
PROBLEMES D'ÀLGEBRA LINEAL

ETSETB

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
Curs 2018-19

1 Matrius i determinants

1. Calculeu, en el cas en què sigui possible, la matriu suma $A + B$ i la matriu producte AB de les següents matrius:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Siguin A , B i C matrius quadrades. Digueu si les següents propietats són certes o no. En cas afirmatiu, demostreu-ho. En cas contrari, doneu un contraexemple.

- (a) $AB = BA$.
- (b) Si $AB = 0$, aleshores $A = 0$ o $B = 0$.
- (c) Si $AB = AC$, aleshores $A = 0$ o bé $B = C$.
- (d) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
- (e) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
- (f) $(AB)^t = A^t B^t$.
- (g) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- (h) $\text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.
- (i) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) \text{rang}(B)$.
- (j) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$.
- (k) $\text{rang}(\lambda A) = \lambda \text{rang}(A)$, on λ és un escalar.
- (l) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (m) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$, on λ és un escalar.

3. Sigui J la matriu $n \times n$ que té tots els seus elements iguals a 1. Per a cada natural $k \geq 1$ calculeu la matriu J^k .

4. Calculeu el determinant de les següents matrius:

$$(a) \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}, \text{ matriu quadrada d'ordre } n.$$

5. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculeu el determinant de $C^{-1}ACBA^{-1}$.

6. Sigui $A = (a_{ij})$ la matriu 3×3 definida per $a_{ij} = 2^{i \cdot j}$. Calculeu el seu determinant.

7. Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3 , on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes. Sabent que el determinant de la matriu A val 2, calculeu el determinant de la matriu B donada per:

$$(a) B = (C_1 + 2C_2, C_1, C_1 + C_2 + C_3).$$

$$(b) B = (C_1 + C_2, C_1, C_1 + C_2 + 2C_3).$$

$$(c) B = (C_1 + C_2 + C_3, C_1 + C_2, C_2 + C_3).$$

8. Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3 , on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes. Si A és invertible demostreu que, aleshores, també ho és la matriu B donada per:

$$(a) B = (C_1, C_2 + 4C_1, C_3 + 2C_2 + 8C_1).$$

$$(b) B = (C_1, C_2 + 9C_1, C_3 + 3C_2 + 27C_1).$$

9. Calculeu el rang de les matrius:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -7 & 4 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Calculeu les inverses de les matrius:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

11. Calculeu la inversa de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+2j & 1 \\ 2+j & 2 & 0 \\ -j & 2-j & -1+j \end{pmatrix}$$

12. Resoleu els següents sistemes per Gauss:

$$(a) \begin{cases} x + y - 3z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - 5z = 2 \\ x - 3y + 6z = 9 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 8 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \\ x + 3y + 2z + t = 4 \\ 3x + 5y - 4z - t = -6 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + z + t + u = 1 \\ x - y + z - t - u = 2 \\ x + y - z + t - u = -1 \end{cases}$$

13. Resoleu els següents sistemes:

$$(a) \begin{cases} x + (1+2j)y + z = 0 \\ (2+j)x + 2y = 145 \\ -jx + (2-j)y + (-1+j)z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (-1+3j)x - (1+3j)y + 3z = 2-j \\ 5x + 5y + 2z = j \\ (2-j)x + (2+j)y = 0 \end{cases}$$

14. Resoleu els sistemes d'equacions següents en funció dels valors del paràmetre real a :

$$(a) \begin{cases} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

15. Discuti el següent sistema segons els valors del paràmetre $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} a^2x + y + z = 3 \\ x + a^2y + z = 4 - a \\ x + y + a^2z = 2 + a^2 \end{cases}$$

16. Discuti els següents sistemes segons els valors dels paràmetres reals a , b , k i m :

$$(a) \begin{cases} a^2x + y + z = 3 \\ x + a^2y + z = 4 - a \\ x + y + a^2z = 2 + a^2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2y = 3(k + m) \\ x - y = 2(k + m) + 1 \\ mx + ky = m^2 - k^2 - 6 \\ kx + my = k^2 - m^2 + 6 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + (1 - m)z = m + 2 \\ (1 + m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

17. Resoleu les següents equacions matricials $AX = B$, on:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solucions

1. (a) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A + B$ no es pot calcular, $AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, AB no es pot calcular.

(d) No es pot calcular ni $A + B$ ni AB .

2. (a) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(f) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(g) És cert. Val en tot grup.

(h) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(j) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(k) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\lambda = 2$.

(l) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(m) Fals. Per exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\lambda = 2$.

3. $J^k = n^{k-1}J$.

4. (a) 9, 18.

(b) 320, -60

(c) -264, 22.

(d) $(a-b)(a-c)(b-c)$, $4abc$.

(e) 0.

5. El determinant val -11.

6. $\det(A) = 2^{10}3$.
7. (a) $\det(B) = -4$.
 (b) $\det(B) = -4$.
 (c) $\det(B) = 2$.
8. —
9. Ambdues tenen rang dos.
10. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 17 & -3 \\ 1 & -12 & 2 \end{pmatrix}$
 (b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{4}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix}$
 (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{8}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$
 (d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
 (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
 (f) $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
11. $\frac{1}{145} \begin{pmatrix} 2 + 34j & 40 - 45j & -16 + 18j \\ 15 - 35j & 10 + 25j & 25 - 10j \\ 58 - 29j & 0 & -29 - 58j \end{pmatrix}$
12. (a) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1 - 4z$, $y = 3 + 7z$.
 (b) Sistema incompatible.
 (c) Sistema compatible determinat. Solució: $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, $t = 3$.
 (d) Sistema compatible indeterminat. Solució: $x = 1/2 + u$, $y = -1/2 - u - t$, $z = 1 - u$.
13. (a) Sistema compatible determinat. Solució: $x = 40 - 45j$, $y = 10 + 25j$, $z = 0$.
 (b) Sistema compatible determinat. Solució: $x = \frac{6 + 13j}{10}$, $y = \frac{-14 - 3j}{10}$, $z = 2 - 2j$.
14. (a) Per $a = 0$ és un sistema compatible indeterminat. Per $a = -1$ sistema incompatible. Per $a \neq 0, 1$ sistema compatible determinat.
 (b) Per $a = 7$ és un sistema compatible determinat. Per $a \neq 7$ sistema incompatible.
 (c) Per $a \neq \frac{1}{5}$ és un sistema compatible determinat. Per $a = \frac{1}{5}$ sistema incompatible.
15. Si $a \neq \pm 1, \pm\sqrt{2}j$, aleshores el sistema és compatible determinat.
 Si $a = 1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
 Si $a = -1, \pm\sqrt{2}j$, aleshores el sistema és incompatible.
16. (a) Si $a \neq \pm 1$, aleshores el sistema és compatible determinat.
 Si $a = 1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
 Si $a = -1$, aleshores el sistema és incompatible.

- (b) Si $a \neq 1, -3$, aleshores per a tot b el sistema és compatible determinat.
Si $a = 1$ i $b = 1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $a = 1$ i $b \neq 1$, aleshores el sistema és incompatible.
Si $a = -3$ i $b = -1$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $a = -3$ i $b \neq -1$, aleshores el sistema és incompatible.
- (c) Si $k = 6$ i $m = -6$, aleshores el sistema és compatible determinat.
En cas contrari, el sistema és incompatible.
- (d) Si $m \neq 0, \pm 2$, aleshores el sistema és compatible determinat.
Si $m = 0$ o $m = -2$, aleshores el sistema és compatible indeterminat.
Si $m = 2$, aleshores el sistema és incompatible.
17. (a) Té solució única $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.
- (b) Té solució única $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- (c) No té solució.
- (d) Té infinites solucions. La solució general és $X = \begin{pmatrix} 1-a & -3-b \\ -a & -2-b \\ a & b \end{pmatrix}$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

2 Espais vectorials

1. Digueu quines de les següents proposicions són certes, (per $\mathbb{K}$ entenem $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):
 - (a) El conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \text{ tals que } x + y + z = 0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.
 - (b) El conjunt $\{(\lambda + \mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{K}^3 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.
 - (c) El conjunt $\{(\lambda + 2, \lambda, \mu) \in \mathbb{K}^3 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^3$.
 - (d) El conjunt $\{(x_1, x_2, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^4 \text{ tals que } x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.
 - (e) El conjunt $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{K}^4 \text{ tals que } x_3 + 2x_4 = 7\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{K}^4$.
 - (f) El conjunt $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tals que } x_1 < x_2\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.
 - (g) El conjunt de les solucions d'un sistema compatible $Ax = b$ de m equacions i n incògnites amb coeficients en $\mathbb{K}$, és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.
2. En $\mathbb{R}^3$ considerem el subespai vectorial $U = \langle (1, 2, 1), (3, 1, 5) \rangle$ i el subespai vectorial V generat pels vectors $(1, 2, 1)$, $(3, 1, 5)$ i $(3, -4, 7)$. Defineixen U i V el mateix subespai de $\mathbb{R}^3$?
3. Considerem el subespai vectorial $F = \langle (2, 1, -1), (8, -5, 1), (1, -4, 2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base d'aquest subespai i amplieu-la a una base de $\mathbb{R}^3$.
4. En $\mathbb{R}^4$ considerem el subespai vectorial F generat pels vectors $(1, 2, 1, 3)$ i $(2, 0, 3, 2)$, i el subespai G generat per $(-1, 6, -3, 5)$, $(0, 4, -1, 4)$ i $(3, 2, 1, -1)$. Comproveu que $F \subset G$, i amplieu una base de F fins a obtenir una base de G .
5. Doneu la dimensió i una base del subespai vectorial definit per $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x - y + z = x - 2y = y + z = 0\}$.
6. Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$. Considerem els vectors $v_1 = u_1$, $v_2 = au_2 + u_3$ i $v_3 = u_1 + u_2 + bu_3$, on $a, b \in \mathbb{K}$ són escalars. Calculeu la base i la dimensió del subespai vectorial generat per v_1, v_2 i v_3 . Per a quins escalars a, b el conjunt de vectors $\{v_1, v_2, v_3\}$ és també una base de l'espai $\mathbb{K}^3$?
7. Considerem, en $\mathbb{R}^4$, els vectors $v = (10, 1, 6, -2)$, $u_1 = (1, -3, -2, 5)$, $u_2 = (3, -2, -4, 9)$, $u_3 = (4, -7, 2, 3)$. Pertany v al subespai generat per $\{u_1, u_2, u_3\}$? És $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base d'aquest subespai? En cas afirmatiu, trobeu la relació de dependència en $\{v, u_1, u_2, u_3\}$.
8. En $\mathbb{C}^3$ considerem els subespais F i G , on $F = \langle (0, j, 1), (0, 1, j) \rangle$, i on G és el subespai generat per $(1 - 2j, 1 + 2j, 1)$ i per $(5, -3 + 4j, 1 + 2j)$. És cert que $\mathbb{C}^3 = F \oplus G$?
9. Determineu per a quins valors del paràmetre a els subespais vectorials $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tals que } ix + (1 + j)y = (1 - j)x - jy + (1 + aj)z = 0\}$ i $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tals que } x + ay + (a + j)z = 0\}$ de $\mathbb{C}^3$ tenen intersecció nul·la.
10. Considerem els subespais $F = \langle (1, 1, -1, 2), (0, 1, 1, 1) \rangle$ i $G = \langle (1, 2, -3, 2), (1, -1, 0, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Trobeu les coordenades del vector $v = (4, 2, 0, 8)$ en una base de $F + G$. Determineu quins vectors $f \in F$ i $g \in G$ compleixen $f + g = v$. Raoneu perquè f i g no són únics.

11. Sigui $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Comproveu que $B_2 = \{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$ també és una base de $\mathbb{R}^3$. Si un vector té coordenades (a, b, c) en la base B_1 , quines coordenades té en la base B_2 ?
12. Demostreu que el conjunt de vectors $\{u_1, u_2, u_3\}$ és una base de $\mathbb{C}^3$, i trobeu les components del vector v en aquesta base, on u_1, u_2, u_3, v són:
- (a) $u_1 = (1, 2 + j, -j)$, $u_2 = (1 + 2j, 2, 2 - j)$, $u_3 = (1, 0, -1 + j)$, $v = (-3 + 6j, 3 + 4j, 9 - 3j)$.
- (b) $u_1 = (1, 2j, -j)$, $u_2 = (2, 1 + j, 1)$, $u_3 = (-1, 1, -j)$, $v = (1, 2, 0)$.
13. En $\mathbb{R}^3$ considerem les bases $B_1 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ i $B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$. Sigui $v \in \mathbb{R}^3$ un vector amb coordenades (x, y, z) en la base B_1 , i amb coordenades (x', y', z') en la base B_2 . Expressen x, y i z en funció de x', y' i z' .
14. Sigui u, v, w una base de $\mathbb{R}^3$. Si les coordenades dels vectors $(1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$ i $(1, 1, 0)$ en aquesta base són, respectivament, $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 2)$ i $(1, 1, -2)$, calculeu quins són els vectors u, v i w .
15. En $\mathbb{R}^4$ es consideren les famílies de vectors $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, on $u_1 = (0, 1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 0, -1)$, $u_3 = (2, 0, 1, 0)$, $u_4 = (0, 0, 1, 1)$, $v_1 = 2u_1 + u_2$, $v_2 = -u_1 + u_3 + u_4$, $v_3 = u_2 - 2u_3$, i $v_4 = 3u_4$.
- (a) Demostreu que B i B' són bases de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Sigui $x \in \mathbb{R}^4$ el vector que té components $(-1, 0, 1, 0)$ en la base B . Trobeu les seves components en la base B' i en la base canònica de $\mathbb{R}^4$.
- (c) Sigui e_1 el primer vector de la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Trobeu les coordenades de e_1 en la base B i en la base B' .
16. Considerem les famílies de vectors $B_1 = \{(1, -1, 0), (2, 1, 3)\}$ i $B_2 = \{(1, 5, 6), (1, 2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- (a) Demostreu que el subespai vectorial generat per la família de vectors B_1 coincideix amb el subespai vectorial que genera la família B_2 .
- (b) Sigui F el subespai de l'apartat anterior. Trobeu, en l'espai vectorial F , la matriu de canvi de base de la base B_1 a la base B_2 .
- (c) Trobeu les coordenades del vector $v = (-5, -7, -12) \in F$ en la base B_1 i en la base B_2 .
17. El servei d'espionatge de Sildàvia ha aconseguit robar un plànol secret del govern de Bordúria. En el plànol hi apareixen la seu del Ministeri d'Indústria de Bordúria, la muntanya més alta del país (el pic de Montalt), i un petit poble anomenat Blackadder. Amb gran desesperació els espies veuen, però, que no hi apareix el seu objectiu: la mundialment famosa fàbrica secreta.
- Després d'interceptar i desxifrar missatges per ràdio dels bordurs els espies sildaus saben que: en cert sistema de referència que té com origen la seu del ministeri, les coordenades del pic de Montalt són $(3.5, 2.1)$, les coordenades de la plaça gran de Blackadder són $(1.9, 0.7)$, i les coordenades de la fàbrica secreta són $(5, -2.1)$. Amb aquestes dades, i desconecient el sistema de referència emprat pels bordurs, els espies sildaus poden localitzar la fàbrica en el plànol. Com?
18. Digueu quines de les següents proposicions són certes, (per $\mathbb{K}$ entenem $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):
- (a) El conjunt $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ b & c & b+2 \end{pmatrix} \text{ amb } a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{C})$.
- (b) El conjunt $\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \text{ amb } \text{tr}(A) = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- (c) El conjunt $\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \text{ amb } \det(A) = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- (d) El conjunt $\{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \text{ tals que } AM = MA\}$, on $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ és una matriu fixada, és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

- (e) El conjunt dels polinomis reals de grau més gran que 4 és un subespai vectorial de $\mathbb{R}[x]$.
- (f) El conjunt $\{p \in \mathbb{C}[x] \text{ tals que } p(1+j) = 0\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{C}[x]$.
19. Trobeu $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que les matrius $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 9 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}$ siguin linealment dependents. Trobeu la relació de dependència.
20. Sigui $E = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Trobeu una base i la dimensió del subespai vectorial F de E definit per $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ amb } a, b \in \mathbb{R} \right\}$, i determineu un subespai $G \subset E$ de manera que $E = F \oplus G$.
21. Sigui E el $\mathbb{R}$ -espai vectorial de les funcions reals de variable real. Trobeu la dimensió i una base dels subespais vectorials de E generats per les funcions:
- e^{ax}, xe^{ax} .
 - $e^x, e^{-x}, \cosh x$.
 - $1, \cos 2x, \sin^2 x$.
 - $e^{ax}, xe^{ax}, x^2 e^{ax}$.
 - $\cos x, \sin x$.
 - $e^x \cos x, e^{-x} \sin x$.
22. Demostreu que $\{1+x^3, 2x+3x^2, 1-x^2, x+2x^2\}$ és una base de $\mathbb{R}_3[x]$ i trobeu les coordenades de $1+5x+10x^2+2x^3$ en aquesta base.
23. Pels següents valors de la matriu A , trobeu les bases dels quatre subespais associats, $\text{Col}(A)$, $\text{Col}(A^T)$, $\text{Nul}(A)$ i $\text{Nul}(A^T)$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
24. Justifiqueu que si la matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és de rang r i existeix un vector no nul $b \in \mathbb{R}^m$ pel que el sistema $Ax = b$ és incompatible, llavors el sistema $A^T y = 0$ admet alguna solució no trivial.

Solucions

1. (a) Certa.
(b) Certa.
(c) Falsa.
(d) Falsa.
(e) Falsa.
(f) Falsa.
(g) Certa només en el cas homogeni.
2. U i V defineixen el mateix subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.
3. Una base de F és $\{(2, 1, -1), (1, -4, 2)\}$ i el vector $(0, 0, 1)$ completa aquesta base a una de $\mathbb{R}^3$.
4. $G = \langle (1, 2, 1, 3), (2, 0, 3, 2), (3, 2, 1, -1) \rangle$.
5. És un subespai de dimensió 1. Una base és $(-2, -1, 1)$.
6. La dimensió val 2 si $a, b \in \mathbb{K}$ són tals que $ab = 1$ i, en aquest cas, els vectors v_1, v_2 determinen una base del subespai. La dimensió val 3 si $a, b \in \mathbb{K}$ són tals que $ab \neq 1$ i, en aquest cas, els vectors v_1, v_2, v_3 determinen una base del subespai. Per tant els vectors v_1, v_2, v_3 determinen una base de l'espai E si, i només si, $ab \neq 1$.
7. Sí, v pertany a aquest subespai. Sí, $\{u_1, u_2, u_3\}$ és una base del subespai que generen aquests vectors. Les components de v en aquesta base són $(-7, 3, 2)$.
8. Sí.
9. $F \cap G = \{0\}$ si i només si $a \neq 1$.
10. El vector v té coordenades $(2, 2, 2)$ en la base $\{(1, 1, -1, 2), (0, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 1)\}$ de $F + G$. Es té que $f = (2, 4, 0, 6) - \lambda(2, 1, -3, 3)$ i $g = (2, -2, 0, 2) + \lambda(2, 1, -3, 3)$ per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.
11. $(a - b, b - c, c)$.
12. (a) Les components de v en la base u_1, u_2, u_3 són $(j, 2 + j, -3)$.
(b) Les components de v en la base u_1, u_2, u_3 són $((-4 - 7j)/15, (12 + j)/15, (1 - j)/3)$.
13. $x = (x' - y' + z')/2$, $y = (-x' + y' + z')/2$, $z = (x' + y' - z')/2$.
14. $u = (2, 0, 1)$, $v = (-3, 1, 0)$, $w = (-1, 0, 1/2)$.
15. (a) —
(b) Les components de x en la base B' són $(0, 1, 0, -1/3)$ i en la base canònica x té components $(2, -1, 0, 0)$.
(c) $e_1 = (0, -1/3, 1/3, -1/3)_B = (-1/12, -1/6, -1/4, -1/18)_{B'}$.
16. (a) —
(b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
(c) $v = (3, -4)_{B_1} = (1, -6)_{B_2}$.
17. Els espies sildaus han estudiat àlgebra lineal i dominen perfectament els canvis de base. Les coordenades de la fàbrica són $(-4.86, 11.59)$ en la base $e_1 = OA$, $e_2 = OB$, on O és el ministeri, A és el pic de Montalt, i B és la plaça gran de Blackadder.
18. (a) Falsa.
(b) Certa.
(c) Falsa.
(d) Certa.

- (e) Falsa.
- (f) Certa.
19. A , B i C són linealment dependents si i només si $a = 33$ i $b = 48$. Aleshores: $3A + 9B - C = 0$.
20. Els vectors $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formen una base de F que té, doncs, dimensió 2. Podem considerar $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
21. (a) La dimensió és 2. El conjunt $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ és una base.
 (b) La dimensió és 2. El conjunt $\{e^x, e^{-x}\}$ és una base.
 (c) La dimensió és 2. El conjunt $\{1, \cos 2x\}$ és una base.
 (d) La dimensió és 3. El sistema de generadors donat és una base.
 (e) La dimensió és 2. El sistema de generadors donat és una base.
 (f) La dimensió és 2. El sistema de generadors donat és una base.
22. Les coordenades són $(2, 1, -1, 3)$.
23. (a) $\text{Col}(A^T) = \langle (1, 2, 4) \rangle$; $\text{Col}(A) = \langle (1, 2) \rangle$; $\text{Nul}(A) = \langle (-2, 1, 0), (-4, 0, 1) \rangle$; $\text{Nul}(A^T) = \langle (-2, 1) \rangle$.
 (b) $\text{Col}(A^T) = \langle (1, 2, 4), (2, 5, 8) \rangle$; $\text{Col}(A) = \langle (1, 2), (2, 5) \rangle$; $\text{Nul}(A) = \langle (-4, 0, 1) \rangle$; $\text{Nul}(A^T) = \langle (0, 0) \rangle$.
 (c) $\text{Col}(A^T) = \langle (0, 1, 2, 3, 4), (0, 0, 0, 1, 2) \rangle$; $\text{Col}(A) = \langle (1, 1, 0), (3, 4, 1) \rangle$;
 $\text{Nul}(A) = \langle (1, 0, 0, 0, 0), (0, 2, -1, 0, 0), (0, 2, 0, -2, 1) \rangle$; $\text{Nul}(A^T) = \langle (1, -1, 1) \rangle$.
 (d) $\text{Col}(A^T) = \langle (0, 3, 3, 3), (0, 1, 0, 1) \rangle$; $\text{Col}(A) = \langle (3, 0, 1), (3, 0, 0) \rangle$; $\text{Nul}(A) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle$;
 $\text{Nul}(A^T) = \langle (0, 1, 0) \rangle$.
 (e) $\text{Col}(A^T) = \langle (1) \rangle$; $\text{Col}(A) = \langle (1, 4, 5) \rangle$; $\text{Nul}(A) = \langle (0) \rangle$; $\text{Nul}(A^T) = \langle (-4, 1, 0), (-5, 0, 1) \rangle$.
24. Ha de complir-se $r < m$. La dimensió de $\text{Nul}(A^T)$ és precisament $m - r$; per tant, l'espai nul per l'esquerra té algun vector no nul.

3 Espai euclidià

1. Donats dos vectors $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, de $\mathbb{R}^2$, determineu si defineix un producte escalar l'operació $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.
2. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, determineu quines de les següents aplicacions $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defineixen un producte escalar:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right). & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2. \\ \text{(c)} \quad f(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i y_i|. & \text{(d)} \quad f(x, y) &= x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

3. Determineu quines de les següents matrius són la matriu (respecte de la base canònica) d'algun producte escalar de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Calculeu la matriu del producte escalar habitual de $\mathbb{R}^3$ en la base

$$\{(1, 2, -1), (-2, 3, -2), (1, 1, 2)\}$$

5. Considereu a $\mathbb{R}^3$ el producte escalar tal que la seva matriu en la base canònica és

$$G = \begin{pmatrix} 34 & -12 & 5 \\ -12 & 41 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu d'aquest producte escalar en la base $\{(2, -1, 1), (0, 1, 2), (3, 1, 0)\}$.

6. Calculeu l'angle entre els vectors $u = (2, -1, 0)$ i $v = (2, 0, 1)$ en l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar que en la base canònica té matriu $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
7. Sigui $(E, \cdot)$ un espai euclidià, on $\cdot$ representa un producte escalar. Siguin u, v, w vectors de E tals que $\|u\| = \|v\| = 1$, $\|w\| = 2$, $\text{ang}(u, w) = \text{ang}(v, w) = \pi/3$ i $\text{ang}(u, v) = \pi/2$. Calculeu $(u + v) \cdot (v + w)$.
8. Sigui $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ i $(1, 0)$ i $(0, 2)$ dos vectors unitaris, tots donats en la base canònica. Determineu la matriu de producte escalar en la base B i en la base canònica. Calculeu l'angle entre $(-1, 0)$ i $(0, 2)$.

9. Trobeu una base ortonormal de l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ respecte del producte escalar que en la base canònica té matriu

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Considereu l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar habitual. Trobeu una base ortonormal del subespai $F = \langle (1, 2, -1, 0), (2, 3, 2, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$.
11. Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal d'un espai euclidià de dimensió 3. Trobeu els valors de α i β reals tals que els vectors $v_1 = \alpha u_2 + \beta u_3$, $v_2 = \alpha u_3 + \beta u_1$ i $v_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ són unitaris i que dos a dos formen un angle de $\pi/3$.
12. (a) Existeix algun producte escalar a $\mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 2, 1), (-1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ sigui una base ortonormal?
 (b) En cas afirmatiu, és únic?
 (c) És aquesta l'única base ortonormal d'aquest espai euclidià?
 (d) Trobeu la matriu d'aquest producte escalar en la base canònica.
 (e) Calculeu $(0, 2, 3) \cdot (0, 3, 2)$.
13. Donat el subespai vectorial de l'espai euclidià $\mathbb{R}^5$, $W = \langle (1, 2, 3, -1, 2), (2, 4, 7, 2, -1) \rangle$, trobeu una base del seu complement ortogonal.
14. A l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$, amb el producte escalar habitual:

- (a) Trobeu unes equacions que defineixin $H^\perp$, on H el subespai definit per les equacions

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- (b) Trobeu una base de $F^\perp$, on F és el subespai generat pels vectors $(1, 0, 2, 1)$ i $(0, 1, -2, 1)$.
15. A l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$, amb el producte escalar habitual, trobeu la projecció ortogonal i la component ortogonal del vector x respecte del subespai H , si:
- (a) $x = (4, -1, -3, 4)$ i $H = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3) \rangle$.
- (b) $x = (7, -4, -1, 2)$ i H és el subespai definit per les equacions

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

16. Sigui E un espai euclidià i sigui $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal. Trobeu la distància mínima de $v = (6, 0, 4)_B$ i $F = \langle (1, 1, 1)_B, (1, 0, 3)_B \rangle$

17. Sigui l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar que a la base canònica té matriu $G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $F = \langle (1, -1, 0) \rangle$ i $v = (2, 1, 1)$. Trobeu el vector $v_1 \in F$ que fa mínima la distància $d(v, F)$. Doneu també aquesta distància.

18. Trobeu els valors de x, y, z que fan mínim l'error del sistema sobredeterminat:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 5y + 2z = 6 \\ 4x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

19. Les mesures, preses en un laboratori, d'una certa magnitud m al llarg del temps t vénen donades per la taula següent:

t	m
1	-5
2	-3
3	1
4	10
5	25
6	40

Se sap que la magnitud $m(t)$ segueix una llei quadràtica, és a dir, $m(t) = at^2 + bt + c$. Trobeu els valors de a, b, c que proporcionen l'error quadràtic mínim de les mesures.

20. Determineu si l'espai vectorial de les funcions reals contínues a l'interval unitat admet estructura d'espai euclidià amb el producte $f \cdot g = \int_0^1 e^t f(t)g(t)dt$.
21. (a) Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ respecte de la mètrica $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
 (b) Donats $f(x) = x + 2$ i $g(x) = x^2 - 2x - 3$, calculeu $f \cdot g$ i la norma de f , respecte de la mètrica anterior.
22. Sigui E un espai euclidià i siguin $x, y \in E$ tals que $d(x, y) = 3$, $d(x, 2y) = 5$ i $\|x\| = \|y\|$. Trobeu $x \cdot y$.
23. Considereu l'espai euclidià format per les funcions integrables a l'interval $(-1, 1)$. Sigui el producte escalar definit per

$$f \cdot g = \int_{-1}^1 x^2 f(x)g(x) dx$$

Es demana:

- (a) Tot aplicant el mètode de Gramm-Schmidt al conjunt de polinomis $\{1, x, x^2\}$, trobeu una base ortonormal del subespai de polinomis de grau més petit o igual a 2.
- (b) Sigui $f(x)$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Aproximeu $f(x)$ a l'interval $(-1, 1)$ amb una combinació lineal de la base trobada a l'apartat anterior.

24. A l'espai vectorial de funcions contínues a l'interval $[-1, 1]$ considerem el producte escalar definit per $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ i el conjunt de funcions $B = \{\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x\}$. Sigui F el subespai generat per B . Es demana:
- (a) Proveu que els elements de B son ortogonals respecte el producte escalar donat
- (b) Trobeu la funció de F que millor aproxima la funció $f(x) = x$ respecte la mètrica donada.

Solucions

1. Sí, és un producte escalar.
2. És producte escalar l'aplicació de l'apartat (b).
3. Només la tercera matriu correspon a un producte escalar.
4. $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 17 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 237 & -46 & 195 \\ -46 & 69 & 45 \\ 195 & 45 & 275 \end{pmatrix}$
6. L'angle entre u i v és aproximadament 0.707 radians.
7. 3.
8. $G_B = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $G_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ on B_0 representa la base canònica. L'angle és $\pi/3$.
9. Una base ortonormal és $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1, -1, 3)$.
10. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 3, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 0, -1) \right\}$.
11. $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
12. (a) Sí.
(b) Sí, és únic.
(c) No és l'única base ortonormal per aquest producte.
(d) La matriu del producte escalar en la base canònica és $\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 29 & -13 & 7 \\ -13 & 11 & -4 \\ 7 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.
(e) 2.
13. $(2, -1, 0, 0, 0)$, $(13, 0, -4, 1, 0)$, $(-17, 0, 5, 0, 1)$.
14. (a) Unes equacions que defineixen $H^\perp$ són $\begin{matrix} 6x_1 & -9x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_4 & = & 0 \end{matrix}$.
(b) Els vectors $(-2, 2, 1, 0)$ i $(-1, -1, 0, 1)$ són una base de $F^\perp$.
15. (a) La projecció ortogonal de x sobre H és $(1, -1, -1, 5)$, i la seva component ortogonal és $(3, 0, -2, -1)$.
(b) La projecció ortogonal de x sobre H és $(0, -3/2, 3/2, 0)$, i la seva component ortogonal és $(7, -5/2, -5/2, 2)$.
17. $v_1 = \frac{7}{2}(1, -1, 0)$, $d(v, F) = \sqrt{11/2}$.
18. $x = 1$, $y = 1/5$, $z = 2$.
19. $a = 1.95$, $b = -4.54$, $c = -2.30$.
20. Sí, és un espai euclidià.
21. (a) $\{1, \sqrt{3}(-1 + 2x), \sqrt{5}(1 - 6x + 6x^2)\}$.
(b) $-37/4$; $\sqrt{19/3}$.
22. $\frac{5}{2}$.
23. (a) $\{\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}x, \frac{\sqrt{14}}{2}(5x^2 - 3)\}$.
(b) $f(x) \simeq \frac{1}{2} + \frac{5}{8}x$.

4 Aplicacions lineals

1. Diguen quines de les següents aplicacions són lineals, (per $\mathbb{K}$ entenem $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$):

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on $f(x, y) = x + y$.
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on $f(x, y) = xy$.
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (0, 0)$.
- (d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (7, x + y)$.
- (e) $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$, on $f(x, y, z) = (x + 3y, x - y + z)$.
- (f) $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^3$, on $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$.
- (g) $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, on $f(x, y) = (x + y + 3, x - y + 3)$.
- (h) $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$, on $f(x, y, z) = (x + y, x + z, x - y + z^2)$.
- (i) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, on $f(x, y) = (jx, (1 + j)x + (2 + 3j)y)$.
- (j) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, on $f(x, y, z) = (jx, |y|, \bar{z})$.

2. Per a cada una de les següents aplicacions $\mathbb{K}$ -lineals f de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$: doneu la matriu associada a f en les bases canòniques; diguen si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva; calculeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f ; i determineu l'aplicació inversa f^{-1} en cas que existeixi.

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f(x, y) = (x + y, -y)$.
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f(x, y) = (x - y, 2x + 3y, 3x + 2y)$.
- (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$.
- (d) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, on $f(x, y) = ((1 + j)x + 2y, x + (1 - j)y)$.
- (e) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, on $f(x, y, z) = (x + jy + (1 + j)z, jx - y - (1 - j)z)$.
- (f) $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, on $f(x, y, z) = ((1 + 2j)x, -jy, (1 - 2j)z)$.

3. Per a les següents aplicacions $\mathbb{K}$ -lineals f_1 i f_2 , diguen si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f_1(x, y, z, t) = (x + t, y + t, z + t)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.
- (b) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $f_1(x, y, z) = (x + y, z, x + y)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, y + z)$.
- (c) $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, on $f_1(x, y) = (x, x + y, x - y)$, $f_2(x, y, z) = (x, x - y, x + y + z, x - z)$.
- (d) $f_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, on $f_1(x, y) = (jy, -jx, x + y)$, $f_2(x, y, z) = (x + z, jy + jz, y + z)$.
- (e) $f_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, on $f_1(x, y) = (x, jx + y, jy)$, $f_2(x, y, z) = (x + jy, y + jz)$.
- (f) $f_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $f_2 : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, on $f_1(x, y) = (x + 3y, y, y)$, $f_2(x, y, z) = (x - y - z, y - z)$.

4. Demostreu que $f^2 = f$, on f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x, y) = (x/2 + y, x/4 + y/2)$.

5. Siguien f_1 i f_2 els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ definits per $f_1(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y + z, x + 2y + z)$ i $f_2(x, y, z) = (2y + z, x + 3y + z, x + y)$. Donar bases del nucli i de la imatge de $f_1 - f_2$. Existeixen vectors no nuls $v \in \mathbb{R}^3$ tals que $f_1(v) = f_2(v)$? En cas afirmatiu, determineu-los.
6. Considerem, per a cada valor del paràmetre real $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfisme f_a de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_a(x, y, z) = ((a - 2)x - y + 2z, 2x + (1 - a)y + (a + 1)z, ax - 3y + 2az)$. Per a quins valors del paràmetre a l'endomorfisme f_a és un epimorfisme, un monomorfisme o un isomorfisme?
7. Sigui $a \in \mathbb{R}$. Considerem l'aplicació lineal $f_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on $f_a(x, y, z) = (ax - z, x + y + z, 2y)$.
 - (a) Trobeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f_a segons els valors de a . Per a quins valors $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme f_a és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme?
 - (b) Siguien $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ els subespais vectorials definits per $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } 2x + y + z = 0\}$ i $S' = \langle (1, -1, 2), (-1, -1, 6) \rangle$. Determineu els valors de a per als quals $f_a(S) = S'$.
8. Es considera, en $\mathbb{R}^3$, l'endomorfisme f_a definit per $f_a(x, y, z) = (x + az, ay + x, z + ay)$, on a és un paràmetre real.
 - (a) Trobeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de f_a segons els valors de a . Per a quins valors $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme f_a és un monomorfisme, un epimorfisme o un isomorfisme?
 - (b) Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^3$ definit per $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x + y + z = 0\}$. Per a quins valors de a es té que $\dim f_a(F) = 1$? Quan $f_a(F) = F$? Quan $f_a(F) + F = \mathbb{R}^3$? Quan $f_a(F) \oplus F = \mathbb{R}^3$?
9. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(x, y, z) = (x - y + z, 0, x - z)$. Demostreu que els vectors $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -2, 3)$, $v_3 = (2, 0, -1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$, i trobeu la matriu associada a f en aquesta base. Determineu un vector $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(w) = 14v_1 + 7v_2 - 4v_3$.
10. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{C}^3$ donat per $f(x, y, z) = (8x - 9y + 25z, 2y - 5z, -2x + 3y - 8z)$. Demostreu que els vectors $v_1 = (-1 + 3j, 5, 2 - j)$, $v_2 = (-1 - 3j, 5, 2 + j)$, $v_3 = (3, 2, 0)$ determinen una base de $\mathbb{C}^3$, i trobeu la matriu associada a f en aquesta base. Calculeu $f(-jv_1 + jv_2 + \frac{1}{2}v_3)$.
11. Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ donat per $f(u_1) = u_1 + u_2 + u_3$, $f(u_2) = 2u_1 - u_3$, $f(u_3) = f(u_1 - u_2)$. Comproveu que els vectors $v_1 = u_1 - u_2$, $v_2 = u_2 + u_3$, $v_3 = 2u_1 - u_3$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$, i doneu la matriu associada a f en aquesta base.
12. Sigui $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{C}^3$. Sigui f un $\mathbb{C}$ -endomorfisme de $\mathbb{C}^3$ del qual sabem que $f(u_1) = u_1 + u_2$, que $f(u_3) = ju_1$, i que $\text{Ker } f = \langle u_1 + u_2 \rangle$. Comproveu que els vectors $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = (1 + j)u_1 + u_2$, $v_3 = ju_1 + ju_2$ determinen una base de $\mathbb{C}^3$, i doneu la matriu associada a f en aquesta base.
13. Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{K}^3$, i sigui $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathbb{K}^4$.
 - (a) Trobeu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ definida per $f(e_1) = v_1 + 2v_2 + v_3$, $f(e_2) = v_2 + v_3$, $f(e_3) = v_1 + v_2$, $f(e_4) = v_1 - v_2$.
 - (b) Comproveu que els vectors $u_1 = e_1 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_3$, $u_3 = e_1 + e_2$, $u_4 = e_1 - e_2 - e_3$ determinen una base de $\mathbb{K}^4$, i que els vectors $w_1 = f(u_1)$, $w_2 = f(u_2)$, $w_3 = f(u_3)$ determinen una base de $\mathbb{K}^3$. Doneu la matriu associada a f en aquestes bases.
14. Trobeu la matriu en base canònica d'un endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ que a cada punt del pla li fa correspondre el seu simètric respecte la recta $y = ax$. Per fer-ho trobeu primer dos punts dels quals sigui fàcil trobar les seves imatges.

Solucions

1. (a) Lineal.
 (b) No lineal.
 (c) Lineal.
 (d) No lineal.
 (e) Lineal.
 (f) Lineal.
 (g) No lineal.
 (h) No lineal.
 (i) Lineal.
 (j) No lineal.
2. (a) Matriu: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. És isomorfisme amb inversa $f^{-1}(x, y) = (x + y, -y)$.
 (b) Matriu: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. És monomorfisme, però no és epimorfisme. La imatge té dimensió 2 i una base és $\{(1, 2, 3), (-1, 3, 2)\}$.
 (c) Matriu: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. És isomorfisme amb inversa $f^{-1}(x, y, z) = (x/3, x/3 - y, -x + y + z)$.
 (d) Matriu: $\begin{pmatrix} 1+j & 2 \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}$. No és monomorfisme, ni epimorfisme, ni isomorfisme. El nucli té dimensió 1 i una base és $\{(-1 + j, 1)\}$. La imatge té dimensió 1 i una base és $\{(1 + j, 1)\}$.
 (e) Matriu: $\begin{pmatrix} 1 & j & 1+j \\ j & -1 & -1+j \end{pmatrix}$. No és monomorfisme, ni epimorfisme, ni isomorfisme. El nucli té dimensió 2 i una base és $\{(-j, 1, 0), (-1 - j, 0, 1)\}$. La imatge té dimensió 1 i una base és $\{(1, j)\}$.
 (f) Matriu: $\begin{pmatrix} 1+2j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 1-2j \end{pmatrix}$. És isomorfisme i $f^{-1}(x, y, z) = ((1 - 2j)x/5, jy, (1 + 2j)z/5)$.
3. (a) No és monomorfisme. És epimorfisme. No és isomorfisme.
 (b) No és monomorfisme. És epimorfisme. No és isomorfisme.
 (c) És monomorfisme. No és epimorfisme. No és isomorfisme.
 (d) És monomorfisme. No és epimorfisme. No és isomorfisme.
 (e) És monomorfisme. És epimorfisme. És isomorfisme.
 (f) No és monomorfisme. No és epimorfisme. No és isomorfisme.
4. —
5. $\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } f_1(v) = f_2(v)\} = \langle (-2, -1, 1) \rangle$.
6. L'endomorfisme f_a és bijectiu si i només si $a \neq -1, 3$. Si $a = -1, 3$, aleshores f_a no és ni epimorfisme ni monomorfisme.
7. (a) Si $a \neq -1$, aleshores f és un automorfisme. Si $a = -1$, aleshores $\text{rang } f_{-1} = 2$. En aquest cas el nucli és el subespai generat pel vector $(1, 0, -1)$, i la imatge és el subespai generat pels vectors $(0, 1, 2)$ i $(-1, 1, 0)$.
 (b) $f_a(S) \neq S'$ per a qualsevol valor de a .

8. (a) Si $a = 0$, aleshores $\dim \operatorname{Im} f_a = 2$ i $\dim \operatorname{Ker} f_a = 1$, amb $\{(0, 1, 0)\}$ base del nucli i amb $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base de la imatge. Si $a = -1$, aleshores $\dim \operatorname{Im} f_a = 2$ i $\dim \operatorname{Ker} f_a = 1$, amb $\{(1, 1, 1)\}$ base del nucli i amb $\{(1, 1, 0), (0, -1, -1)\}$ base de la imatge. En aquest cas no és monomorfisme, ni epimorfisme, ni isomorfisme. Si $a \neq 0, -1$, aleshores $\dim \operatorname{Im} f_a = 3$ i $\dim \operatorname{Ker} f_a = 0$. Per tant: $\operatorname{Ker} f_a = \{0\}$ no té base; $\operatorname{Im} f_a = \mathbb{R}^3$ amb base la base canònica de $\mathbb{R}^3$; i, en aquest cas, f_a és automorfisme.
- (b) Per a cap valor de a . Si i només si $a = 1$. Si i només si $a \neq 1$. Per a cap valor de a .
9. $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 36 & -4 \end{pmatrix}, w = (26, 0, -13).$
10. $\begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, f(-jv_1 + jv_2 + \frac{1}{2}v_3) = (1, 12, 4).$
11. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13. (a) $\dim \operatorname{Im} f = 3, \operatorname{Im} f = E_3, \dim \operatorname{Ker} f = 1, \operatorname{Ker} f = \langle e_1 - e_2 - e_3 \rangle.$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
14. $\frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$

5 Diagonalització d'endomorfismes

1. Trobeu els valors i vectors propis de les següents matrius. Digueu quines d'elles són diagonalitzables i, si ho són, determineu una base on la matriu tingui forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -16+j & 35 & -24 \\ 0 & j & 0 \\ 12 & -26 & 18+j \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

2. Determineu els valors dels paràmetres per als quals les següents matrius són diagonalitzables i, en aquest cas, doneu la seva forma diagonal.

(a) $\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$

$$(c) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} -2a+3 & -4a+5 & 4a-9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -a+1 & -2a+2 & 2a-3 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} -2a+3 & 3a-3 & -8a-b+10 \\ -2a+2 & 3a-2 & -8a+2b+7 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

3. Trobeu una matriu $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ que tingui vectors propis $(1, 2, -1)$, $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, -2)$ amb valors propis -2 , 1 i 2 respectivament.

4. Sabent que $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$ i $(0, 1, -1)$ són vectors propis de la matriu $\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$, determineu a , b , c , p , q , r i els valors propis de la matriu.

5. Considerem l'endomorfisme $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_{a,b}(x, y, z) = (x + ay + bz, 3y, bx + z)$. Determineu per a quins valors dels paràmetres reals $a, b \in \mathbb{R}$ l'endomorfisme $f_{a,b}$ és diagonalitzable i té, exactament, dos valors propis diferents.

6. Sigui $a \in \mathbb{C}$, i sigui $f_a \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ l'endomorfisme definit per $f_a(x, y, z) = (2y, a^2x + az, -2ay)$. Per a quins valors del paràmetre a el subespai vectorial $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tals que } x + z = 0\}$ és un subespai invariant per f_a ?

7. Sigui $a \in \mathbb{R}$, i sigui f_a l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_a(x, y, z) = (x + ay + az, -x + y - z, x + 2z)$.

(a) Determineu els valors de a per als quals l'endomorfisme f_a és diagonalitzable. Per a aquests valors del paràmetre a doneu una base respecte de la qual la matriu tingui forma diagonal.

(b) Sigui $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x + 2y + 3z = 0\}$. Determineu els valors del paràmetre real a per als quals el subespai F és invariant per l'endomorfisme f_a .

8. Siguin f i g els endomorfismes de $\mathbb{R}^3$ definits per $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 5y + 2z, -2x - 5y - 2z)$, i per $g(x, y, z) = (-2y - 2z, 0, 2y + 2z)$. Determineu una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ respecte de la qual les matrius associades als endomorfismes f i g siguin diagonalitzables.

9. Trobeu una base ortonormal de vectors propis i la matriu diagonal associats a la matriu $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$.

10. Per a les següents matrius, calculeu una matriu ortogonal C tal que $D = C^T A C$ és diagonal.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Considereu l'endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ definit per la matriu $A = M(T, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifiqueu que T és diagonalitzable.
- (b) Trobeu una base ortonormal de vectors propis de T .
- (c) Escriviu la matriu T en la base de l'apartat anterior.

12. Diagonalitzeu les matrius simètriques següents i trobeu una base ortonormal de vectors propis:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

13. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Diagonalitzeu aquesta matriu, indicant la matriu diagonal D i la matriu C de canvi de base corresponent.
- (b) Diagonalitzeu ortogonalment la matriu A , indicant la matriu diagonal D i la matriu ortogonal P de canvi de base.

14. Donada la matriu A , trobeu la matriu regular C tal que $D = C^T A C$ és diagonal, en els casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. Determineu els valors del paràmetre b que fan diagonalitzable la matriu $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Si $b \neq 0$, determineu una base ortogonal de vectors propis de A i els respectius valors propis.

16. Un endomorfisme simètric f de $\mathbb{R}^3$ satisfà $f(u) = 3u$ per a tot vector $u \in \langle (0, 1, -1), (-1, 0, 1) \rangle$ i el seu determinant val 18. Trobeu la matriu de f en la base canònica.

17. D'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ sabem que tots els vectors del pla $x + 2y + 2z = 0$ són propis de valor propi 2 i que els ortogonals a ells són propis de valor propi -1 . Determineu una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ en la qual la matriu associada a f sigui diagonal.
18. Si T és un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que els vectors del pla $x + y - z = 0$ són propis de valor propi 1 i els de la recta perpendicular a aquest pla són propis de valor propi 2, determineu la matriu de T en la base canònica.
19. Calculeu els valors singulars de les següents matrius:

(a) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

20. Trobeu la descomposició en valors i vectors singulars de les següents matrius quadrades:

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $N = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$

21. Trobeu la descomposició en valors singulars de les següents matrius rectangulars:

(a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

22. Trobeu la descomposició com a suma de matrius de rang 1 de les matrius del problema anterior.

23. Calculeu els valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En la descomposició de A com a suma de matrius de rang 1, quina és la matriu del primer terme?

24. A partir dels valors i vectors singulars calculeu la matriu pseudoinversa A^+ de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Amb ella, calculeu la millor aproximació del sistema $A\vec{x} = (0, 0, 0, 1)^t$.

Solucions

1. (a) Els valors propis són 1 i 2. Els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(1, 0)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(-1, 1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable i $\mathbb{C}$ -diagonalitzable. Té forma diagonal $\text{Diag}(1, 2)$ respecte de la base $\{(1, 0), (-1, 1)\}$.
- (b) No té valors propis reals. No té vectors propis reals. No és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable.
Sobre $\mathbb{C}$ els valors propis són $1 + j$ i $1 - j$. Els vectors propis de valor propi $1 + j$ són $\langle(1, -j)\rangle$, i els de valor propi $1 - j$ són $\langle(1, j)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$ -diagonalitzable. Té forma diagonal $\text{Diag}(1 + j, 1 - j)$ respecte de la base $\{(1, -j), (1, j)\}$.
- (c) Els valors propis són 2 i -4 . Els vectors propis de valor propi 2 són $\langle(1, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle$, i els de valor propi -4 són $\langle(0, 1, -1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable i $\mathbb{C}$ -diagonalitzable. Té forma diagonal $\text{Diag}(2, 2, -4)$ respecte de la base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$.
- (d) Els valors propis són 1 i 2. Els vectors propis de valor propi 1 són $\langle(5, 0, 3), (0, 5, -4)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(1, 1, 0)\rangle$. La matriu és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable i $\mathbb{C}$ -diagonalitzable. Té forma diagonal $\text{Diag}(1, 1, 2)$ respecte de la base $\{(5, 0, 3), (0, 5, -4), (1, 1, 0)\}$.
- (e) Els valors propis són 0 i -3 . Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(2, 0, 1)\rangle$, i els de valor propi -3 són $\langle(-8, 1, -3)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$ -diagonalitzable ni $\mathbb{C}$ -diagonalitzable.
- (f) En $\mathbb{R}$ té un únic valor propi: 3. Els vectors propis de valor propi 3 són $\langle(-1, 1, 1)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable.
En $\mathbb{C}$ els valors propis són $3, 2 + j, 2 - j$. Els vectors propis de valor propi 3 són $\langle(-1, 1, 1)\rangle$, els de valor propi $2 + j$ són $\langle(-2 - j, j, 1)\rangle$, i els de valor propi $2 - j$ són $\langle(-2 + j, -j, 1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$ -diagonalitzable i té forma diagonal $\text{Diag}(3, 2 + j, 2 - j)$ respecte de la base $\{(-1, 1, 1), (-2 - j, j, 1), (-2 + j, -j, 1)\}$.
- (g) En $\mathbb{R}$ té un únic valor propi: 0. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1, 0, 1)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable.
En $\mathbb{C}$ té valors propis $0, 2j, -2j$. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(1, 0, 1)\rangle$, els de valor propi $2j$ són $\langle(1, j, -1)\rangle$, i els de $-2j$ són $\langle(1, -j, -1)\rangle$. La matriu és $\mathbb{C}$ -diagonalitzable i té forma diagonal $\text{Diag}(0, 2j, -2j)$ respecte de la base $\{(1, 0, 1), (1, j, -1), (1, -j, -1)\}$.
- (h) Té dos valors propis $i, 2 + j$. Els vectors propis de valor propi i són $\langle(-3, 0, 2)\rangle$, i els de valor propi $2 + j$ són $\langle(-4, 0, 3)\rangle$. La matriu no és $\mathbb{C}$ -diagonalitzable.
- (i) Els valors propis són 0 i 2. Els vectors propis de valor propi 0 són $\langle(3, 0, 1, 0)\rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle(1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -4)\rangle$. La matriu no és ni $\mathbb{R}$ -diagonalitzable ni $\mathbb{C}$ -diagonalitzable.
2. (a) En $\mathbb{R}$ diagonalitza si i només si $a = k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$. En aquest cas, té forma diagonal $\text{Diag}(\pm 1, \pm 1)$.
En $\mathbb{C}$ diagonalitza per a tot valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$. Té forma diagonal $\text{Diag}(\cos a + j \sin a, \cos a - j \sin a)$.
- (b) Si $a = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de b i c . La seva forma diagonal és $\text{Diag}(1, 1, 2)$.
Si $a \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.
- (c) Si $a \neq -1, 5$, aleshores la matriu és diagonalitzable per a tot valor de b . La seva forma diagonal és $\text{Diag}(-1, 5, a)$.
Si $a = 5$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.
Si $a = -1$ i $b = 0$, aleshores la matriu és diagonalitzable. La seva forma diagonal és $\text{Diag}(-1, -1, 5)$.
Si $a = -1$ i $b \neq 0$, aleshores la matriu no és diagonalitzable.
- (d) Mai és diagonalitzable.
- (e) Si $a > 0$, aleshores és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable i $\mathbb{C}$ -diagonalitzable. En aquest cas té forma diagonal $\text{Diag}(-1, +\sqrt{a}, -\sqrt{a})$.
Si $a = 0$, aleshores no és ni $\mathbb{R}$ -diagonalitzable ni $\mathbb{C}$ -diagonalitzable.
Si $a < 0$, aleshores és $\mathbb{C}$ -diagonalitzable però no és $\mathbb{R}$ -diagonalitzable. Sobre $\mathbb{C}$ té forma diagonal $\text{Diag}(-1, +j\sqrt{-a}, -j\sqrt{-a})$.

- (f) Diagonalitza si i només si $a \neq b$. En aquest cas, té forma diagonal $\text{Diag}(1, a, b)$.
3. És la matriu $\begin{pmatrix} 5/2 & -3 & -3/2 \\ 4 & -6 & -4 \\ -7/2 & 5 & 9/2 \end{pmatrix}$.
4. $a = 2$, $b = c = 1$, $p = 1$, $q = r = 1/2$, i els valors propis de $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$, $(0, 1, -1)$ són $3, 0, 3/2$ respectivament.
5. Per a $b = 0$ i $a \in \mathbb{R}$ arbitrari. Per a $b = 2$ i $a = 0$. Per a $b = -2$ i $a = 0$.
6. $a = 1$.
7. (a) L'endomorfisme és diagonalitzable si i només si $a = 0$. En aquest cas els valors propis són 1 i 2, els vectors propis de valor propi 1 són $\langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$, i els de valor propi 2 són $\langle (0, 1, -1) \rangle$. L'endomorfisme té forma diagonal $\text{Diag}(1, 1, 2)$ en la base $(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 1, -1)$.
- (b) $a = 2$.
8. En la base $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ els endomorfismes f i g són diagonalitzables. En aquesta base f té forma diagonal $\text{Diag}(0, 1, 3)$ i g té forma diagonal $\text{Diag}(2, 0, 0)$.
9. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)\}$; $D = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix}$.
10. (a) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = C^T A C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- (b) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = C^T A C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.
- (d) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = C^T A C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
11. (a) Tota matriu simètrica diagonalitza.
- (b) $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\}$.
- (c) $D = M(T, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
12. (a) $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- (b) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2), \frac{1}{3}(-1, 1, 1)\}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
- (d) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{3}(2, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -4, 1)\}$; $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.
- (e) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{3}(2, 2, 1), \frac{1}{3}(1, -2, 2), \frac{1}{3}(-2, 1, 2)\}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
13. (a) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$
14. (a) $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$
- (b) $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$
15. Com A és simètrica, és diagonalitzable per a tot $b \in \mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ és una base de vectors propis de A per a qualsevol $b \in \mathbb{R}$. Si $b \neq 0$, els valors propis són b (doble) i $-b$ (simple). Si $b = 0$, aquest és valor propi triple.
16. $M(f, \mathcal{B}_c) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$
17. $\mathcal{B} = \{\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{\sqrt{2}}{6}(-4, 1, 1)\}; M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$
18. $M(T, \mathcal{B}_c) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$
19. (a) $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 0.$
 (b) $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1.$
 (c) $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2.$
 (d) $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 1.$
20. (a) $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1; \vec{v}_1 = (0, 1), \vec{v}_2 = (1, 0); \vec{u}_1 = (0, -1), \vec{u}_2 = (1, 0);$
 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$
- (b) $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2; \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}, -\sqrt{2}); \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}, \sqrt{2}), \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}, -\sqrt{3});$
 $N = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$
21. (a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$
- (b) $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$
22. (a) $A = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$
- (b) $B = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$
23. $\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$
24. $A^+ = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} -18 & 45 & 45 & -54 \\ 24 & 10 & -10 & 22 \\ -6 & -9 & 10 & 32 \end{pmatrix}; \vec{x} = (\frac{2}{15}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{43}{45})^t.$