) Obteniu una equació diferencial de segon ordre equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + e^{-t} \\ y' = 4x + 3y + e^{5t} \end{cases}$$

b) Calculeu la solució general del sistema anterior usant el mètode de variació de les constants.

2.8

Sigui $y(x)$ una funció definida per a $x > 0$ tal que satisfaci:

$$2y'(x) = y(1/x) \quad \forall x > 0$$

- a) Trobeu una equació diferencial lineal homogènea de segon ordre que tingui $y(x)$ com a solució. Resoleu-la.
- b) Vegeu si les solucions de l'equació de segon ordre de l'apartat anterior verifiquen l'equació inicial.

2.9

Trobeu la solució de la següent equació diferencial $x^2y'' - xy' + y = x$, sabent que $y(1) = 1$ y $y'(1) = 1$.

2.10

Resoleu l'equació:

$$y'' - 4y = e^t - 8 + e^{2t}$$

2.11

Resoleu

$$y(y-1)y'' + (y')^2 = 0$$

2.12

Donada l'equació:

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$$

- a) Resoleu-la sabent que $y = e^x$ n'és una solució.
- b) Doneu l'equació característica de l'equació lineal, a coeficients constants,

de grau mínim, que conté com a solucions la solució general de l'apartat anterior.

2.13

Recordant que per la resolució de l'equació d'Euler

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

el canvi adequat es $x = e^t$, resoleu l'equació de tipus Euler:

$$(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$$

2.14

Sigui l'equació lineal homogènia:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

amb coeficients continus en $I \subset \mathbb{R}$. Siguin y_1 i y_2 dues solucions linealment independents en I . Demostreu:

- a) $W(y_1, y_2)(x)$ té signe constant $\forall x \in I$
- b) Si $x_1, x_2 \in I$ són dos zeros consecutius de y_2 (és a dir, $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$ i $\nexists x, x_1 < x < x_2$ tal que $y_2(x) = 0$), llavors:
 - (b1) y_1 no pot anul·lar-se en x_1 i x_2
 - (b2) y_1' no pot anul·lar-se en x_1 i x_2
 - (b3) $y_1'(x_1)$ i $y_1'(x_2)$ tenen signes oposats.
 - (b4) $y_1(x_1)$ i $y_1(x_2)$ tenen signes oposats.
- c) $y_1(x)$ s'anul·la exactament una vegada entre dos zeros consecutius de y_2 i recíprocament.

2.15

Sigui l'equació diferencial:

$$y'' - \frac{2(x+1)}{x(x+2)}y' + \frac{2}{x(x+2)}y = 0$$

- a) Indiqueu de quin tipus es tracta.
- b) Busqueu-ne una solució de la forma $y = (x + a)^n$
- c) Trobeu-ne la solució general.

2.16

Escriu una equació diferencial lineal de segon ordre que admeti com a solucions particulars $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x + e^x$ i $y_3(x) = (x + 1)e^x$. Troba'n la solució general.

2.17

Determineu la solució general de

$$(x - 1)^2 y'' - (x - 1)y' + y = 4(x - 1)^3$$

sabent que l'equació homogènia admet una solució de la forma $y = (x - 1)^n$

2.18

Resoleu l'equació :

$$t^2 y'' = -2ty' + 6y$$

2.19

Trobeu la solució de :

$$y'' + y = \frac{\sin 2t}{\cos t} + t$$

2.20

Resoleu l'equació :

$$y'' = xy'$$

(Noteu $\phi(x) = \int e^{\frac{1}{2}x^2} dx$)

2.21

Determineu com són les solucions en variar m de:

$$y'' - 2my' + 16 = 0$$

2.22

Resoleu l'equació

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

sabent que $y = e^{-x}$ és solució de l'equació homogènea associada.

2.23

Calculeu una equació diferencial lineal que tengui com a solució general:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t^2 + t, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2.24

Trobeu la solució general de l'equació diferencial

$$y'' + y' \tan x = \sin 2x.$$

Quina és la solució que passa pel punt $(0, -1)$ i que, en aquest punt, la recta tangent és paral·lela a l'eix OX?

2.25

Fent ús del canvi $s = \tan t$ resoleu l'equació

$$y'' + (4 \tan^2 t - 2 \tan t + 4)y' + 3(1 + \tan^2 t)^2 y = 0$$

TEMA 3: SISTEMES LINEALS

3.1

Donat el sistema:

$$\begin{cases} y'' = -3y + 2z' \\ z'' = -y' \end{cases}$$

- a) Transformeu-lo en un sistema d'equacions diferencials de primer ordre.
- b) Trobeu la solució general.

3.2

Resoleu el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ on A és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.3

Donat el següent sistema:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad \text{on} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sinh t \end{pmatrix}$$

- a) Resoldre el sistema homogeni i donar la solució de les diferents maneres conegudes.
- b) Trobar una solució particular i donar la solució del sistema complet.

3.4

- a) Transformeu el següent sistema en un de primer ordre:

$$\begin{cases} x'' - 2y' - 5x = 0 \\ x'' - y'' - 3x' = 0 \end{cases}$$

b) Resoleu-ho matricialment.

3.5

Resoleu el problema de valor inicial:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}(0) = (1, 0, 0, 0)$$

3.6

Trobeu la solució del sistema de equacions diferencials :

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.7

Respon a les següents preguntes, raonant les respostes.

- a) Poden ser les funcions $\{e^t, \sin t\}$ un sistema fonamental de solucions d'una e.d.o. lineal homogènia d'ordre 2?
- b) Poden ser les funcions $\{e^t, \cos t\}$ un sistema fonamental de solucions d'una e.d.o. lineal homogènia d'ordre 2 amb coeficients constants?
- c) Comprova que si $y(t)$ és solució de l'e.d.o.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$$

on les funcions $a_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ són contínues i T -periòdiques, llavors $y(t+T)$ és també solució.

- d) Sabem que una solució d'una e.d.o. lineal homogènia d'ordre 2 amb coeficients constants és $3 \cos(\pi t) + 2 \sin(\pi t)$. Calcula un sistema fonamental de solucions de l'e.d.o.

3.8

Sabem que les funcions

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} + 5e^{3t} + \sin t \\ -e^{2t} - 2e^{3t} + \cos t \end{pmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{3t} + \sin t \\ -2e^{3t} + \cos t \end{pmatrix}, \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

són solucions del sistema

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

on A és una matriu 2×2 amb coeficients constants.

a) Busca la solució del sistema tal que

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Troba A i $\vec{f}(t)$.

3.9

Donada la matriu:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t & -e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$$

a) Pot ser la matriu fonamental d'un sistema d'equacions lineal a coeficients constants? Justifiqueu la resposta.

b) Supposeu que la resposta de a) és afirmativa. Contesteu sense fer càlculs: quantes altres matrius $\Psi(t)$ hi ha que puguin ser matrius fonamentals del mateix sistema amb la condició:

$$\Psi(2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) I si $\Phi(t)$ és tal que $\Phi(0) = I$? Trobeu-ne una.

d) Doneu una fórmula que relacioni les matrius $\Psi(t)$, $\Phi(t)$.

3.10

El canvi $\mathbf{y} = M\mathbf{z}$, per $M = (m_{ij}(t))$ regular amb $m_{ij}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ transforma el sistema homogeni:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

en un altre

$$\mathbf{z}' = B\mathbf{z}.$$

Calculeu B .

3.11

Donat el sistema:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

calculeu la solució general i la particular tal que $\vec{x}(0) = (1, -1, 0)$

3.12

Resoleu el problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}(0) = (1, 1, 0, 0)$$

3.13

Resoleu el problema de valor inicial:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x}(0) = (2, -1, 0)$$

3.14

Sigui el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= -y - xz \\ y' &= -yz \\ z' &= -z^2 \end{cases}$$

amb $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Té solució única? Per què? Si existeix, quina és?.

3.15

Sigui el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= a(t)x + b(t)y \\ y'(t) &= c(t)x + a(t)y \end{cases}$$

amb coeficients continus en $(-1, 1)$.

Sabent que existeix una matriu fonamental $V(t)$ tal que $\det V(t) = t^2 - 1$, calculeu $a(t)$.

3.16

Donat el sistema

$$\begin{cases} x' &= -3x - 2y - e^t \\ y' &= 4x + 3y + 2z + 2e^t \\ z' &= z \end{cases}$$

- Trobeu-ne la solució general.
- Trobeu la solució particular que compleix:

$$x(0) = 1, y(0) = -2, z(0) = 1$$

- Calculeu la matriu e^{At} , sent A la matriu associada al sistema.

3.17

Trobeu la solució del sistema d'equacions diferencials que satisfà la condició inicial indicada:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$$

3.18

Donat el sistema d'equacions $Y' = AY$, determineu A per què la matriu

$$\begin{pmatrix} -5 \cos 2t & -5 \sin 2t & 3e^{2t} \\ -2(\cos 2t + \sin 2t) & 2(\cos 2t - \sin 2t) & 0 \\ \cos 2t & \sin 2t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

sigui una matriu fonamental de solucions del sistema.

3.19

Considerem el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y + \sin at \cos at \\ y' &= -b^2 x \end{aligned}$$

- Transforma'l en una equació de segon ordre i calcula la solució general de la homogènia.
- Dóna la solució general de l'equació completa en funció dels valors dels paràmetres a i b , suposadament no nuls.
- Resolent el sistema homogeni vectorialment, calcula'n una matriu fonamental de solucions.
- Calcula la matriu fonamental de solucions del sistema homogeni anterior que, per a $t = \pi$, val la identitat. Quina solució del sistema homogeni satisfà $x(\pi) = 1, y(\pi) = 0$?

3.20

Sigui l'equació diferencial

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{rt}$$

Discuteix, a partir del mètode de coeficients indeterminats, com són les solucions particulars de l'equació en funció del parametre r .

3.21

Resoleu el sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

TEMA 4: ESTUDI QUALITATIU D'EQUACIONS DIFERENCIALS

4.1

Estudieu l'estabilitat de les solucions de

$$2y^v + y^{vv} + 4y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$$

4.2

El creixement de dues espècies (x, y) en el temps està modelat pel sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 25x^3 + 9xy^2 - 225x \\ \frac{dy}{dt} = 25x^2y + 9y^3 - 225y \end{cases}$$

- a) Trobeu els punts d'equilibri i l'equació de les òrbites.
- b) Què es pot dir de la solució del sistema que, en $t = 0$, passa pel punt $(0,0)$? És pot decidir la seva estabilitat sense fer el retrat de fases? En cas afirmatiu, feu-ho.
- c) Què es pot dir de la solució del sistema que, en $t = 0$, passa pel punt $(0,5)$? És pot decidir la seva estabilitat sense fer el retrat de fases? En cas afirmatiu, feu-ho.
- d) Dibuixeu el retrat de fases del sistema.
- e) Completeu les respostes dels apartats b) i c) amb el retrat de fases.
- f) Suposeu ara que el nombre d'individus inicials és $x = 2, y = 3$, quan val

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)?$$

- g) Si en canvi, el nombre d'individus inicials és $x = 6, y = 6$, quin és el valor de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{y(t)}?$$

- h) Hi ha algun valor inicial del parell (x, y) que garantitzi una població fixa?

4.3

Trobeu els punts d'equilibri del següent sistema i estudieu-ne l'estabilitat:

$$\begin{cases} x' &= x^2 - 2 + e^{x+y} \\ y' &= \ln(1 + x + y) \end{cases}$$

4.4

Responen les següents preguntes:

- a) Sigui $\vec{x}'(t) = A\vec{x}$ amb $A \in M_{2 \times 2}(R)$ Si $\det A \neq 0$, Àquants punts d'equilibri té el sistema?
- b) Si els valors propis són complexos amb part real nul·la, Àde quin tipus són les òrbites?
- c) Sigui un sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}$ en què una solució no constant $\vec{\Phi}(t)$ es mou sobre la circumferència unitat i tal que el $(1, 0)$ és l'únic punt d'equilibri en aquesta circumferència. ÀPer a quins valors de t , $\vec{\Phi}(t)$ assoleix el punt $(1, 0)$?

4.5

La funció d'una variable $f(z)$ s'anul·la exclusivament en $z = 0$ i és creixent per a tot valor de z . Determineu els punts d'equilibri del sistema autònom

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= f(x + y) \\ \frac{dy}{dt} &= f(x + 2y) \end{cases}$$

i discutiu-ne l'estabilitat.

4.6

Sigui $f : R \longrightarrow R$ una funció infinitament derivable amb un únic zero real α . Es considera el sistema diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos(f(z + y)) + ax \\ \dot{y} &= \sin(f(x + y)) + z^2 - 1 \\ \dot{z} &= e^{f(z+y)} - 1 \end{cases}$$

amb $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Trobeu els punts d'equilibri del sistema en funció de α .

b) Per a $f(u) = -u$, estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri corresponents.

4.7

Considereu el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2y \end{cases}$$

a) Trobeu-ne tots els punt d'equilibri.

b) Estudieu l'estabilitat d'aquests punts per la primera aproximació. Què podem concloure d'aquest estudi?

c) Trobeu les òrbites i dibuixeu-les.

d) Determineu el sentit de moviment de les òrbites. A partir de la representació gràfica dels punts d'equilibri i les òrbites orientades, deduiu l'estabilitat (asimptòtica o no) o inestabilitat dels diferents punts crítics.

4.8

Donat el sistema

$$\begin{cases} x' = (y - a)(x^2 - y^2) \\ y' = -(x - a)(x^2 - y^2) \end{cases}$$

on $a > 0$ és un paràmetre.

a) Determineu-ne els punts d'equilibri, trobeu-ne les òrbites i dibuixeu el diagrama de fases.

b) Estudieu l'estabilitat dels punts d'equilibri a partir del diagrama de fases.

c) Per a quins punts d'equilibri la primera aproximació decideix el seu caràcter estable, inestable, o asimptòticament estable?

4.9

Sigui l'equació diferencial $x'' + 2x' + 2x = \sin t$

- a)Escriu-la en forma de sistema lineal.
- b)Dibuixa el retrat de fases del sistema homogeni.
- c)Calcula la solució periòdica del sistema no homogeni.
- d)Estudia l'estabilitat d'aquesta solució.

4.10

Fes l'estudi qualitatiu (punts d'equilibri, estabilitat, retrat de fases) de les solucions de l'equació $x'' = -\sin x$. On es pugui, fes l'aproximació lineal del problema.

4.11

Per a un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$ considerem el sistema

$$\begin{aligned}x' &= \cos y \\y' &= x - \alpha \cos y\end{aligned}$$

- a)Determina els punts d'equilibri.
- b)Aproxima linealment el sistema als punts d'equilibri.
- c)Descriu els possibles retrats de fases del sistema linealitzat a cada punt.
- d)Què es pot dir de l'estabilitat del sistema no lineal en funció d' α .

TEMA 5: TRANSFORMADA DE LAPLACE

5.1

Sabent que $L[f(t)] = F(s)$, calculeu la transformada de la funció $R(t) = \int_a^{bt} f(u)du$ per a $a, b > 0$.

5.2

Es considera l'equació $y'' + y = f(t)$ on la funció $f(t)$ està definida per:

$$f(t) = t/2, \quad 0 \leq t < 2, \quad f(t) = 1, \quad t \geq 2$$

- a) Trobeu la transformada de Laplace de $f(t)$
- b) Trobeu la solució general de l'equació.
- c) Calculeu la solució que compleix $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/\pi$.

5.3

- a) Trobeu la transformada de Laplace de la funció:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } 0 \leq t \leq \pi \\ e^{-t} & , \text{ si } \pi < t \end{cases}$$

- b) Trobeu la solució de l'equació:

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = f(t)$$

que verifiqui $y(0) = 1$.

5.4

a) Trobeu la transformada de Laplace de la següent funció periòdica:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \cos 2\pi t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \cos 2\pi t - 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 1 - \cos 2\pi t & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ \cos 2\pi t - 1 & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \\ \dots & \end{cases}$$

b) Calculeu, usant les propietats de la convolució, la transformada de Laplace inversa de la funció

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2\sqrt{s}}$$

sabent que la transformada de Laplace de $\frac{1}{\sqrt{t}}$ és $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

5.5

a) Resoleu mitjançant la transformació de Laplace el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = 0 \\ \dot{y} = y - x - t & y(0) = 1 \end{cases}$$

b) Describiu algun altre mètode de resolució del sistema anterior.

PROBLEMES COMPLEMENTARIS

C.1

Trobeu la família de corbes per les quals el pendent de la tangent en qualsevol punt és n vegades major que el pendent de la recta que uneix aquest punt amb l'origen de coordenades. Calculeu també la seva família de trajectòries ortogonals.

C.2

Suposi's que una gota de pluja esfèrica s'evapora amb una rapidesa proporcional a la seva superfície. Si el radi original és de 3mm i una hora després es redueix a 2mm, trobeu una expressió per al radi de la gota en qualsevol instant.

Volum d'una esfera de radi r : $\frac{4}{3}\pi r^3$

Superfície d'una esfera de radi r : $4\pi r^2$

C.3

Trobeu les corbes que tallen la família de circumferències $x^2 + y^2 = k^2$ formant un angle de $+45^\circ$.

C.4

a) Comproveu que les corbes ortogonals a la família

$$C_a = \left\{ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a-5} = 1 \right\}$$

amb $a \in \mathbb{R}$, són corbes que pertanyen a la mateixa família.

b) Donat $\alpha > 5$, quines són les corbes ortogonals a C_α ? (Indicació: vegeu com és C_α i comproveu que per cada punt del pla passen exactament dues corbes de la família)

C.5

- a) Quina és l'equació diferencial lineal homogènia de coeficients constants d'ordre mínim que admet com a solucions particulars $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x \sin x$?
- b) I si no cal que sigui de coeficients constants?

C.6

Considera l'equació

$$f'(t)g(t) + 2f(t)g'(t) = g'''(t)$$

- a) Fixada $g(t)$, prova que tres solucions particulars de $f(t)$ han de ser l. d.
- b) Fixada $f(t)$, quantes solucions l. i. per a $g(t)$ existeixen? Per què?
- c) Donada $g(t)$, calcula explícitament la solució general de $f(t)$.
(Indicació: $gg''' = (gg'')' - g'g''$).
- d) Si $f(t) = 2$, calcula la solució general de $g(t)$.
- e) Si $f(t) = K$, constant, converteix l'equació en un sistema lineal de primer ordre a fi de determinar $g(t)$. (A partir d'ara ens referim a aquest sistema).
- f) Discuteix per a quins valors de K obtenim solucions $g(t)$ acotades.
- g) Si $K = -2$, calcula la matriu fonamental del sistema.
- h) Recalcula la matriu fonamental que, per a $t = 0$, val la identitat.

C.7

Sigui $\{t, \sin t\}$ un sistema fonamental de l'equació lineal homogènia:

$$L(y) = 0$$

Resoleu :

$$L(y) = -\sin t + t \cos t$$

C.8

Determineu l'equació lineal homogènia d'ordre mínim, a coeficients constants, que té

$$e^t(t - 3 + \sin 2t)$$

com solució.

C.9

Trobeu l'equació de les corbes $y = y(x)$ tals que per tot punt $P=(x, y)$ de la corba, la suma de les coordenades del punt mig determinat per R i S (on $R=(0, y)$ i S el punt de tall de la tangent amb l'eix d'abscises) és constant i igual a $\frac{1}{2}$.

C.10

Trobeu un sistema fonamental de :

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x.$$

Especifiqueu dues maneres diferents de trobar una solució particular a partir de l'anterior sistema fonamental.

C.11

Una bola de naftalina redueix el seu radi a la meitat en un mes. Si s'evapora a una velocitat proporcional a la seva superfície, trobeu el seu radi en funció del temps. Quant temps trigar a desaparèixer?

C.12

Donada la família d'el.lipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5a^2} = 1,$$

per $a \in \mathcal{R}$.

- a) Escriviu l'equació diferencial de la família ortogonal.
- b) Doneu la família de corbes que es caracteritza per tallar a la família d'el.lipses amb un angle de 45 graus.

C. 13

Un dipòsit conté 10 galons de salmorra amb 2 lliures de sal dissoltes en ella. S'introdueix en el dipòsit salmorra que conté dissolta 1 lliura de sal per cada

galó a raó de 3 galons/minut, i la mescla, ben barrejada, es deixa sortir a raó de 4 galons/minut. Trobeu la quantitat de sal $x = x(t)$ en el dipòsit en un instant t arbitrari.

C.14

Determineu les corbes $y(x)$ en el primer quadrant tal que en cada punt (x_0, y_0) de la corba, la derivada de la corba en aquest punt és igual a l'àrea compresa entre la corba, l'eix d'ordenades i les rectes $x = 0$, i $x = x_0$.

C.15

Una molla està penjada del sostre. Quan es fixa en el seu extrem lliure un cos que pesa 30 Kg, en estat de repòs la molla s'estira 0,3 metres. Se li treu aquest cos i una persona, penjada de l'extrem de la molla, comença a oscil·lar verticalment amb un període de 1 segon. Quan pesa la persona?

C.16

Trobeu les corbes tals que la projecció sobre l'eix d'abscisses del tros de normal limitat pel punt de la corba i l'eix X , té longitud 1

C.17

Donada l'equació diferencial:

$$L[y] \equiv x^2 y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y = x^3 \sin x$$

- Comproveu que l'equació homogènia $L[y] = 0$ admet una solució particular del tipus $y_p(x) = xe^x$.
- Utilitzant aquesta solució particular, trobeu la solució general de l'equació completa de l'enunciat.
- Considerant el canvi de variable $z = y/x$, justifiqueu els resultats obtinguts en els apartats anteriors.

Indicació: $\int e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$; $\int e^{-x} \sin x = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$

C.18

Determineu l'equació de la corba que passa pel punt $(2, 6)$ tal que els segments determinats per un punt qualsevol de la mateixa i les interseccions amb els eixos coordenats de la normal a la corba en l'esmentat punt tinguin la mateixa longitud.

C.19

Trobeu l'equació de les corbes que passen pel punt $(1, 0)$ tals que la distància de qualsevol punt P de la corba a l'eix OY és la meitat de la distància a l'origen del punt de tall amb l'eix OY de la recta tangent a la corba en P .

C.20

Sigui la família de corbes

$$C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1, y \geq 0\}$$

- a) Troba'n l'equació diferencial que la descriu. A quin interval és vàlida? Per què?
- b) Quina és la solució maximal i el domini d'una solució $y(x)$ que passa pel punt $(0, 4)$? Té alguna asímptota? Per què? Contradiu això alguna de les condicions dels teoremes d'existència i unicitat?
- c) Quina és la família de corbes ortogonals a C_a ?

C.21

Trobeu l'equació de la família de corbes que tenen la propietat que el segment de la recta tangent comprés entre els eixos de coordenades queda dividit per la meitat en el punt de contacte amb la corba.

C.22

Calcula l'equació uniparamètrica de les corbes tals que l'angle entre el radi vector i la recta tangent a cada punt és de 45° .

C.23

Determineu quines corbes del pla són les que totes les seves tangents passen pel punt $(1, 2)$.

C.24

- a) A partir d'una equació diferencial lineal que compleixi la funció $y(t) = \sqrt{t}$, prova que la seva transformada de Laplace és proporcional a $s^{-\frac{3}{2}}$.
- b) Pots calcular exactament aquesta transformada?