

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀

▶▶

◀

▶

Pàgina 1 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Transparències d'equacions diferencials lineals

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

<http://www-ma4.upc.edu/~rcubarsi>



Departament de **Matemàtica Aplicada IV**

Copyright ©2010 by Rafael Cubarsi (rcubarsi@mat.upc.edu)



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 3.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

o envieu una carta a:

Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA

1	Equacions diferencials de primer ordre	4
1.1	Introducció	5
1.1.1	Interpretació geomètrica	7
1.2	Condicions d'integrabilitat	8
1.3	Equacions integrables elementalment	10
1.4	Equació lineal	11
1.4.1	Equació homogènia	12
1.4.2	Equació completa: mètode de variació de les constants	13
2	Equacions diferencials lineals d'ordre superior	15
2.1	Equacions de segon ordre	16
2.1.1	Solució de l'equació homogènia	18
2.2	Wronskià	19
2.3	Equacions homogènies	21
2.4	Equacions homogènies a coeficients constants	25
2.5	Equacions d'ordre superior	29
2.6	Equacions lineals no homogènies	31
2.6.1	Mètode de variació de les constants	31
2.6.2	Equació d'ordre n	35
2.6.3	Mètode dels coeficients indeterminats	36
2.6.4	Principi de superposició	41
3	Sistemes d'equacions diferencials lineals	43
3.1	Introducció	44
3.1.1	Propietats generals	44
3.2	Relació entre un sistema i una equació	47
3.3	Sistemes homogenis	48
3.3.1	Dependència i independència lineal de funcions	48
3.3.2	Matriu fonamental de solucions	49
3.4	Matriu exponencial	53
3.5	Sistema homogeni a coeficients constants	56
3.5.1	Solució del sistema	57
3.5.2	Arrels reals simples	57
3.5.3	Arrels complexes simples	59
3.5.4	Arrels múltiples	60
3.5.4.1	Multiplicitats algebraica i geomètrica iguals	60
3.5.4.2	Multiplicitats algebraica i geomètrica diferents	60
3.6	Sistemes no homogenis	64

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 3 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Plana personal

Inici

Contingut



Pàgina 4 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Capítol 1

Equacions diferencials de primer ordre

1.1. Introducció

Definició 1 Una **equació diferencial ordinària** és una relació entre una funció d'una variable, $y(t)$ (que anomenarem variable dependent), la variable independent t , i una o vàries derivades successives de la funció,

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Suposarem que totes les variables són reals.

Quan hi ha vàries variables independents, $t_1, \dots, t_n$, les equacions s'anomenen equacions en derivades parcials. Llavors, la funció $y(t_1, \dots, t_n)$ es pot derivar respecte de cada una de les variables. Per exemple $\frac{\partial y}{\partial t_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t_i \partial t_j}$, etc.

Exemple 1 Un cas el proporciona la segona llei de Newton pel moviment d'un cos de massa m , sota l'acció d'una força F . Si aquesta força depèn de l'instant t considerat, de la posició $y(t)$ i de la velocitat $\frac{dy(t)}{dt}$ del cos en aquest instant, es compleix

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt})$$

Exemple 2 L'estudi de circuits elèctrics és un altre exemple d'equacions diferencials. Per exemple, el corrent $I(t)$ d'un circuit, pel que la tensió $V(t)$ aplicada en cada instant t es reparteix entre la caiguda de tensió $R I(t)$ d'una resistència i la caiguda de tensió $L \frac{dI(t)}{dt}$ d'una autoinducció, posades en sèrie, satisfà l'equació diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + R I = V$$

Exemple 3 *Un altre cas són les equacions que caracteritzen a una família de corbes del pla. Així, si considerem la família de paràboles $y = Ct^2$, derivant obtenim $y' = 2Ct$. Eliminant el **paràmetre** C amb les dues equacions, obtenim la equació diferencial*

$$y' = 2 \frac{y}{t}$$

que expressa una propietat comú a totes les corbes de la família: el pendent de la tangent en un punt qualsevol és el doble del pendent de la recta que uneix el punt amb l'origen.

- En general, si $g(t, y, C) = 0$ representa una família de corbes, eliminant C entre les equacions $g(t, y, C) = 0$ i $\frac{d}{dt} g(t, y(t), C) = 0$, obtindrem l'equació diferencial $F(t, y, y') = 0$ de la família de corbes. És a dir, canviarem la informació que proporciona C , per la que proporciona y' .

Definició 2 Anomenarem **ordre** d'una equació diferencial al major ordre de la derivada que intervé en l'equació.

Per tant l'exemple 1 és d'una equació de segon ordre, mentre que els exemples 2 i 3 són d'equacions de primer ordre.

De moment, considerarem únicament equacions de primer ordre, que escriurem en la forma **estàndard**

$$y' = f(t, y) \quad (1.1)$$

En un interval I , una **solució** d'aquesta equació és una funció $y = \phi(t)$ derivable que satisfà

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall t \in I \quad (1.2)$$

1.1.1. Interpretació geomètrica

- Podem interpretar una equació diferencial $y' = f(x, y)$ com una equació que a cada punt (x, y) en el que f està definida li associa una direcció de pendent $f(x, y)$.
- El gràfic d'una solució $y = \phi(x)$ s'anomena *corba integral*, i els valors $f(x, y)$ s'anomenen *camp de velocitats o direccions*.
- D'una equació $y' = f(x, y)$ n'obtindrem una família uniparamètrica de solucions, $y = \phi(x, C)$, que rep el nom d'*integral general* o *solució general* de l'equació.
- També podem estar interessats en determinar una *solució particular* de l'equació diferencial que, per a $x = x_0$, pren un valor donat y_0 . Geomètricament, es diu que es busca la solució que passa pel punt (x_0, y_0) .

Aquesta condició determina el valor de C en la solució general, de manera que si $y_0 = \phi(x_0, C_0)$, la solució desitjada és $y = \phi(x, C_0)$.

Exemple 4 La solució general de l'equació $y' = e^x - y$ ve donada per $y = \frac{1}{2}e^x + C e^{-x}$, i la *solució particular* que satisfà $y(0) = 1$ s'obté quan $1 = \frac{1}{2} + C$, és a dir per a $C = \frac{1}{2}$, resultant $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$.

1.2. Condicions d'integrabilitat

Si coneixem el valor de la variable dependent y en t_0 , i admetem que aquesta variable evoluciona de manera:

- *determinista*, és a dir, que hi ha un lligam entre els valors passats, present i futurs,
- *fnita*, és a dir, que en tot moment és quantificable,
- *diferenciable*, és a dir, que les seves variacions són prou suaus,

llavors, per a un valor de t proper a t_0 , podem fer una estimació de $y(t)$ a partir de l'aproximació lineal

$$y(t) - y(t_0) \approx y'(t_0)(t - t_0)$$

Una forma de poder seguir l'evolució de la variable y és disposar de la informació que proporciona l'equació

$$y' = f(t, y(t)) \quad (1.3)$$

Així, sabent el *valor inicial* $y_0 = y(t_0)$, obtindrem els valors de la funció $y(t)$ en el seu entorn,

$$y(t) \approx y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Quan fem aquest procés de manera *elemental*, estem precisament integrant l'equació diferencial Eq. 1.3,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.4)$$

tot calculant les constants d'integració a partir de les condicions inicials.

Per a una equació d'ordre n , les condicions inicials són de la forma $a_0 = y(t_0)$, $a_1 = y'(t_0)$, $\dots$, $a_{n-1} = y^{(n-1)}(t_0)$, totes avaluades en el mateix valor de la variable independent.

L'existència i unicitat de la solució del *problema de valor inicial* (PVI)

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.5)$$

necessita unes condicions mínimes. La més freqüentment utilitzada és la següent:

Teorema 1 (d'existència i unicitat) *Si f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues en un domini Ω , el problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, per a $(t_0, y_0) \in \Omega$, admet una única solució $y(t)$, que està definida en un interval obert $I \subset \Omega$.*

Un exemple on no es compleixen aquestes condicions suficients és el següent:

Exemple 5 *El problema de valor inicial $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$, no té solució única, doncs al menys $y_1(t) = (t/3)^3$, $y_2(t) \equiv 0$ són solucions del problema.*

També cal notar que les solucions poden tenir un abast limitat:

Exemple 6 *La solució de $y' = y^2$ amb $y(0) = 1$ és $y(t) = 1/(1 - t)$ en $-\infty < t < 1$. Però $y(t)$ no pot ser solució en un interval més gran ja que no està definida per a $t = 1$.*

1.3. Equacions integrables elementalment

Exemple 7 Integrar $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - 1}{y^2}$.

Solució. Ho escrivim com

$$y^2 dy = (t^2 - 1) dt$$

Llavors,

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} - t + C; \quad y = (t^3 - 3t + 3C)^{1/3}$$

✓

Exemple 8 Resoldre $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2} + t$.

Solució. Ho escrivim com

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) t$$

Separant variables obtenim

$$\frac{y^2}{1 + y^2} dy = t dt$$

i com $\frac{y^2}{1 + y^2} = 1 - \frac{1}{1 + y^2}$, integrant arribem a

$$y - \arctan y = \frac{t^2}{2} + C$$

En aquest cas ja no és possible aïllar y en funció de t .

✓

1.4. Equació lineal

Definició 3 Una equació lineal de primer ordre és la que es pot escriure com

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (1.6)$$

Suposarem que $a(t)$ i $f(t)$ són funcions contínues en un cert interval $I \subset \mathbb{R}$.

L'operador $L \equiv \frac{d}{dt} + a(t)$, que associa a una funció y la funció

$$L[y(t)] = y'(t) + a(t)y(t) \quad (1.7)$$

és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^1(I)$ al $\mathcal{C}(I)$.

- El conjunt de solucions de l'*equació completa*

$$L[y] = f(t) \quad (1.8)$$

ve donat per $y_p + y_h$, on y_p és una solució particular de l'Eq. 1.8, i $y_h \in \ker(L)$ és del conjunt de solucions de l'*equació homogènia*

$$L[y] = 0 \quad (1.9)$$

- La diferència de dues solucions particulars y_a i y_b de l'equació completa, Eq. 1.8, verifica $L[y_a - y_b] = f - f = 0$. Per tant $y_a - y_b \in \ker(L)$.

1.4.1. Equació homogènia

Resolem ara l'equació homogènia

$$y_h' + a(t)y_h = 0 \quad (1.10)$$

Si $y_h \neq 0$ podem escriure $y_h'/y_h = -a(t)$ i, integrant,

$$\ln |y_h| = - \int a(t) dt + K; \quad |y_h| = C e^{-\int a(t) dt}$$

on $C = e^K$ és una constant positiva. Aquesta darrera equació equival a

$$y_h = \pm C e^{-\int a(t) dt}$$

la qual podem resumir en

$$y_h = C e^{-\int a(t) dt}, \quad C \neq 0$$

Però, en dividir per y_h , hem perdut la solució $y_h = 0$, que anomenarem *trivial*, que sempre *és solució de l'homogènia*. Per tant, la solució general de l'Eq. (1.10) serà

$$y_h = C e^{-\int a(t) dt} \quad (1.11)$$

per a C qualsevol.

- El conjunt de solucions de la part homogènia de l'equació lineal de primer ordre formen un espai vectorial de dimensió 1.

1.4.2. Equació completa: mètode de variació de les constants

Per a integrar l'equació completa n'hi ha prou amb determinar una solució particular. Per això utilitzarem el mètode anomenat de *variació de les constants*, que permet integrar l'equació completa quan es coneix una solució particular de l'equació homogènia, per exemple,

$$\phi(t) = e^{-\int a(t) dt} \quad (1.12)$$

Així, proposem una solució de la forma

$$y_p = K(t)\phi(t) \quad (1.13)$$

essent $K(t)$ una funció a determinar.

Substituint l'Eq. 1.13 a l'Eq. 1.8, i recordant que $\phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0$, obtenim

$$K'(t)\phi(t) = f(t)$$

Per tant, excepte una constant d'integració que podem suposar nul·la,

$$K(t) = \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt,$$

i la solució particular serà

$$y_p = \phi(t) \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt \quad (1.14)$$

Finalment, tot sumant-li la solució general de l'homogènia, la solució general de l'equació completa és

$$y = \phi(t) \left(\int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt + C \right) \quad (1.15)$$

Exemple 9 *Integrar l'equació*

$$y' \cos t + y \sin t = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Solució. L'escrivim com

$$y' + (\tan t) y = \frac{1}{\cos t}$$

Integrem primer l'equació homogènia,

$$y'_h + (\tan t) y_h = 0$$

$$y_h = C e^{-\int \tan t \, dt} = C \cos t$$

Ara busquem una solució particular de l'equació completa a partir de l'Eq. 1.14, en la forma $y_p(t) = K(t) \cos t$,

$$y_p = \cos t \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \sin t$$

Així, la solució general de l'equació és

$$y = \sin t + C \cos t$$



Plana personal

Inici

Contingut



Pàgina 15 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Capítol 2

Equacions diferencials lineals d'ordre superior

2.1. Equacions de segon ordre

Una equació diferencial lineal de segon ordre es pot escriure en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \quad (2.1)$$

on $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són funcions que només depenen de x .

Fent servir la notació de l'operador lineal, podem escriure

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x); \quad L[y(x)] = R(x) \quad (2.2)$$

Exemple 10 *Les equacions $y'' + y = 0$, $xy'' - y' + 2y = x^2$, són lineals de segon ordre. La primera té coeficients constants i la segona té coeficients que són funció de la variable independent.*

En general, voldrem resoldre el PVI constituït per l'Eq. 2.1 amb unes condicions inicials

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

En aquest cas, l'existència i unicitat de la solució ve garantida pel següent teorema.

Teorema 2 (d'existència i unicitat) *Si $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, i $x_0 \in I$, aleshores existeix una única solució $y(x)$ del problema de valor inicial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x); \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$$

Distingirem entre:

- equació homogènia

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2.3)$$

- equació completa

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (2.4)$$

amb $R(x)$ no nul·la.

La linealitat de l'operador L garanteix que

- la diferència de dues solucions de l'equació completa és solució de l'equació homogènia
- per a trobar la solució general y de l'equació completa només cal conèixer una solució particular y_p de l'equació completa i la solució general y_h de l'equació homogènia

$$y = y_p + y_h$$

2.1.1. Solució de l'equació homogènia

El càlcul de la solució general de l'equació homogènia es redueix a trobar una base del $\ker L$. Vegem el següent teorema, que també el farem servir en equacions d'ordre superior.

Teorema 3 (Principi de superposició) Si $y_1, y_2, \dots, y_k$ són solucions d'una equació lineal homogènia, llavors $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$ també n'és solució, $\forall c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

En particular, la solució trivial n'és una solució.

Exemple 11 Anem a buscar solucions no trivials de l'equació $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solució. Podem resoldre aquesta equació assajant solucions de la forma $y = x^n$. Així, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$. Si ho introduïm a l'equació, queda

$$n(n-1)x^n + 2nx^n - 2x^n = [n(n-1) + 2n - 2]x^n = 0$$

Llavors, per a ser vàlida la igualtat per a valors $x \neq 0$, només cal que $n^2 + n - 2 = 0$. Per tant, les solucions s'obtenen de $n = 1, -2$, i són x, x^{-2} .

En general, $y = c_1x + c_2x^{-2}$ són solució de l'equació. ✓

- Quan estudiem sistemes d'equacions veurem que, per a un operador diferencial lineal L d'ordre n , es compleix $\dim \ker L = n$. Per tant, en l'exemple anterior ja hauriem obtingut la solució general de l'equació.

2.2. Wronskià

Si l'operador diferencial L és d'ordre n , considerarem que és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^n(I)$ a $\mathcal{C}(I)$, per a un cert interval $I \subset \mathbb{R}$.

Naturalment, els conceptes de dependència i independència lineal de vectors també s'aplicaran a les funcions pertanyents a aquests espais vectorials.

No obstant, veurem un mètode específic per a estudiar la dependència o independència lineal de funcions.

Definició 4 Siguin $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, n funcions que suposarem derivables almenys fins a ordre $n - 1$ en un cert interval I . El seu **wronskià** es defineix com el determinant

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

En darrer terme, el wronskià $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ és una funció de la variable x en l'interval I , per això, de vegades també escriurem $W(x)$.

En àlgebra havíem vist que si $W(f_1, f_2, \dots, f_n) \neq 0$, per a algun $x \in I$, llavors les funcions són linealment independents. El recíproc no és sempre cert, com ho veurem en el darrer dels següents exemples.

Exemple 12 *Calcularem el wronskià d'algunes famílies de funcions:*

- $W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$

- $W(x^2, x^3, x^4) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 2 & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = 2x^6$

- $W(\sin^2 x, 1 - \cos 2x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \sin x \cos x & 2 \sin 2x \end{vmatrix} =$
 $= 2 \sin^2 x \sin 2x - 2 \sin x \cos x (1 - \cos 2x) =$
 $= \sin 2x (2 \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

- *Les funcions $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = |x|^3$ són linealment independents en tot $\mathbb{R}$. És fàcil veure que, per a $x < 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, -x^3) = 0$, ja que les seves columnes són proporcionals.*

Igualment, per a $x \geq 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, x^3) = 0$.

Per tant, que el wronskià sigui nul no és sempre equivalent a que les funcions siguin linealment dependents.

2.3. Equacions homogènies

El nostre objectiu és ara obtenir la solució general de l'equació lineal homogènia. Ho farem a partir de combinacions lineals de solucions linealment independents.

Lema 1 *Siguin $y_1(x), y_2(x)$ dues solucions de l'equació homogènia, Eq. 2.3. Llavors, el seu wronskià, o bé no s'anul·la mai, o bé és idènticament nul.*

Demostració (Lema 1). El wronskià de y_1 i y_2 és $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Derivant, obtenim

$$W'(x) = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Tenint en compte que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0; \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

multipliquem la primera equació per y_2 , la segona per y_1 , i restem,

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

És a dir,

$$\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

Per tant, el wronskià és de la forma

$$W(x) = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

El resultat desitjat s'obté perquè l'exponencial és sempre positiva.

Lema 2 *Dues solucions $y_1(x), y_2(x)$ són linealment dependents si i només si el seu wronskià és idènticament nul.*

Teorema 4 Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ són n solucions linealment independents en un interval I de l'equació lineal homogènia d'ordre n ,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I$$

llavors

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

n'és la solució general en I .

Demostració. Vegem la demostració en el cas de segon ordre. En efecte, sigui $y(x)$ una solució qualsevol de l'equació lineal homogènia Eq. 2.3. Volem veure que existeixen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Sabem que una solució queda unívocament determinada pel coneixement del valor de la solució i la seva derivada en un mateix punt. Per tant, només caldrà trobar els valors c_1 i c_2 tals que en algun punt $x_0 \in I$ verifiquin

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

Per a que aquest sistema tingui solució caldrà que el determinant

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

sigui diferent de zero. El teorema quedarà doncs demostrat si veiem que, per a dues solucions independents, aquest determinant és no nul. Però, això és cert pels lemes anteriors i, a més, és vàlid per a qualsevol punt $x_0 \in I$.

Exemple 13 *Veure que les funcions de la forma $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són la solució general de l'equació $y'' + y = 0$. Calcular la solució que compleix $y(0) = 2, y'(0) = 3$.*

Solució. Vegem primer que $y = \sin x$ i $y = \cos x$ satisfan l'equació.

En efecte, si $y = \sin x$, llavors $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ i $y'' + y = 0$.

Així mateix, si $y = \cos x$, llavors $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ i també verifica l'equació.

En general, les combinacions de la forma $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són també solució de l'equació.

Ara, per a comprovar que totes les solucions són d'aquesta forma, només caldrà veure que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$.

En efecte, $W(\sin x, \cos x) = -1$.

Si volem que la solució compleixi les condicions inicials, imposem

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 2$$

$$c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 3$$

Llavors $c_1 = 3, c_2 = 2$, i la solució que busquem és $y = 3 \sin x + 2 \cos x$.

✓

Una altra aplicació interessant del wronskià és la de trobar l'equació diferencial lineal i homogènia de grau mínim satisfeta per una família determinada de funcions linealment independents. Ho veiem tot continuant l'exemple anterior.

Exemple 14 *Calcular l'equació lineal i homogènia que té per solucions $\sin x$, $\cos x$.*

Solució. Ja hem vist que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$. Per tant, aquestes són dues solucions linealment independents, en tot $\mathbb{R}$, d'una equació de segon ordre. Qualsevol altra solució $y(x)$ que sigui solució de l'equació buscada haurà de ser linealment dependent de les solucions anteriors. Per tant, hauran de verificar

$$W(\sin x, \cos x, y(x)) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y(x) \\ \cos x & -\sin x & y'(x) \\ -\sin x & -\cos x & y''(x) \end{vmatrix} = 0$$

Ara només hem de calcular el determinant, per exemple, per adjunts de la tercera columna,

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y = -y'' + 0 y' - y = 0$$

L'equació d'ordre mínim és, doncs, $y'' + y = 0$.

✓

2.4. Equacions homogènies a coeficients constants

En general, no és fàcil trobar solucions particulars d'una equació diferencial, encara que sigui lineal i homogènia, però quan l'equació té coeficients constants, veurem que és molt senzill. Primer ho resoldrem per a segon ordre. Suposem l'equació

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

amb $p, q \in \mathbb{R}$.

Podem escriure l'equació en la forma de l'operador diferencial

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q; \quad L[y(x)] = 0 \quad (2.6)$$

Provem ara solucions de la forma $y = e^{mx}$, on m és una incògnita a determinar. Com $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$, tindrem

$$L[e^{mx}] = (m^2 + pm + q)e^{mx} = 0$$

Per tant, les funcions de la forma e^{mx} són solucions de l'Eq. 2.6 sempre que m sigui arrel del *polinomi característic*

$$P(m) = m^2 + pm + q \quad (2.7)$$

L'equació $P(m) = 0$ s'anomena *equació característica* associada a l'equació diferencial.

En la resolució d'aquesta equació convé distingir diversos casos.

- (i) Cas $p^2 - 4q > 0$. L'equació característica admet dues solucions reals diferents $m_1 \neq m_2$. A més, es compleix $W(e^{m_1x}, e^{m_2x}) \neq 0$. Per tant, $y_1 = e^{m_1x}$ i $y_2 = e^{m_2x}$ són dues solucions independents de l'equació diferencial. Així doncs, la solució general serà

$$y(x) = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (ii) Cas $p^2 = 4q$. Només hi ha una arrel real doble, m , de l'equació característica. Una solució és $y_1 = e^{mx}$, però per a trobar la solució general necessitem una altra solució linealment independent. Tot i que es pot trobar pel mètode de variació de les constants a partir de l'anterior, ho farem amb el següent raonament:

Com $L[e^{mx}] = P(m) e^{mx}$, derivant respecte de m obtenim

$$\frac{\partial}{\partial m} L[e^{mx}] = L\left[\frac{\partial}{\partial m} e^{mx}\right] = [P'(m) + mP(m)]e^{mx}$$

Com m és arrel doble de $P(m)$, també és arrel de $P'(m)$. Per tant, tindrem

$$L[xe^{mx}] = 0$$

Llavors, la solució general serà de la forma

$$y = (c_1 + c_2x) e^{mx}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) Cas $p^2 < 4q$. L'equació característica no té solucions reals. Per tant, tindrem arrels complexes conjugades $\alpha \pm i\beta$, i $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ seran solucions de l'Eq. 2.6, però en el camp complex. Ara bé, per a obtenir dues solucions reals independents només caldrà treballar amb una de les solucions complexes. Tenint en compte la fórmula d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

podem escriure

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (2.8)$$

Com $L[e^{(\alpha + i\beta)x}] = 0$, s'hauran d'anul·lar per separat les parts real i imaginària. Així,

$$L[e^{\alpha x} \cos \beta x] = 0; \quad L[e^{\alpha x} \sin \beta x] = 0 \quad (2.9)$$

Clarament aquestes solucions són linealment independents, doncs el seu wronskià val

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x) = \beta e^{2\alpha x}$$

que és diferent de zero perquè $\beta \neq 0$. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 15 Trobar la solució general de l'equació $y'' + y' - 6y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^2 + m - 6 = 0$, amb arrels

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}; \quad m_1 = 2, \quad m_2 = -3$$

La solució general de l'equació diferencial és doncs

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

✓

Exemple 16 Trobar la solució general de l'equació $y'' + 2y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica $m^2 + 2m + 1 = 0$ té arrel $m = -1$ doble. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$

✓

Exemple 17 Resoldre l'equació $y'' + y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^2 + m + 1 = 0$, amb arrels complexes $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Per tant, la solució general és

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

✓

2.5. Equacions d'ordre superior

Considerem l'equació ordre n , lineal, homogènia i a coeficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2.10)$$

amb constants $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. L'equació característica és

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0$$

que pot tenir arrels reals i complexes amb diferents multiplicitats.

- Per a cada arrel real m amb multiplicitat k hi ha k solucions linealment independents de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, \dots, x^{k-1} e^{mx}$$

Aleshores la solució general serà

$$(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1}) e^{mx}$$

- Per a cada parella d'arrels complexes conjugades, $\alpha \pm i\beta$, amb multiplicitat k tindrem $2k$ solucions linealment independents de la forma

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Aleshores, cada parella d'arrels complexes contribuirà a la solució general amb

$$(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x + (c_{k+1} + c_{k+2}x + \cdots + c_{2k}x^{k-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Exemple 18 Resoldre $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 3y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica és

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3 = 0$$

L'arrel real $m = -1$ és triple. Aleshores la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2) e^{-x}$$

✓

Exemple 19 Resoldre $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y' + 4y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 8m + 4 = (m^2 + 2m + 2)^2 = 0$.
Les arrels complexes $m = -1 \pm i$ són dobles. Per tant, la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x) e^{-x} \cos x + (c_3 + c_4x) e^{-x} \sin x$$

✓

Exemple 20 Resoldre $y^{(7)} = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^7 = 0$, que té una única arrel $m = 0$, de multiplicitat 7. La solució general és

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 + c_7x^6$$

✓

2.6. Equacions lineals no homogènies

Recordem que per a resoldre l'equació completa cal conèixer una solució particular i la solució general de l'homogènia. Vegem com obtenir una solució particular de l'equació completa. Ho farem pel cas de l'equació d'ordre 2, Eq. 2.1, que és generalitza fàcilment a ordres superiors.

2.6.1. Mètode de variació de les constants

- És la generalització del mètode que havíem usat per a equacions lineals de primer ordre
- És vàlid per a equacions diferencials amb coeficients constants o variables

Ho resoldrem per a una equació lineal de segon ordre, escrita en forma mònica,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2.11)$$

amb una funció arbitrària $f(x)$ del terme independent.

Per a trobar una solució particular y_p de l'Eq. 2.11, caldrà, però, saber la solució general

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

de la part homogènia de l'equació, on c_1, c_2 són constants i $y_1(x), y_2(x)$ són dues solucions particulars linealment independents de l'equació homogènia.

El mètode consisteix en substituir les constants c_1, c_2 per funcions desconegudes a determinar, $c_1(x), c_2(x)$, de manera que y_p sigui de la forma

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (2.12)$$

i sigui solució de l'Eq. 2.11.

Substituïnt, obtenim un sistema lineal de dues equacions amb les incògnites $c'_1(x)$ i $c'_2(x)$,

$$\begin{cases} c'_1(x)y_1 + c'_2(x)y_2 = 0 \\ c'_1(x)y'_1 + c'_2(x)y'_2 = f(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

El determinant associat al sistema és el wronskià $W(y_1, y_2)$, que és no nul perquè y_1 i y_2 són linealment independents:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.14)$$

Resolent aquest sistema, obtindrem les derivades de les funcions incògnita, i després integrarem,

$$c_1(x) = \int -\frac{y_2 f}{W} dx; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

Finalment, la solució particular que hem trobat és

$$y_p = y_1 \int -\frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (2.15)$$

La solució general de l'Eq. 2.11 és, doncs,

$$y = y_1 \left(\int -\frac{y_2 f}{W} dx + c_1 \right) + y_2 \left(\int \frac{y_1 f}{W} dx + c_2 \right) \quad (2.16)$$

amb c_1 i c_2 constants.

Exemple 21 *Resoldre l'equació diferencial*

$$y'' + 4y = \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x}$$

Solució.

Comencem amb l'equació homogènia

$$y'' + 4y = 0$$

L'equació característica és $m^2 + 4 = 0$, amb arrels $m = \pm 2i$. Aleshores, la seva solució general és

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

amb c_1 i c_2 constants.

Ara, trobarem una solució particular de l'equació completa en la forma

$$y = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$$

Hem de resoldre el sistema,

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(-2 \sin 2x) + c_2'(x) 2 \cos 2x = \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{cases}$$

El wronskià és

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Aleshores, aplicant la regla de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(-\sin^2 2x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right)$$

Anàlogament,

$$c_2'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sin 2x \cos 2x - 1)$$

Integrant, obtenim

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) dx = -\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x|$$

$$c_2(x) = \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2}$$

La solució particular queda com

$$y_p = \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2} \right) \sin 2x$$

Finalment, la solució de l'equació demanada és

$$y = \left(c_1 + -\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(c_2 + \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2} \right) \sin 2x$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



2.6.2. Equació d'ordre n

Suposem que volem determinar una solució particular d'una equació d'ordre n ,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

on $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ poden ser coeficients constants o variables, i sigui

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

la solució general de l'equació homogènia associada, amb $c_1, c_2, \dots, c_n$ constants i $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ solucions linealment independents.

Busquem una solució particular del tipus

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

En aquest cas, les derivades de les funcions incògnites $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ són les solucions del sistema $n \times n$,

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots + c_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

El determinant associat al sistema és el wronskià de $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, per tant, no nul. A partir d'aquí es segueix el mateix procediment indicat per a equacions de segon ordre, i s'integra cadascuna de les $c_k'(x)$ per a obtenir les n funcions $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$.

2.6.3. Mètode dels coeficients indeterminats

Buscarem solucions particulars de l'Eq. 2.11 quan $f(x)$ és una exponencial, un polinomi, un sinus o un cosinus. Veurem també que es pot aplicar en el cas de producte d'aquestes funcions, és a dir, quan

$$f(x) = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^m)e^{\alpha x} \sin \beta x + (b_0 + a_1x + \cdots + b_nx^m)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

El mètode també es coneix amb el nom de *mètode de la conjectura prudent*.

En general, si el terme no homogeni de l'equació és de la forma anterior i l'equació característica té una arrel $\alpha + i\beta$ de multiplicitat k , llavors cal proposar una solució particular com

$$y_p = x^k(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^m)e^{\alpha x} \sin \beta x + x^k(B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^m)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

Exemple 22 *Calcular una solució particular de*

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

Solució. Si assagem amb funcions de la forma

$$y = A \cos x + B \sin x$$

les seves derivades seran també funcions d'aquest forma i, llavors, el nostre problema consistirà en determinar A i B que satisfacin l'equació. En efecte,

$$y' = -A \sin x + B \cos x, \quad y'' = -A \cos x - B \sin x$$

Substituïnt, obtenim

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) - 4(A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x$$

és a dir

$$(-A - 3B - 4A) \cos x - (B - 3A + 4B) \sin x = 2 \sin x$$

Per tant,

$$-A - 3B - 4A = 0, \quad B - 3A + 4B = -2$$

La solució d'aquest sistema és $A = \frac{3}{17}$, $B = -\frac{5}{17}$.

La solució particular que trobem és

$$y = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x)$$



Exemple 23 *Trobar una solució particular de l'equació*

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

Solució. Si provem un polinomi del mateix grau que la part no homogènia i substituïm, obtindrem una igualtat entre polinomis que resoldrem igualant coeficients. Així,

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad y' = B + 2Cx, \quad y'' = 2C$$

Substituïnt,

$$-4Cx^2 - (6C + 4B)x + (2C - 3B - 4A) = 4x^2$$

I, igualant termes corresponents a les mateixes potències de la x , obtenim

$$-4C = 4, \quad 6C + 4B = 0, \quad 2C - 3B - 4A = 0$$

Per tant, $C = -1$, $B = \frac{3}{2}$, $A = -\frac{13}{8}$.

Una solució particular és

$$y = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$



Exemple 24 *Calcular la solució general de*

$$y'' - 3y' - 3y = e^{-x}$$

Solució. Primer busquem una solució particular. Si assagem solucions del tipus

$$y = Ae^{-x}$$

s'obté

$$y' = -Ae^{-x}, \quad y'' = Ae^{-x}$$

Per tant, substituïnt,

$$Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) - 3(Ae^{-x}) = e^{-x}$$

d'on,

$$(A + 3A - 3A)e^{-x} = e^{-x}$$

Per tant $A = 1$, i una solució particular és

$$y = e^{-x}$$

Ara bé, la solució general de l'equació homogènia associada, $y'' - 3y' - 3y = 0$, és

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad m_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \quad m_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

Aleshores, la solució general de la completa és

$$y = e^{-x} + c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Observem que la solució particular que hem obtingut no és de la mateixa família d'exponencials que les obtingudes per a l'equació homogènia. ✓

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 39 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Exemple 25 Calcular una solució particular de l'equació $y'' - 2y' + y = e^x$.

Solució. Si proposem una funció de la forma

$$y = Ae^x$$

i substituïm, obtenim $0 = e^x$, que clarament no té solució. El problema amb què ens trobem és que la funció que proposem és ja solució de l'equació homogènia.

Si abans haguéssim resolt l'equació homogènia, hauríem vist que l'equació característica $m^2 - 2m + 1 = 0$ té per solució l'arrel $m = 1$, de multiplicitat 2. Per tant, la solució que proposem, i també totes les de la forma $y = (A + Bx)e^x$, són solucions de l'homogènia, associades a l'arrel $m = 1$. En aquest cas, la solució que cal proposar és

$$y = Ax^2e^x$$

és a dir, multiplicar Ae^x per x^k , amb k igual a la multiplicitat de la corresponent arrel de l'equació característica. Així,

$$y' = 2Axe^x + Ax^2e^x, \quad y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

Substituïm,

$$[(2A + 4Ax + Ax^2) - 2(2Ax + Ax^2) + Ax^2]e^x = e^x$$

Ara, simplificant i igualant termes corresponents a iguals potències de la x , obtenim

$$2A = 1, \quad 4A - 4A = 0, \quad A - 2A + A = 0$$

Per tant, $A = \frac{1}{2}$. Una solució particular és $\frac{1}{2}x^2e^x$ i la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2)e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 40 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir



2.6.4. Principi de superposició

Per acabar aquest capítol, presentem un resultat interessant per a calcular solucions particulars d'equacions diferencials lineals no homogènies. És un altre principi de superposició, que permet fer el càlcul d'una solució particular terme a terme.

Teorema 5 Si $y_1(x)$ verifica

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = f_1(x)$$

i $y_2(x)$ satisfà

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = f_2(x)$$

aleshores, $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ és solució de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Exemple 26 *Determinar una solució particular de l'equació*

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x + 4x^2$$

Solució. A partir del principi de superposició per a equacions no homogènies podem obtenir

$$y_p = y_1 + y_2$$

on y_1 és una solució particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

i y_2 ho és de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

Anteriorment ja hem estudiat aquestes equacions per separat i teníem

$$y_1 = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x), \quad y_2 = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

Per tant,

$$y_p = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x) - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$



Plana personal

Inici

Contingut



Pàgina 43 de 66

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Capítol 3

Sistemes d'equacions diferencials lineals

3.1. Introducció

Definició 5 *Un sistema d'equacions diferencials lineals de primer ordre és un conjunt d'equacions en la forma*

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= a_1^1(t)x_1(t) + a_1^2(t)x_2(t) + \cdots + a_1^n(t)x_n(t) + b_1(t) \\x_2'(t) &= a_2^1(t)x_1(t) + a_2^2(t)x_2(t) + \cdots + a_2^n(t)x_n(t) + b_2(t) \\&\vdots \\x_n'(t) &= a_n^1(t)x_1(t) + a_n^2(t)x_2(t) + \cdots + a_n^n(t)x_n(t) + b_n(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

o de manera abreujada, en forma matricial,

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)\tag{3.2}$$

on $A(t)$ és la matriu de coeficients del sistema donat per l'Eq. 3.1, i $\vec{b}(t)$ és un vector de termes independents. El sistema serà homogeni si $\vec{b}(t) = \vec{0}$.

3.1.1. Propietats generals

Com en el capítol anterior, podem fer servir la notació d'operador diferencial per a escriure l'Eq. 3.2,

$$L[\vec{x}] = \left(\frac{d}{dt} - A(t) \right) \vec{x}\tag{3.3}$$

Llavors, el sistema homogeni associat a l'Eq. 3.2 ve donat per

$$L[\vec{x}] = \vec{0}$$

i el sistema complet és

$$L[\vec{x}] = \vec{b}(t)$$

Degut a la linealitat de l'operador L , l'estructura de les solucions prové de la generalització immediata de la que es tenia per a equacions diferencials escalars. Així, per exemple,

- les solucions del sistema homogeni són les que pertanyen al $\ker L$,
- la solució trivial és sempre solució del sistema homogeni,
- la diferència de solucions particulars del sistema complet és solució del sistema homogeni,
- la solució general del sistema complet s'obté sumant una solució particular qualsevol a la solució general del sistema homogeni,
- es compleix el principi de superposició, tant per les solucions del sistema homogeni, com per les del complet.

Teorema 6 (d'existència i unicitat de les solucions) Si $A(t)$ i $\vec{b}(t)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, llavors el problema de valor inicial

$$\vec{x}' = A(t) \vec{x} + \vec{b}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (3.4)$$

té una única solució en un obert contingut en I .

Destaquem les propietats i definicions següents:

- En particular, si els coeficients de $A(t)$ són continus $\forall t \in \mathbb{R}$, les solucions també ho són.
- La solució $\vec{x}(t)$ és un *camp vectorial* de classe $\mathcal{C}^1$ dins $\mathbb{R}^n$, anomenat *espai de les fases*.
- Per a una solució $\vec{x}(t)$, el conjunt de valors $(t, \vec{x}(t)) \in (I, \mathbb{R}^n)$ és una *corba integral*, gràfic de la solució del sistema.

3.2. Relació entre un sistema i una equació

Considerem l'equació

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (3.5)$$

que escrivim en unes noves variables. Primer definim $x_1 = y$, i després definim recurrentment les successives derivades de y :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + f(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Llavors, comparant amb l'Eq. 3.1 tenim,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

El pas d'equació a sistema sempre és possible i, per tant, es pot considerar que les equacions d'ordre n constitueixen un cas particular dels sistemes d'equacions diferencials.

Exemple 27 L'equació diferencial

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

s'escriu en forma de sistema, definint $x_1 = y$, com

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

3.3. Sistemes homogenis

Teorema 7 Les solucions del sistema homogeni

$$L[\vec{x}(t)] = \vec{0} \quad (3.8)$$

formen un espai vectorial de dimensió n .

3.3.1. Dependència i independència lineal de funcions

Proposició 1 Considerem un conjunt de funcions vectorials (no parlem encara de solucions d'una equació diferencial) $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ definides per a $t \in I$, amb valors a $\mathbb{R}^n$. Formem la matriu quadrada $X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)]$.

Si $\det X(t) \neq 0$ per a algun $t \in I$, llavors les funcions són linealment independents en I .

O bé, si les funcions són linealment dependents en I , llavors $\det X(t) = 0, \forall t \in I$.

El recíproc no és cert en general.

3.3.2. Matriu fonamental de solucions

Definició 6 Si $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ són n solucions l'Eq. 3.8, linealment independents en l'interval I , llavors, la matriu

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \quad (3.9)$$

s'anomena **matriu fonamental de solucions** del sistema homogeni.

Per tant, una matriu fonamental de solucions del sistema $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ satisfà

$$X'(t) = A(t) X(t)$$

Vegem algunes propietats de la matriu fonamental de solucions en relació al PVI de l'Eq. 3.4.

- Tota solució de l'Eq. 3.4 s'obté a partir d'una combinació lineal de les columnes de $X(t)$. Si ho expressem matricialment, tenim

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} \quad (3.10)$$

El vector constant $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ es calcula a partir d'una condició inicial

$$\vec{x}_0 = X(t_0)\vec{c}$$

- Com les columnes de $X(t)$ són linealment independents, la matriu és invertible. Per tant,

$$\det X(t) \neq 0, \forall t \in I \quad (3.11)$$

El determinant de la matriu fonamental de solucions és el **wronskià** de les solucions.

- La solució del PVI es pot escriure substituïnt

$$\vec{c} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0$$

en l'Eq. 3.10:

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 \quad (3.12)$$

- En particular, la solució trivial $\vec{x}(t) = \vec{0}, \forall t \in I$, és la única solució del sistema homogeni amb condició inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{0}$.
- En general, si $X(t)$ és matriu fonamental de solucions i M és una matriu regular, llavors $X(t)M$ també és una matriu fonamental de solucions.
- La matriu fonamental obtinguda com

$$\Phi(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

és la única que verifica

$$\Phi(t_0) = I$$

S'anomena *matriu fonamental principal*.

La segona de les propietats ens proporciona el recíproc de la Proposició 1:

Proposició 2 *Les columnes d'una matriu de solucions $X(t)$ són linealment independents si, i només si, $\det X(t) \neq 0$.*

Exemple 28 Si $\vec{x}_1 = (1, t)^T$, $\vec{x}_2 = (t^2, 0)^T$ són solució de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, calcular $A(t)$.

Solució. Derivant, obtenim $\vec{x}'_1 = (0, 1)^T$, $\vec{x}'_2 = (2t, 0)^T$. Per tant, es complirà

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Si $t \neq 0$, és a dir, per a $t < 0$ o per a $t > 0$, la matriu de solucions

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

és invertible (és una matriu fonamental de solucions). Llavors,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} -2t^2 & 2t \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix}$$

✓

Exemple 29 *Calcular la solució de*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

tal que $\vec{x}(t_0) = (a, b)^T$.

Solució. En aquest cas podem escriure i resoldre les dues equacions per separat

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = 2tx_2$$

d'on

$$x_1(t) = ae^{t-t_0}, \quad x_2(t) = be^{t^2-t_0^2}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Observem que la matriu fonamental del sistema és principal:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t_0^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix}$$



3.4. Matriu exponencial

Havíem vist que les funcions exponencials generaven les solucions de les equacions diferencials lineals (excepte en un factor polinòmic, per a arrels múltiples), incloent també les solucions associades a arrels complexes de l'equació característica.

Això es pot generalitzar si usem una sèrie de matrius que pren com a patró la sèrie de la funció exponencial d'una variable real, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$.

Es pot demostrar que, com la sèrie escalar, la sèrie de matrius és uniformement convergent, la qual cosa permet sumar sèries d'aquest tipus, fer productes entre elles i inclús derivades i integrals, tot mantenint la convergència.

Definició 7 Si A és una matriu $n \times n$, la **matriu exponencial** es defineix com la sèrie infinita de matrius

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (3.13)$$

Per tant, $e^A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Propietat 1 Fem un resum de les propietats més importants:

- $e^0 = I$.
- Si $AB = BA$, llavors $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.
- $e^A e^{-A} = e^0 = I$, d'on $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- $\det e^A \neq 0$, $\forall A$.
- Si $A = P B P^{-1}$ aleshores $e^A = P e^B P^{-1}$.

Exemple 30 Vegem uns casos particulars:

1. Si λ és un escalar, $e^{\lambda I} = e^{\lambda} I$.
2. Si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, llavors $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.
3. Si $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ és una matriu diagonal per blocs, llavors $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_n})$.
4. Si $A^n = 0$, llavors $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$.

Proposició 3 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriu **constant** i una variable $t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (3.14)$$

Ara podem passar de treballar amb sèries de matrius, a fer-ho amb sèries de vectors. Per exemple, per a qualsevol vector $\vec{v}$, que no depengui de t ,

$$\frac{d}{dt} (e^{At} \vec{v}) = A e^{At} \vec{v} \quad (3.15)$$

I, també considerant sèries de vectors, tenim la següent propietat important:

Propietat 2 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ i una variable real t . Donat un escalar λ i un vector constant $\vec{v}$, es compleix

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} \vec{v} \quad (3.16)$$

Si ara la combinem amb el darrer dels exemples, obtenim una propietat que serà molt útil a l'hora de resoldre sistemes d'equacions diferencial lineals:

Propietat 3 Si existeix un nombre natural n tal que $(A - \lambda I)^n \vec{v} = \vec{0}$, llavors

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} \left(I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (A - \lambda I)^{n-1} \right) \vec{v} \quad (3.17)$$

En particular, tenim,

Proposició 4 Si $\vec{v}$ és vector propi de A amb valor propi λ , llavors $\vec{v}$ també és vector propi de e^A amb valor propi e^λ .

que es dedueix de la proposició anterior, amb $t = 1$.

3.5. Sistema homogeni a coeficients constants

Estudiem el cas en que la matriu del sistema homogeni

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad (3.18)$$

te coeficients constants, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Pels resultats que hem vist en la secció anterior podem afirmar el següent:

- L'equació 3.14 garanteix que la matriu e^{At} és una matriu de solucions de l'Eq. 3.18.
- Com el determinant $\det e^{At} \neq 0$, les columnes de matriu de solucions són linealment independents $\forall t \in \mathbb{R}$. Per tant, e^{At} és una *matriu fonamental principal de solucions*.
- Si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'Eq. 3.18, existeix una matriu regular i constant C tal que $e^{At} = X(t) C$.

Fixades unes condicions inicials en $t = t_0$, tindrem $e^{At_0} = X(t_0) C$, d'on $C = X^{-1}(t_0) e^{At_0}$.

Podem doncs concloure,

Teorema 8 *Tota matriu fonamental de solucions $X(t)$ del sistema homogeni, Eq. 3.18, és de la forma*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$$

3.5.1. Solució del sistema

Ara només queda saber com escriure la matriu fonamental e^{At} sense haver de recórrer a la sèrie infinita que la defineix. Per això cal trobar n vectors linealment independents $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que proporcionin les n solucions linealment independents de l'Eq. 3.18 en la forma $e^{At}\vec{v}$. Aquests vectors els proporciona el *teorema de la descomposició primària d'endomorfismes*, que el podem recordar tot enunciant-lo pel polinomi mínim associat a la matriu A .

Teorema 9 Sigui $p_A(\lambda) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ ($\sum_{i=1}^k n_i \text{gr}(p_i) = n$) la descomposició factorial del polinomi característic de la matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, i $m_A(\lambda) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ la del polinomi mínim. Aleshores, l'espai vectorial E es descomposa en suma directa dels següents subespais invariants,

$$E = \ker p_1^{m_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{m_k}(f)$$

amb $\dim \ker p^{m_i} = \dim \ker p^{n_i} = n_i \text{gr}(p_i)$.

Vegem com són les solucions en termes de les arrels del polinomi característic.

3.5.2. Arrels reals simples

Sigui λ_j una arrel real simple de $p_A(\lambda)$, és a dir, un valor propi de A . Si $\vec{v}$ és el seu vector propi, es complirà

$$(A - \lambda_j I)\vec{v} = \vec{0}$$

aleshores, tenint en compte l'Eq. 3.17, tindrem una solució del sistema Eq. 3.18 en la forma

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{\lambda_j t}\vec{v} \quad (3.19)$$

Exemple 31 *Resoldre el PVI*

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solució.

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 6)$$

Per tant, les arrels del polinomi característic són $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -6$. Ara busquem els vectors propis. Per a $\lambda_1 = -1$, hem de resoldre

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 4x$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ara, per a $\lambda_2 = -6$, resolem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x = -y$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solució general d'aquest sistema homogeni és, doncs,

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular les constants, a fi de satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $c_1 = \frac{3}{5}$, $c_2 = -\frac{2}{5}$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-6t} \\ \frac{12}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

✓

3.5.3. Arrels complexes simples

De manera semblant a l'Exemple 7 de la secció *Descomposició primària* dels apunts d'àlgebra lineal *Polinomis de matrius i descomposició primària*, si $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$ són arrels complexes simples del polinomi característic amb vectors propis respectius $\vec{a} \pm i\vec{b}$, aleshores, les dues solucions reals són les parts real i imaginària de

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a} + i\vec{b}) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(\vec{a} + i\vec{b})$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t \vec{a} - \sin \beta t \vec{b}) \\ \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t}(\sin \beta t \vec{a} + \cos \beta t \vec{b}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.5.4. Arrels múltiples

3.5.4.1. Multiplicitats algebraica i geomètrica iguals

Si λ_j és una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat m , i existeixen m vectors propis linealment independents, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ associats a aquest valor propi, llavors les m solucions independents de l'Eq. 3.18 s'obtenen de la mateixa manera que en l'Eq. 3.19, una per a cada vector propi:

$$\vec{x}_i(t) = e^{At}\vec{v}_i = e^{\lambda_j t}\vec{v}_i; \quad i = 1, \dots, m$$

Si l'arrel és complexa, es fa el mateix amb les solucions de l'Eq. 3.20.

3.5.4.2. Multiplicitats algebraica i geomètrica diferents

Sigui λ_j una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat n_j , i suposem que existeixen menys de n_j vectors propis linealment independents. Llavors, pel teorema de descomposició primària d'endomorfismes, sabem que $\dim \ker(A - \lambda_j I)^{m_j} = n_j$, on m_j és la potència del factor d'aquesta arrel en el polinomi mínim $m_A(\lambda)$. Llavors, existeixen n_j vectors linealment independents $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}$ que compleixen

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} \vec{v}_i = \vec{0}; \quad i = 1, \dots, n_j$$

Per tant, d'acord amb l'Eq. 3.17, les n_j solucions independents seran de la següent forma. Si $\vec{v} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$,

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{\lambda_j t} \left(\vec{w}_0 + t\vec{w}_1 + \frac{t^2}{2} \vec{w}_2 + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \vec{w}_{m_j-1} \right) \quad (3.21)$$

amb

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I)^k \vec{v}; \quad k = 0, \dots, m_j - 1$$

Si l'arrel és complexa, cal donar separatament solucions per a la part real i imaginària de l'Eq. 3.21, com s'ha fet en l'Eq. 3.20.

Existeix una relació de recurrència entre els vectors $\vec{w}_k$ anteriors, que és útil a l'hora de simplificar els càlculs:

Proposició 5 *Considerem la solució de l'Eq. 3.21 associada a un vector $\vec{v} = \vec{w}_0 \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$. Llavors, els següents vectors de la sèrie verifiquen*

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I)\vec{w}_{k-1} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j-k}; \quad k = 1, \dots, m_j - 1 \quad (3.22)$$

Observació. Com que entre els n_j vectors del $\ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ ja hi ha, com a mínim, un vector de cada $\ker(A - \lambda_j I)^k$, amb $1 \leq k \leq m_j$, llavors podem formar una primera família de solucions amb el màxim nombre de vectors linealment independents del $\ker(A - \lambda_j I)$. Després, per a buscar vectors del $\ker(A - \lambda_j I)^2$ ho farem a partir dels anteriors, tot aplicant la llei de recurrència de l'Eq. 3.22. És a dir, si $\vec{v}_1 \in \ker(A - \lambda_j I)$, un vector $\vec{v}_2 \in \ker(A - \lambda_j I)^2$ el trobarem resolent el sistema

$$(A - \lambda_j I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \quad (3.23)$$

i així successivament, fins a completar els n_j vectors desitjats. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 32 *Resoldre el PVI*

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució.

Busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

Per tant, l'arrel del polinomi característic és $\lambda = 5$, doble. Ara busquem un vector propi per a aquest valor.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = -2x$. Per tant, un vector propi serà $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De moment, una solució particular del sistema homogeni serà

$$\vec{x}_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Evidentment, $\dim \ker(A - 5I) = 1$. Com la matriu del sistema no diagonalitza, haurem de trobar l'altra solució particular a partir d'un vector linealment independent de l'anterior, que sigui del $\ker(A - 5I)^2$. Aquest vector, $\vec{v}_2$, d'acord amb l'Eq. 3.23, el trobarem resolent $(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 1 - 2x$. Fent $x = 0$ tenim $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així, l'altra solució particular serà

$$\vec{x}_2(t) = e^{5t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

Finalment, la solució general del sistema homogeni és $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$, que, en forma de matriu fonamental de solucions, s'escriu com

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular les constants per a satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 2 - t \\ -5 + 2t \end{pmatrix}$$



3.6. Sistemes no homogenis

Com en el cas d'equacions no homogènies d'ordre n , veurem el mètode de variació de les constants per a sistemes d'equacions lineals. Aquest procediment permet trobar una solució particular del sistema complet a partir de la solució general del sistema homogeni, encara que la matriu del sistema no tingui coeficients constants.

Suposem que $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'Eq. 3.18, i assajem una solució de l'Eq. 3.2 en la forma

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \vec{c}(t) \quad (3.24)$$

Substituïnt-la en l'Eq. 3.2 veurem com ha de ser la funció vectorial $\vec{c}(t)$:

$$X'(t)\vec{c}(t) + X(t)\vec{c}'(t) = A(t)X(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t)$$

Però com que la matriu fonamental de solucions del sistema homogeni compleix

$$X'(t)\vec{c}(t) = A(t)X(t)\vec{c}(t)$$

ens queda

$$X(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)$$

Resolent aquest sistema per a $\vec{c}'(t)$ i integrant, obtenim la solució particular buscada. En efecte, com $\det X(t) \neq 0$, podem invertir el sistema,

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t)\vec{b}(t); \quad \vec{c}(t) = \int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt$$

Per tant, una solució particular serà

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt \quad (3.25)$$

Finalment, podem escriure la solució general del sistema complet tot afegint-hi la solució general del sistema homogeni:

$$\vec{x}(t) = X(t) \left(\int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt + \vec{c} \right), \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

Exemple 33 Trobar la solució general del sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{2t} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solució.

El sistema homogeni ja havia estat estudiat en l'exemple 31. La matriu fonamental de solucions era

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix}$$

La seva inversa és

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució particular $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{c}(t)$ satisfarà

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t)\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -5e^{8t} \end{pmatrix}$$

Ara integrem cada component,

$$\int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \int e^{3t} dt \\ \int -5e^{8t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix}$$

I ja podem escriure la solució particular,

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

Finalment, la solució general del sistema complet és

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

Observem que també hauríem pogut provar el mètode dels coeficients indeterminats amb una solució particular de la forma $e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

✓

En el mètode dels coeficients indeterminats per a sistemes d'equacions, la solució que es conjectura segueix bàsicament els mateixos criteris que per a equacions escalars, però, en aquest cas, les constants són vectors.

A part dels mètodes vistos, hi ha maneres alternatives de resoldre equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals, com per exemple, aplicar la transformada de Laplace.