

Qüestions d'Àlgebra Lineal amb solucions

Rafael Cubarsi (rafael.cubarsi@upc.edu)

Departament de Matemàtiques, UPC

Setembre 2020

Matrius i determinants

1. El sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

- (a) és incompatible si $a = 1$
- (b) és compatible determinat si $a = 2$
- (c) és compatible indeterminat si $a = -1$
- (d) és compatible determinat si $a = 0$

2. Considerem $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tals que $AB = C$. Aleshores:

- (a) si A és regular, B també ho és
- (b) si A és regular, C també ho és
- (c) si B és regular, C també ho és
- (d) si C és regular, A també ho és

3. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $\vec{b} \neq 0$, és incompatible, llavors sempre es compleix

- (a) $m = n$
- (b) $\text{rang } A = n$
- (c) $\text{rang } A = m$
- (d) $\text{rang } A < m$

4. Un sistema homogeni $A\vec{x} = \vec{0}$, amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, compleix que:

- (a) si $m = n$, només admet la solució trivial
- (b) si $\text{rang } A < m$, és incompatible
- (c) si $m > n$, té infinites solucions
- (d) si $\text{rang } A = n$, té solució única

5. Si $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ tals que $AX = B$, aleshores:
- (a) $X \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$
 - (b) $X \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$
 - (c) $X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
 - (d) $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$
6. Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3 on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes. El determinant de la matriu $B = (C_1 + C_2 - C_3, C_1 + C_3, 4C_1 + 2C_3)$ val
- (a) 0
 - (b) $2 \det(A)$
 - (c) $-\det(A)$
 - (d) $\det(A)$
7. Considerem la matriu $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrius A , tals que $AB = BA$, són de la forma
- (a) $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$
 - (b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$
 - (c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & -a \end{pmatrix}$
 - (d) $A = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & -a \end{pmatrix}$
8. Si $A = [X, Y, Z]$ és la matriu 3×3 que té per columnes els vectors X, Y, Z , llavors la matriu $B = [-X + Y - Z, X + Z, -3X - Z]$ és
- (a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} A$
 - (b) $B = A \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - (c) $B = A \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
 - (d) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} A$

9. La forma esglaonada reduïda que resulta d'aplicar el mètode de Gauss-

Jordan a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ és:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Si $P = (X, Y, Z, T)$, $Q = (T, Z, Y, X)$, $R = -(X, Y, Z, T)$, són matrius amb columnes X, Y, Z, T , llavors

(a) $\det(P) = \det(Q)$

(b) $\det(P) = -\det(R)$

(c) $\det(R) = -\det(Q)$

(d) $\det(P + Q) = \det(P) + \det(Q)$

11. Del sistema $AX = B$, amb matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

es pot afirmar:

(a) Té exactament dues solucions

(b) Té solució única

(c) És incompatible

(d) Té infinites solucions

12. El sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \alpha x + z = 0 \\ y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

(a) és compatible indeterminat si $\alpha = 0$

(b) és incompatible si $\alpha = 3$

(c) és incompatible si $\alpha = 1$

(d) és compatible indeterminat si $\alpha = 3$

13. Sigui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. La matriu $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $AB = BA$ satisfà

(a) $b = c, d = a + 3c$

(b) $b = a, c = d + 3a$

(c) $b = d, d = c + 3a$

(d) $b = c, a = c + 3d$

14. Essent $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, assenyaleu quina de les següents expressions equival a

$(A + B)(A - B)$:

(a) $A^2 - B^2$

(b) $A^2 - AB + BA - B^2$

(c) $A(A + B) - B(A + B)$

(d) $(A - B)A + (A - B)B$

15. Doneu els valors de $a \in \mathbb{R}$ que fan incompatible el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x + ay = 0 \end{cases}$$

(a) $a = \frac{2}{3}$

(b) $a \neq \frac{2}{3}$

(c) El sistema és incompatible per a tot $a \in \mathbb{R}$

(d) El sistema és compatible per a tot $a \in \mathbb{R}$

16. El sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $m \neq n$, és:

(a) incompatible si $\text{rang } A < n$

(b) compatible indeterminat si $\text{rang } A < m$

(c) compatible determinat si $\text{rang } A = n$

(d) compatible determinat si $\text{rang } A = m$

17. Per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ és incompatible el sistema?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) $\alpha = 0$
- (b) $\alpha = 1$
- (c) $\alpha \neq 0$
- (d) Cap de les altres

18. Donada una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ amb rang r , és **FALS** que un sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$:

- (a) té com a mínim una solució si $r = m \leq n$
- (b) té com a molt una solució si $r = n \leq m$
- (c) té una única solució si $r = m = n$
- (d) no té solució si $r < \min\{m, n\}$

19. Si A i B són matrius reals quadrades d'ordre n és **FALS** que,

- (a) $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$
- (b) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- (c) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$
- (d) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

20. Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, quantes incògnites té el sistema $AX = B$?

- (a) 12
- (b) 6
- (c) 8
- (d) 4

21. Siguin $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Aleshores

- (a) $AB = (B^T A^T)^T$
- (b) $BA = (B^T A^T)^T$
- (c) $AB = B^T A^T$
- (d) $BA = A^T B^T$

22. Per $a \in \mathbb{R}$, el sistema d'equacions

$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ x + ay = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

és compatible determinat quan:

- (a) $a = -1$
- (b) $a = 3$
- (c) Mai
- (d) Cap de les altres és certa

23. És cert que el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- (a) no té solució
- (b) té infinites solucions
- (c) té solució única $(2, -1, 4)$
- (d) té per niqes solucions $(0, 1, 0)$ i $(1, 0, 2)$

24. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 3\beta & 6 \end{pmatrix}$, és cert que:

- (a) A és sempre invertible
- (b) Si $\alpha\beta = 1$, rang $A = 2$
- (c) Si $\alpha = 0$, rang $A = 1$
- (d) Cap de les anteriors

25. Si $M = (A, B, C, D, E)$ i $N = (E, D, C, B, A)$ són matrius quadrades amb columnes A, B, C, D, E , llavors,

- (a) $\det(M) = \det(N)$
- (b) $\det(M) = -\det(N)$
- (c) $\det(M - N) = \det(M) + \det(N)$
- (d) $\det(M + N) = \det(M) + \det(N)$

26. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 - a & a \\ a^2 & 0 & a \end{pmatrix}$ amb $a \in \mathbb{R}$, és cert que:

- (a) rang $A = 0$, per a algun a
- (b) rang $A \geq 2$, per a tot a
- (c) A és invertible si $a \neq 1$
- (d) Cap de les altres és certa

27. Una matriu $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ satisfà $MM^T = I$. Llavors és cert que

- (a) $\det M = 0$
- (b) $\text{rang } M < n$
- (c) $MM^T = M^T M$
- (d) M és simètrica

28. Per a $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, el determinant de la matriu
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

- (a) val 1
- (b) val 0
- (c) depèn del valor de n
- (d) Cap de les altres és certa

29. Siguin les matrius 3×3 de coeficients reals definides per les matrius columna C_1, C_2, C_3 : $A = (C_1, C_2, C_3)$, $B = (2C_1 + C_2, C_3, C_1 - C_2)$. Aleshores,

- (a) $\det B = \det A$
- (b) $\det B = 2 \det A$
- (c) $\det B = -\det A$
- (d) $\det B = 3 \det A$

30. Siguin les matrius 3×3 de coeficients reals definides per les matrius fila F_1, F_2, F_3 : $A = (F_1, F_2, F_3)^T$, $B = (2F_1 + F_2, F_3, -F_1 + F_2)^T$. Aleshores,

- (a) $\det B = \det A$
- (b) $\det B = 2 \det A$
- (c) $\det B = -3 \det A$
- (d) $\det B = 3 \det A$

31. Siguin $A = (X, Y, Z)$ i $B = (X, Z, -X)$ matrius 3×3 on X, Y, Z són columnes. Llavors, el determinant de la matriu $C = A + B$ val:

- (a) $\det C = \det A + \det B$
- (b) $\det C = 0$
- (c) $\det C = 2 \det A$
- (d) $\det C = -\det A$

32. Siguin A i B matrius quadrades. Quina de les següents afirmacions és correcta?

(a) $\text{rang}(A + B) \leq \max\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$

(b) $\text{rang}(A B) = \text{rang}(B A)$

(c) $|A B| = |B A|$

(d) $|\lambda A| = \lambda |A|$

33. Quin és el determinant de la matriu A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) -6

(b) 6

(c) -9

(d) 9

Solucions

1. b
2. d
3. d
4. d
5. c
6. b
7. a
8. b
9. b
10. a
11. c
12. c
13. a
14. b
15. b
16. c

17. a
18. d
19. c
20. c
21. a
22. c
23. b
24. d
25. a
26. d
27. c
28. b
29. d
30. c
31. c
32. c
33. d

Espais vectorials

34. Sigui $F = \{N \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ tals que } AN = NA\}$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La dimensió de F és

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 0
- (d) 3

35. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ té coordenades (u_1, u_2) en la base $\{(1, 0), (1, 2)\}$, per a trobar les coordenades de $\vec{u}$ en la base $\{(1, 2), (1, -1)\}$ farem

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

36. Els vectors $(2, 1, -3), (1, 0, -4), (m, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ són linealment dependents si

- (a) $m = 1$
- (b) $m = -3$
- (c) $m = \frac{5}{2}$
- (d) $m = -\frac{3}{2}$

37. Donats $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 3x - y + z = 0\}$ i $G = \langle (a, 0, 1), (b, -2, 2) \rangle$ on $a, b \in \mathbb{R}$, quan podem assegurar que la suma $F + G$ és directa?

- (a) Per a $a = b = 1$
- (b) En cap cas
- (c) Per $a - b \neq 1$
- (d) Per $a - b = 1$

38. Sabem que en una base B de $\mathbb{R}^2$ el vector $(1, 2)$ té coordenades $(2, 3)$ i el vector $(1, 3)$ té coordenades $(3, 2)$. Aleshores, les coordenades del vector $(1, 5)$ en la base B són
- (a) $(5, 0)$
 - (b) $(0, 5)$
 - (c) $(1, 5)$
 - (d) $(5, 1)$
39. Donat el subespai $F = \langle -x, x(x-2), 3x(1+x) \rangle$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, és cert que
- (a) $\dim F = 2$
 - (b) $F = \mathbb{R}_2[x]$
 - (c) $\dim F = 1$
 - (d) Cap de les altres
40. Considerem els següents subespais de $\mathbb{R}^4$,
 $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = x + y + z = 0\}$,
 $W = \langle (1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$. Llavors,
- (a) $\{(1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ és base de $V + W$
 - (b) $\{(-1, 2, 1, 1)\}$ és base de $V \cap W$
 - (c) $\{(1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ és base de $V \cap W$
 - (d) $\{(-1, 2, 1, 1)\}$ és base de $V + W$
41. Considerant els següents subespais de $\mathbb{R}^3$,
 $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$,
 $G = \langle (-1, 1, 0), (0, 1, -1) \rangle$, és cert que
- (a) $G = F$
 - (b) $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
 - (c) $G \subset F$
 - (d) $\mathbb{R}^3 = F + G$
42. Els vectors $(1 + i, i)$, $(3 + i, 1 + 2i)$ del $\mathbb{C}$ -espai vectorial $\mathbb{C}^2$
- (a) són linealment dependents
 - (b) són base de $\mathbb{C}^2$
 - (c) són un sistema de generadors de $\mathbb{C}^2$
 - (d) no generen cap subespai vectorial de $\mathbb{C}^2$

43. Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{\vec{u}'_1 = \vec{u}_1, \vec{u}'_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}'_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ i $\vec{v} = (x, y, z)$ és un vector en la base B , llavors

(a) B' no és base

(b) $\vec{v} = (x - y, y - z, z)$ en la base B'

(c) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

44. El següent sistema descriu un subespai vectorial $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

(a) sempre, i V és de dimensió 2

(b) només si $a = 0$, i V és de dimensió 2

(c) només si $a = 0$, i V és de dimensió 1

(d) només si $a = -1$, i V és de dimensió 1

45. Si $U = \langle \vec{u} \rangle$ i $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ són dos subespais propis de $\mathbb{R}^3$ amb $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vectors linealment independents, llavors

(a) $\vec{v}_1 \notin U \iff U + V = U \oplus V$

(b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \notin U \iff U + V = U \oplus V$

(c) $U + V = U \oplus V$, sempre

(d) $\vec{u} \notin V \iff U + V = U \oplus V$

46. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quins són els generadors de $\text{Nul } A$?

(a) $\langle (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$

(b) $\langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle$

(c) $\langle (1, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle$

(d) $\langle (0, 1, 0) \rangle$

47. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quins són els generadors de $\text{Nul } A^T$?

(a) $\langle (1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1) \rangle$

(b) $\langle (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$

(c) $\langle (0, 1, 0) \rangle$

(d) $\langle (1, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle$

48. Siguin $\vec{v}_1 = (-1, 3, -1, \beta)$, $\vec{v}_2 = (\alpha, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (-\beta, -3, 5, \alpha)$. Trobeu els valors de α i β tals que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ siguin linealment dependents.
- (a) $\alpha = -4/5$, $\beta = 2/5$
 - (b) $\alpha = 1/5$, $\beta = 3/5$
 - (c) $\alpha = -2/5$, $\beta = 0$
 - (d) $\alpha = 0$, $\beta = 0$
49. Si en la base B de $\mathbb{R}^2$ el vector $(1, 2)$ té coordenades $(3, 3)$ i el vector $(2, 1)$ té coordenades $(0, 3)$, aleshores els vectors de la base B són
- (a) $\{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$
 - (b) $\{(1, 1), (2, -1)\}$
 - (c) $\{(-1, 2), (1, 1)\}$
 - (d) $\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\}$
50. Per a un espai vectorial E de dimensió $n > 0$, determineu quina de les següents afirmacions és **FALSA** :
- (a) n vectors són linealment independents si i només si formen base de E
 - (b) n vectors són sistema de generadors si i només si formen base de E
 - (c) k vectors són sistema de generadors de E si i només si $k = n$
 - (d) n vectors són base de E si i només si són sistema de generadors i són linealment independents
51. Determineu quin dels següents conjunts està format per vectors linealment independents:
- (a) $\{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\}$
 - (b) $\{\sin x, \cos(\frac{\pi}{2} - x)\}$
 - (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$
 - (d) $\{x^2 - 1, x + 1, x - 1\}$

52. Considerem les bases de $\mathbb{R}^2$, $B_1 = \{(1, 2), (3, -1)\}$ i $B_2 = \{(5, 0), (-3, 3)\}$. Llavors, si un vector té coordenades (a, b) a la base B_1 , les seves coordenades a la base B_2 vénen donades per:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \text{(b)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \text{(c)} \quad & \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \text{(d)} \quad & \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

53. Considerem dos subespais vectorials $F_1, F_2 \subset E$ amb $\dim F_1 = r_1$, $\dim F_2 = r_2$ i $\dim E = n$.

- (a) Si $E = F_1 + F_2$, llavors $n \leq r_1 + r_2$
- (b) Si $E = F_1 + F_2$, llavors $F_1 \cap F_2 = 0$
- (c) Si $n = r_1 + r_2$, llavors $F_1 \cap F_2 = 0$
- (d) Si $n = r_1 + r_2$, llavors $E = F_1 + F_2$

54. Sigui $F = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[t] \mid p(1) = p(2)\}$. Aleshores,

- (a) $\dim F = 3$
- (b) $F = \langle 1, t^2 - 3t \rangle$
- (c) F no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[t]$
- (d) $F = \langle t^2 - 3t \rangle$

55. Donada la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, considerem $B_1 = \{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \vec{v}_2 - \vec{v}_3\}$ i $B_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2 + \vec{v}_3\}$. Llavors, són base de $\mathbb{R}^3$:

- (a) B_1 i B_2
- (b) només B_1
- (c) només B_2
- (d) ni B_1 ni B_2

56. Siguin els subespais de $\mathbb{R}^5$ $F = \{(x, y, z, t, s) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y - z = 0, t + s = 0\}$ i $G = \langle (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0) \rangle$. És cert que:

- (a) $\dim F = 2$
- (b) $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$
- (c) $\dim(F \cap G) = 1$
- (d) $H = \langle (1, 1, -1, 0, 0) \rangle$ és subespai vectorial de F

57. Donades $A, B, C \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, es pot afirmar que C és combinació lineal de A i B :
- (a) per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$
 - (b) per a cap $\alpha \in \mathbb{R}$
 - (c) per a un únic valor de $\alpha \in \mathbb{R}$
 - (d) per a exactament dos valors de $\alpha \in \mathbb{R}$
58. Siguin $F = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 1\}$, $G = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ i $H = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) + p(1) = 0\}$. Aleshores,
- (a) F és subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\dim F \geq 1$
 - (b) $G \cap H$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\dim(G \cap H) = 1$
 - (c) H no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$
 - (d) G és subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\dim G \leq 1$
59. Siguin els subespais de $\mathbb{C}^3$ $F = \langle (1, j, 0), (0, j, -1) \rangle$ i $G = \langle (-j, 1, 0), (0, 1, j) \rangle$. És cert que:
- (a) $\dim(F + G) = 2$
 - (b) $\dim(F \cap G) = 1$
 - (c) $F + G = \mathbb{C}^3$
 - (d) $F \not\subseteq G$
60. Els vectors $(1, 2, 3)$, $(-2, 1, 4)$ i $(p, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ són linealment independents si
- (a) $p = 0$
 - (b) $p \neq 0$
 - (c) $p = 2$
 - (d) $p \neq 2$
61. A $\mathbb{R}^4$ considerem els subespais $F = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle$ i $G = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, -1) \rangle$. Llavors es verifica
- (a) $F \oplus G = \mathbb{R}^4$
 - (b) $G \subseteq F$
 - (c) $\dim(F \cap G) = 1$
 - (d) Cap de les altres

62. En $E = \mathbb{R}_2[t]$, les components de $p(t) = 14 - 5t + 5t^2$ respecte de la base $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ són:
- (a) $(14, -5, 5)$
 - (b) $(-19, 10, 5)$
 - (c) $(19, -10, 5)$
 - (d) $(14, 5, -5)$
63. Sigui l'espai vectorial de polinomis $\mathbb{R}_2[x]$ i F el subconjunt de polinomis amb arrels $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq \nu$. Aleshores:
- (a) $F = \langle x - \mu, x - \nu \rangle$
 - (b) $F = \langle x^2 - (\mu + \nu)x + \mu\nu \rangle$
 - (c) $F = \mathbb{R}_2[x]$
 - (d) F no és subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$
64. Siguin l'espai vectorial de polinomis de coeficients reals de grau igual o més petit que 2, i els subespais F de polinomis amb arrel $\lambda \in \mathbb{R}$ i G de polinomis amb arrels $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, essent λ, μ, ν diferents. Aleshores:
- (a) $\dim F = 1$
 - (b) $\dim G = 2$
 - (c) $F \cap G = \{0\}$
 - (d) Cap de les altres és certa
65. Sigui $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ i sigui $G = \langle (1, -2, 1) \rangle$. Llavors:
- (a) $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
 - (b) $\dim F \cap G = 2$
 - (c) $\dim F + G = 2$
 - (d) Cap de les altres
66. Sigui $F = \langle x^2, -x, 2x^2 - 5x + 1 \rangle$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$. Aleshores:
- (a) $\dim F = 1$
 - (b) $\dim F = 3$
 - (c) $\dim F = 2$
 - (d) Cap de les altres

67. Determineu la proposició **FALSA** :

- (a) Tot espai vectorial conté subespais vectorials
- (b) Tot espai vectorial té una base
- (c) El conjunt suma de dos subespais vectorials del mateix espai vectorial és un subespai vectorial
- (d) La intersecció de dos subespais vectorials del mateix espai vectorial és un subespai vectorial

68. Sigui $\mathbb{R}_2[x]$ l'espai de polinomis reals de grau menor o igual que 2. Una base de $\mathbb{R}_2[x]$ és:

- (a) $\{1 + x, 2 + x, 3 + x\}$
- (b) $\{1, x\}$
- (c) $\{1 + x + x^2\}$
- (d) $\{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$

69. Si A és una matriu quadrada d'ordre n i S és una matriu de canvi de base, es pot afirmar que

- (a) $\text{rang}(A) = 1 \implies \text{rang}(AS) \neq 1$
- (b) $\det(A) = 0 \implies \text{rang}(SAS^{-1}) < n$
- (c) $\det(A) \neq \det(S^{-1}AS)$
- (d) $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(S^{-1}AS)$

70. Si $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 1, p(1) = 0\}$, és cert que:

- (a) $\dim F = 3$
- (b) $F = \langle x^2 - 2x + 1 \rangle$
- (c) F no és un subespai vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$
- (d) $F = \langle -x^2 + 1, -x + 1 \rangle$

71. Siguin $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ i $G = \{a(1, 2, 3) + b(3, 2, 1) + c(1, 0, -1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ subespais de $\mathbb{R}^3$. Si H és un subespai no nul inclòs dins de F i de G , aleshores:

- (a) $H = \langle (1, 1, 1) \rangle$
- (b) H no és únic
- (c) $H = \langle (0, 1, 1) \rangle$
- (d) No existeix H perquè $F \cap G = \{0\}$

72. Siguin $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ i $G = \langle(-7, 2, 1)\rangle$. Llavors:
- (a) $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
 - (b) $F \cap G = F$
 - (c) $F \cap G = G$
 - (d) $F + G = G$
73. Per a quants valors de $x \in \mathbb{R}$ els vectors $(x, 1, 1)$, $(1, 0, -4)$, $(1, 1, x) \in \mathbb{R}^3$ són linealment dependents?
- (a) Un únic valor
 - (b) Dos valors
 - (c) Cap valor
 - (d) Infinites valors
74. Si $F = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid A = A^T, \operatorname{tr}(A) = 0\}$, aleshores:
- (a) $\dim(F) = 3$
 - (b) $\dim(F) \leq 3$
 - (c) $\dim(F) \leq 5$
 - (d) $\dim(F) = 6$
75. Quina de les següents és una base de $F = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = p(0)\}$?
- (a) $\{x - 1, x\}$
 - (b) $\{x^2 - 2x\}$
 - (c) $\{1, x, x^2\}$
 - (d) $\{x^2 - x, 2\}$
76. Siguin els subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ $F = \langle(0, 1, 1)\rangle$ i $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + ay\}$. Per a quin valor $a \in \mathbb{R}$, es verifica $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
- (a) $a = 0$
 - (b) $a = 1$
 - (c) $a \neq 0$
 - (d) $a \neq 1$
77. Considerem els següents subespais de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$, $G = \langle(-1, 1, 0), (0, 1, -1)\rangle$. És cert que:
- (a) $F \subset G$
 - (b) $\dim F \cap G = 1$
 - (c) $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
 - (d) $G \subset F$

78. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, es compleix

- (a) $\dim \text{Nul } A = 0$
- (b) $\dim \text{Nul } A + \dim \text{Row } A = 2$
- (c) $\dim \text{Row } A = 1$
- (d) $\dim \text{Nul } A^T + \dim \text{Col } A = 2$

79. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ una matriu amb rang k . Llavors és **FALS** que

- (a) $\dim \text{Col } A = k$
- (b) $\dim \text{Nul } A^T = n - k$
- (c) $\dim \text{Row } A = k$
- (d) $\dim \text{Nul } A = n - k$

80. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El subespai vectorial $\text{Nul } A^T \in \mathbb{R}^4$

és:

- (a) $\langle (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$
- (b) $\langle (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) \rangle$
- (c) $\langle (-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$
- (d) $\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0) \rangle$

81. Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ amb $m \neq n$ es compleix:

- (a) $\text{Col } A \cap \text{Col } A^T = \{\vec{0}\}$
- (b) $\text{Nul } A \cap \text{Nul } A^T = \{\vec{0}\}$
- (c) $\text{Col } A^T \cap \text{Nul } A = \{\vec{0}\}$
- (d) $\text{Col } A \cap \text{Nul } A = \{\vec{0}\}$

Solucions

34. b

35. b

36. a

37. c

38. a

39. a

40. a

41. d

42. a

43. b

44. c

45. d

46. b

47. c

48. a

49. a

50. c

51. d

52. c

53. a

54. b

55. c

56. c

57. d

58. b

59. a

60. d

61. c

62. c

63. b

64. c

65. c

66. b

67. b

68. d

69. b

70. c

71. a

72. c

73. a

74. c

75. d

76. d

77. b

78. d

79. b

80. c

81. c

Espai euclidià

82. Una base ortogonal de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ és
- (a) $\{(2, 1, 0), (-3, 6, 5)\}$
 - (b) $\{(2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$
 - (c) $\{(1, -2, 3), (2, 1, 0)\}$
 - (d) $\{(-3, 6, 5), (1, -2, 3)\}$
83. Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, llavors
- (a) $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0; x - z = 0\}$
 - (b) $F^\perp = \langle (2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$
 - (c) $F^\perp = \langle (-1, 0, 1) \rangle$
 - (d) $F^\perp = \langle (2, 1, 0) \rangle$
84. Un vector ortogonal a $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tal que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 5$ és
- (a) $(8, -3)$
 - (b) $(2, 1)$
 - (c) $(1, -2)$
 - (d) $(3, 8)$
85. Considerem en $\mathbb{R}^3$ el producte escalar tal que els vectors $(1, 2, 1)$, $(-1, 0, 2)$ i $(0, 1, -1)$ formen una base ortonormal. Llavors
- (a) la norma del vector $(1, 2, 1)$ en aquest producte escalar és $\sqrt{6}$
 - (b) aquesta és l'única base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ amb aquest producte escalar
 - (c) no existeix tal producte escalar
 - (d) el resultat de multiplicar escalarment els vectors $(0, 2, 3)$ i $(0, 3, 2)$ és 2
86. Considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar habitual. La projecció ortogonal del vector $(2, 1, -1, -2)$ sobre el subespai generat pels vectors $\{(0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 1)\}$ és
- (a) $(0, 1, 0, -2)$
 - (b) $(0, -3, 0, -6)$
 - (c) $(0, -\frac{3}{5}, 0, -\frac{6}{5})$
 - (d) $(0, -\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{6}{\sqrt{5}})$

87. Sigui H un subespai de $\mathbb{R}^3$ tal que $H^\perp$ està generat pels vectors $(0, 1, -1)$ i $(1, -1, 1)$. Aleshores és **FALS** que

- (a) H és el subespai generat per $(0, 1, 1)$
- (b) $H = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0, y - z = 0\}$
- (c) la projecció ortogonal de $(0, 1, 0)$ sobre H és $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- (d) la projecció ortogonal de $(0, 1, 0)$ sobre H és $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

88. La base ortonormal resultant d'aplicar el mètode de Gram Schmidt a la base $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0)\}$ amb el producte escalar habitual en $\mathbb{R}^3$ és

- (a) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)\}$
- (b) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)\}$
- (c) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0)\}$
- (d) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)\}$

89. Per a quins valors de a i b la funció $y = ax + b$ proporciona la millor aproximació als valors de la taula:

x	-3	-1	1	3
y	3	2	0	-1

- (a) $a = -\frac{7}{5}, b = \frac{1}{4}$
- (b) $a = \frac{7}{10}, b = \frac{5}{2}$
- (c) $a = -\frac{8}{5}, b = 0$
- (d) $a = -\frac{7}{10}, b = 1$

90. Si $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és base del subespai $U \subset \mathbb{R}^n$ i $\vec{v}$ és un vector ortogonal a U , llavors

- (a) $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és un sistema de generadors de U
- (b) $\vec{v}$ és linealment independent de B
- (c) B és base ortogonal de U
- (d) $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és una família ortogonal

91. Resolem un sistema sobredeterminat $AX = B$, amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, pel mètode de mínims quadrats. La matriu pseudoinversa A^I , que dóna la solució $X = A^I B$, val

(a) $A^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(b) $A^I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(c) $A^I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(d) $A^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

92. Si E és la matriu d'una base de $\mathbb{R}^n$ i $M = E^T E$, llavors és **FALS** que

(a) $\det E \neq 0$

(b) $\det M > 0$

(c) $E^T E = E E^T$

(d) $M^T = M$

93. Una base ortogonal (respecte del producte escalar habitual) de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ és

(a) $\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$

(b) $\{(1, 1, 0), (-2, 0, -2)\}$

(c) $\{(-2, 0, 1), (1, 2, 0)\}$

(d) $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$

94. Quins dels següents vectors són ortogonals respecte de la matriu de producte escalar $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\{(1, 0), (-1, 1)\}$

(b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$

(c) $\{(1, 1), (-1, 1)\}$

(d) $\{(1, 1), (1, 0)\}$

95. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on $a, b \in \mathbb{R}$. Doneu els valors de a i b per tal que A sigui matriu d'un producte escalar:
- (a) $a > 0, b \neq 2$
 - (b) $a > 4, b > 2$
 - (c) Per a cap valor de a o de b
 - (d) $a \geq 4, b < 2$
96. Si la matriu de producte escalar en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ és $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, l'angle no orientat que formen els vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ és
- (a) 60°
 - (b) 30°
 - (c) 0°
 - (d) 90°
97. Les components α, β de la projecció ortogonal $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ del vector $(3, 2, 0, -1)$ sobre el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $\vec{u} = (-3, -1, 1, 3)$ i $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ són
- (a) $\alpha = -\frac{7}{5}, \beta = \frac{1}{4}$
 - (b) $\alpha = \frac{7}{10}, \beta = \frac{5}{2}$
 - (c) $\alpha = -\frac{8}{5}, \beta = 0$
 - (d) $\alpha = -\frac{7}{10}, \beta = 1$
98. Quina de les següents pot ser la matriu d'un producte escalar?
- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
 - (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
 - (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

99. A $\mathbb{R}^3$ amb producte escalar habitual, la base obtinguda en aplicar el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt sobre la base $B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (-1, 2, 0)\}$ és:
- (a) $\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (-5/3, 1/3, -5/3)\}$
 - (b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 - (c) $\{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$
 - (d) Cap de les altres
100. A $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar habitual, el vector del subespai $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ que està a distància mínima del vector $(2, 2, -1)$ és:
- (a) $(2, 2, -4)$
 - (b) $(3/2, 3/2, -3)$
 - (c) $(1, 1, -1)$
 - (d) $(1, 1, -2)$
101. Quins són els valors de x i y que millor aproximen la solució del següent sistema sobredeterminat?
- $$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - 2y = 2 \\ 2y = 6 \end{cases}$$
- (a) $x = -2/3, y = 3$
 - (b) $x = 1, y = 1$
 - (c) $x = 8, y = 3$
 - (d) $x = 3/2, y = 1/4$
102. Siguin $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectors unitaris amb $d(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}$. Llavors el producte $\vec{u} \cdot \vec{v}$ val:
- (a) $\frac{7}{8}$
 - (b) $\frac{3}{4}$
 - (c) $\frac{1}{2}$
 - (d) Cap de les altres
103. L'equació implícita del subespai F de $\mathbb{R}^3$ és $x - 2y + z = 0$. Una base del subespai ortogonal de F és:
- (a) $\{(1, -2, 1)\}$
 - (b) $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$
 - (c) $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$
 - (d) $\{(1, 2, 1)\}$

104. En $\mathbb{R}^2$, considerem el producte escalar que fa ortonormal la base $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$. Llavors,

- (a) amb aquest producte escalar la base canònica no és ortonormal
- (b) $(1, 2) \cdot (-1, -1) = -6$
- (c) $(1, 2) \cdot (6, -3) = 0$
- (d) la norma de $(1, 1)$ és 2

105. En $\mathbb{R}_2[x]$ considerem el producte escalar definit per $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Llavors una base ortogonal del subespai generat per $B = \{x + 1, x - 1\}$ és:

- (a) $\{x + 1, x - 1\}$
- (b) $\{1, x^2\}$
- (c) $\{2x + 1, x - 2\}$
- (d) $\{x + 1, 3x - 2\}$

106. Per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = a x_1 y_1 + x_2 y_2 + 4x_3 y_3 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$$

defineix un producte escalar en $\mathbb{R}^3$?

- (a) $a = 4$
- (b) Per a tot a
- (c) $a = -4$
- (d) Cap de les altres

107. Amb la matriu de producte escalar $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quina de les següents bases de $\mathbb{R}^3$ és ortogonal?

- (a) La base canònica
- (b) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, \frac{1}{2}, 1)\}$
- (c) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- (d) $\{(1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

108. Donats els subespais $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ i $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y + z = 0\}$, podem afirmar:

- (a) $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ però $F \neq G^\perp$
- (b) $F = G^\perp$
- (c) $F \subset G$
- (d) $G \subset F$

109. Sigui $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. La distància de $\vec{v} = (1, 2, 1)$ a S és:

- (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
- (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- (c) $\frac{4}{\sqrt{3}}$
- (d) 4

110. La solució de mínims quadrats del sistema lineal $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és:

- (a) $(1, 1)$
- (b) $(1, 2)$
- (c) $\frac{5}{6}(1, 1)$
- (d) $\frac{2}{3}(1, 2)$

111. Sigui l'espai euclidià real $\mathbb{R}^3$ amb la base canònica i el producte escalar definit per la matriu

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i sigui el subespai vectorial $F = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ amb $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)$ i $\vec{e}_2 = (1, -1, -1)$. Aleshores, quina de la següents parelles de vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forma una base ortogonal de F ?

- (a) $\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \vec{v}_2 = \vec{e}_2$
- (b) $\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \vec{v}_2 = (3, -7, -5)$
- (c) $\vec{v}_1 = (0, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 0, 1)$
- (d) $\vec{v}_1 = (0, 1, 0), \vec{v}_2 = (1, 0, 0)$

112. A $\mathbb{R}^3$, amb el producte escalar que en la base canònica té per matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, una base ortogonal del subespai $H = \langle (1, 0, 1), (1, 1, -1) \rangle$ és:

- (a) $\{(2, 0, 2), (3, 4, -5)\}$
- (b) $\{(2, 0, 2), (2, 2, -2)\}$
- (c) $\{(1, -2, -1)\}$
- (d) $\{(-3, 2, 1)\}$

113. Sigui el sistema sobredeterminat $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Llavors, el vector $\vec{x}$ que en proporciona la millor aproximació satisfà:

- (a) $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
- (b) $\vec{x} = A^T\vec{b}$
- (c) $(A^T A)\vec{x} = A^T\vec{b}$
- (d) Cap de les altres

114. Considerem un producte escalar a $\mathbb{R}^3$ al qual la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ és ortonormal. Llavors la matriu del producte en base canònica és

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

115. Considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb producte escalar habitual. Llavors la projecció ortogonal del vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$ sobre el subespai generat per el conjunt $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ és:

- (a) $(4/3, 2/3, 2/3)$
- (b) $(-1/3, 1/3, 1/3)$
- (c) $(2, 1, 1)$
- (d) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$

116. Quins dels següents vectors són ortogonals respecte de la matriu de producte escalar $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- (a) $\{(1, 0), (-1, 2)\}$
- (b) $\{(1, 0), (0, 2)\}$
- (c) $\{(1, 1), (-1, 1)\}$
- (d) $\{(1, 0), (-1, 1)\}$

117. Doneu els valors reals de a i b per tal que la matriu $\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ sigui la matriu d'un producte escalar:
- (a) $a < -1$, $b = 1$
 - (b) $a > -1$, $b > 0$
 - (c) Per a cap valor de a
 - (d) $a > 4$, $b > 0$
118. Si $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu d'un producte escalar en una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, aleshores,
- (a) Cap de les altres és certa
 - (b) $\|\vec{u}_1\| = 3$
 - (c) $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ són linealment dependents
 - (d) $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ formen un angle de 45°
119. Sigui E un espai vectorial de dimensió 5 i siguin F i G subespais de E de dimensió 3 i 2, respectivament. Es pot afirmar:
- (a) $F + G$ és una directa
 - (b) $F \cap G$ té dimensió 2 com a mínim
 - (c) $E = F + G$
 - (d) $F + G$ té com a mínim dimensió 3
120. Si F és un subespai propi d'un espai vectorial E i $\vec{u} \in E$, és cert que
- (a) l'únic vector $\vec{u}' \in F$ que minimitza $\|\vec{u} - \vec{u}'\|$ és la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre F
 - (b) la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre F no depèn del producte escalar definit
 - (c) si $\vec{u}'$ és la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre F , $\vec{u} - \vec{u}'$ no pertany necessàriament a l'ortogonal de F
 - (d) pot haver-hi més d'un vector de F que approximi $\vec{u}$ de forma òptima per a un mateix producte escalar

121. Siguin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tals que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 2$, $\widehat{\vec{u}\vec{w}} = \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \pi/3$ i $\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pi/2$. Aleshores el cosinus de l'angle entre $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{b} = \vec{v} + \vec{w}$ val:
- (a) $1/2$
 - (b) $3/\sqrt{14}$
 - (c) 1
 - (d) $3/\sqrt{10}$
122. Amb el producte escalar habitual, una base ortogonal del subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + 3z = 0\}$ és:
- (a) $\{(1, -2, 3)\}$
 - (b) $\{(-3, 0, 1), (0, 3, 2)\}$
 - (c) $\{(2, 1, 0), (-3, 6, 5)\}$
 - (d) $\{(1, -2, 3), (3, 0, -1)\}$
123. Si en un cert producte escalar els vectors $\vec{u}_1 = (1, 2)$ i $\vec{u}_2 = (2, 1)$ són ortonormals. Aleshores, la norma de $\vec{w} = (1, 1)$ val:
- (a) $2/\sqrt{3}$
 - (b) $\sqrt{3}$
 - (c) $\sqrt{2}$
 - (d) $\sqrt{2}/3$
124. A $\mathbb{R}^2$, si $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, és cert que:
- (a) G defineix un producte escalar tal que $(1, 1) \perp (1, -1)$
 - (b) G defineix un producte escalar tal que $\|(1, -1)\|^2 = 2$
 - (c) G no defineix un producte escalar
 - (d) G defineix un producte escalar tal que $(1, 1) \cdot (1, -1) = -2$
125. La recta $y = px + q$ que dona la millor aproximació als punts $(-3, 3)$, $(-1, 2)$, $(1, 0)$, $(3, -1)$ correspon a:
- (a) $p = -\frac{7}{5}$, $q = \frac{1}{4}$
 - (b) $p = \frac{7}{10}$, $q = \frac{5}{2}$
 - (c) $p = -\frac{8}{5}$, $q = 0$
 - (d) $p = -\frac{7}{10}$, $q = 1$

126. A $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar que en la base canònica té per matriu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, considerem el subespai $H = \langle (1, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle$. Llavors, una base de $H^\perp$ és:

- (a) $\{(1, -2, 1)\}$
- (b) $\{(1, 0, 1)\}$
- (c) $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$
- (d) $\{(1, 3, -1)\}$

127. Considerem el producte a $\mathbb{R}^3$ que en base canònica té per matriu $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Llavors, una base ortogonal del subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ és:

- (a) $B = \{(0, 1, 1), (4, 1, -3)\}$
- (b) $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
- (c) $B = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 2)\}$
- (d) $B = \{(0, 1, 1), (2, 1, -1)\}$

128. Quina és la solució que minimitza l'error quadràtic del següent sistema sobredeterminat?

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \\ x - 2y = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

- (a) $x = 2, \quad y = 7/10$
- (b) $x = 2, \quad y = 1$
- (c) $x = 9/4, \quad y = 1/2$
- (d) $x = 3, \quad y = 1/2$

129. A $\mathbb{R}^3$, amb producte escalar habitual, quin és el vector del subespai $F = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$ que està a distància mínima de $\vec{v} = (1, 2, 3)$?

- (a) $(-1, 0, 1)$
- (b) $(2, 2, 2)$
- (c) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- (d) $(1, 2, -3)$

130. Sigui el subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Aleshores, unes equacions implícites del seu complement ortogonal són:

- (a) $2x + y = x - z = 0$
- (b) $x - 2y = x + z = 0$
- (c) $2x - y = y + z = 0$
- (d) $x - 2y = x - z = 0$

131. Sigui $F = \langle (1, 2, -1, 0), (2, 3, 2, 1), (1, 0, 1, 0) \rangle$ un subespai de $\mathbb{R}^4$. Una base ortogonal de F és:

- (a) $\{(1, 2, -1, 0), (1, 1, 3, 1), (2, -1, 0, -1)\}$
- (b) $\{(1, 2, -1, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 3)\}$
- (c) $\{(1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 0, 0, 3)\}$
- (d) $\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 3), (2, -1, 0, 4)\}$

132. Considerem la matriu $G = \begin{pmatrix} p & 1 & q \\ 1 & 1 & 1 \\ q & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on $p, q \in \mathbb{R}$. Per a quins valors de p i q la matriu G és una matriu de producte escalar?

- (a) $p > 0, q \neq 1$
- (b) Per a cap valor de p i q
- (c) $p > 1, q > 1$
- (d) $p \geq 1, q < 1$

133. Sigui F el conjunt format per vectors $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tals que

$$\begin{aligned} x - y + z - t &= 0 \\ x + y + z + t &= 0 \\ y + t &= 0 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

Aleshores, respecte del producte escalar habitual, es compleix que:

- (a) $F^\perp$ és subespai vectorial de dimensió 1
- (b) $F^\perp$ és subespai vectorial de dimensió 2
- (c) $F^\perp$ és subespai vectorial de dimensió 3
- (d) $F^\perp = \mathbb{R}^4$

134. Sigui $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Llavors es compleix:

- (a) $\mathbb{R}^n = \text{Col } A \oplus \text{Nul } A$
- (b) $\mathbb{R}^n = \text{Col } A^T \oplus \text{Nul } A^T$
- (c) $\mathbb{R}^m = \text{Col } A \oplus \text{Nul } A^T$
- (d) $\mathbb{R}^m = \text{Col } A^T \oplus \text{Nul } A$

135. Considerem les matrius $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Es compleix:

- (a) $\text{Nul } A = \text{Nul } A^T A$
- (b) $\text{Nul } A = \text{Nul } A A^T$
- (c) $\text{Nul } A^T = \text{Nul } A^T A$
- (d) $\text{Nul } A \cap \text{Nul } A^T A = \{\vec{0}\}$

136. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, podem afirmar

- (a) $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T$
- (b) $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A$
- (c) $(\text{Col } A^T)^\perp = \text{Nul } A^T$
- (d) Cap de les altres

137. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, és incompatible, llavors:

- (a) $\dim \text{Col } A = m$
- (b) $\dim \text{Col } A = n$
- (c) $\dim \text{Nul } A^T > 0$
- (d) $\dim \text{Nul } A > 0$

138. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, és compatible indeterminat, llavors:

- (a) $\dim \text{Col } A = m$
- (b) $\dim \text{Col } A = n$
- (c) $\dim \text{Nul } A^T > 0$
- (d) $\dim \text{Nul } A > 0$

139. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $\text{Nul } A = \{\vec{0}\}$. Llavors, d'un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, podem afirmar:

- (a) Si $m > n$, hi ha valors de $\vec{b}$ pels quals el sistema és incompatible
- (b) El sistema sempre té solució única
- (c) Si $m > n$ i el sistema és compatible, llavors té infinites solucions
- (d) Si $m = n$, hi ha valors de $\vec{b}$ pels quals el sistema és incompatible

140. Considerem el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, amb $\text{rang } A = \text{rang } AA^T = \text{rang } A^T A = m$. El vector $\vec{x} \in \text{Row } A$ que n'és solució és:
- (a) No existeix
 - (b) $\vec{x} = A^T(AA^T)^{-1}\vec{b}$
 - (c) $\vec{x} = (A^T A)^{-1}A^T\vec{b}$
 - (d) Qualsevol vector $\vec{x} \in \text{Row } A$ n'és solució
141. Sigui el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ amb $m \neq n$ i $\text{rang } A = n$. Quina de les següents afirmacions és certa?
- (a) Si $\vec{b} \in \text{Col } A^T$ el sistema és compatible indeterminat
 - (b) Si $\vec{b} \in \text{Nul } A$ el sistema és compatible indeterminat
 - (c) Si $\vec{b} \in \text{Nul } A^T$ el sistema és compatible determinat
 - (d) Si $\vec{b} \in \text{Col } A$ el sistema és compatible determinat

Solucions

	111. b
	112. a
82. a	113. c
83. a	114. a
84. a	115. a
85. d	116. a
86. a	117. d
87. d	118. a
88. b	119. d
89. d	120. a
90. b	121. b
91. d	122. c
92. c	123. d
93. d	124. c
94. a	125. d
95. c	126. d
96. a	127. a
97. d	128. a
98. d	129. a
99. c	130. a
100. d	131. a
101. b	132. b
102. a	133. c
103. a	134. c
104. c	135. a
105. d	136. a
106. d	137. c
107. d	138. d
108. d	139. a
109. c	140. b
110. c	141. d

Aplicacions lineals

142. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme definit per $f(x, y, z) = (-x + 3y - 2z, -x + y, -2y + 2z)$. Aleshores es compleix
- (a) $\dim \ker f = 3$
 - (b) $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 3$
 - (c) Cap de les altres
 - (d) $\dim \operatorname{Im} f = 3$
143. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ amb $f(1, 0, 0) = (8, 2, 2, 4)$; $f(3, 2, 0) = (12, 12, 0, 0)$; $f(2, 2, 1) = (0, 12, 0, -12)$. Llavors la matriu de l'aplicació en la base canònica és
- (a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & -3 & -6 \\ -4 & 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$
 - (b) $A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -4 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & -8 \end{pmatrix}$
 - (c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$
 - (d) $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ 2 & 12 & 12 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -12 \end{pmatrix}$
144. Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Existeix algun endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ complint $f(e_1 + e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2$, $\ker(f) \neq \{0\}$?
- (a) Sí, i és únic
 - (b) Sí, n'hi ha infinits
 - (c) No n'existeix cap
 - (d) Sí, n'hi ha exactament 2

145. Sigui $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ és tal que $f(e_1) = e_1 - e_2$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, i $\ker f = \langle e_1 - e_3 \rangle$, aleshores

- (a) no és únic i $\det f = 0$
- (b) és únic i $\det f \neq 0$
- (c) no és únic i $\det f \neq 0$
- (d) és únic i $\det f = 0$

146. És cert que, donades les següents aplicacions lineals,

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } f(x, y) = (x + y, 0, 2y)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } g(x, y, z) = (z, -y, -2z)$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } h(x, y, z) = x + y + z$$

- (a) f és injectiva
- (b) f és exhaustiva
- (c) h és injectiva
- (d) g és bijectiva

147. Siguin $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(1, 2) = (3, 4, 5)$ i $f(6, 7) = (8, 9, 10)$, i $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + 4y + 5z)$. Aleshores, en les bases canòniques, la matriu de la composició $g \circ f$ val

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

- (d) Cap de les altres

148. Sigui $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ un subespai invariant per $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$. Quina de les següents pot ser la matriu de φ en la base canònica de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

149. Sigui $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(0, 1, 0, 0) = (3, 1, 2)$, $f(1, 1, 1, 1) = (3, 2, 4)$, $f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1)$; $f(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0)$. La matriu de f en les bases canòniques és

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

150. Sigui $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y - z = 0\}$. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és una aplicació lineal tal que $\ker f = F$ i $f(0, 0, 1) = (1, 1)$, aleshores

(a) $f(1, 1, 1) = (-1, 0)$

(b) $f(1, 1, 1) = (0, -1)$

(c) $f(1, 1, 2) = (0, 0)$

(d) $f(1, 1, 2) = (1, 1)$

151. Sigui $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal donada per $f(x, y) = (x + y, 2x - y)$. La matriu de f en la base $\{(1, 1), (2, 1)\}$ és

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

152. De la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ podem afirmar:

- (a) No representa cap endomorfisme
- (b) Representa un endomorfisme injectiu
- (c) Representa un endomorfisme exhaustiu
- (d) Cap de les altres és certa

153. Siguin la transformació lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ amb $f(x, y) = (x + 3y, -y)$ i la base $B = \{(3, -1), (1, 0)\}$. La matriu $M(f, B)$ és

- (a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

154. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}$, quina de les afirmacions següents és **FALSA** ?

- (a) $\dim \operatorname{Im} f = 1$
- (b) $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$
- (c) $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$
- (d) $\ker f \perp \operatorname{Im} f$

155. Siguin $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ i $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ vectors linealment independents tals que $f(\vec{u}_1) = 2\vec{v} \neq \vec{0}$, $f(\vec{u}_2) = \vec{v}$ i $f(\vec{u}_3) = \vec{0}$. Aleshores,

- (a) $\operatorname{rang} f = 2$
- (b) f és injectiva
- (c) f és exhaustiva
- (d) $\dim \ker f = 2$

156. Sigui una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i un subespai $F = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) Si $\dim F = k$, llavors $\dim f(F) = k$
- (b) Si $\dim F < k$, llavors $\dim f(F) < k$
- (c) Si $\dim F = n$, llavors $\dim f(F) = m$
- (d) Si $\ker f = F$, llavors $\dim f(F) = n - \text{rang } f$

157. Sigui ϕ una aplicació lineal que en bases canòniques té matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Considerem el sistema d'equacions $A\vec{x} = \vec{b}$. Llavors podem afirmar:

- (a) ϕ injectiva $\Rightarrow$ sistema compatible determinat
- (b) sistema compatible determinat $\Rightarrow \phi$ injectiva
- (c) ϕ exhaustiva $\Rightarrow$ sistema compatible determinat
- (d) sistema compatible determinat $\Rightarrow \phi$ exhaustiva

158. Sigui l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + 3y + z, -y - z)$. Aleshores,

- (a) $\dim \ker f = 3$
- (b) $\dim \ker f = 2$
- (c) $\dim \ker f = 1$
- (d) $\dim \ker f = 0$

159. Donat l'endomorfisme $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ definit per $\varphi(3, 2) = (4, 4)$ i $\varphi(2, 5) = (-1, 3)$, la seva matriu en base canònica és:

- (a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$
- (c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

160. Sigui $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal. Llavors podem afirmar que

- (a) f és exhaustiva
- (b) f és injectiva
- (c) f no és exhaustiva
- (d) f no és injectiva

161. Essent $E = \mathbb{R}_2[t]$, si A és la matriu en la base canònica de l'aplicació lineal $f : E \rightarrow E$ definida per $f(t) = (t - 1)^2$, $f(t + 1) = (t + 1)^2$, $f(t^2 - 1) = 1$, llavors
- (a) $\det A = -4$
 - (b) $\det A = 1$
 - (c) $\det A = 4$
 - (d) $\det A = -1$
162. Sigui l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $f(x, y, z) = (x+y, x+z, y-z)$. Aleshores:
- (a) f és injectiva
 - (b) f és exhaustiva
 - (c) f és bijectiva
 - (d) Cap de les altres
163. Una aplicació $f \in \text{End} \mathbb{R}^3$ en certa base té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 4 & 2p \\ p & 2p & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, la dimensió de $\ker f$ és:

- (a) Depèn de la base
 - (b) 1 per a tot $p \in \mathbb{R}$
 - (c) 1 si $p = 0$, 2 si $p \neq 0$
 - (d) 2 si $p = 0$, 1 si $p \neq 0$
164. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$, determineu quina és la proposició correcta:
- (a) Si f és monomorfisme aleshores $n \leq m$
 - (b) Si $m \leq n$ aleshores f és epimorfisme
 - (c) Si $n = m$ aleshores f és isomorfisme
 - (d) Si f és isomorfisme aleshores $n = m$
165. En la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ l'endomorfisme $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ satisfà $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_3) = \vec{0}$. Llavors,
- (a) f és injectiva
 - (b) f és exhaustiva
 - (c) $\dim \ker f = 2$
 - (d) $\dim \ker f = 1$

166. Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ amb matriu associada a la base canònica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Podem assegurar que:

- (a) $f^{-1}(0, 3, 6) = (1, 1, -1)$
- (b) $f^{-1}(0, 3, 6) = (1, 1, -1) + \vec{v}$, per a tot $\vec{v} \in \ker f$
- (c) No existeix $f^{-1}(0, 3, 6)$ atès que la matriu no és invertible
- (d) f és injectiva, però no exhaustiva

167. Sigui $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(1, 2) = (1, 1, 1)$ i $\varphi(2, 1) = (2, 0, 3)$. Llavors la matriu de φ en base canònica de sortida i base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ d'arribada és:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

168. Considerem l'endomorfisme $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definit per $\varphi(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + y + 2z, x - y - 2z)$, Llavors es verifica

- (a) $\mathbb{R}^3 = \ker \varphi \oplus \text{Im} \varphi$
- (b) $\ker \varphi \subseteq \text{Im} \varphi$
- (c) $\text{Im} \varphi \subseteq \ker \varphi$
- (d) Cap de les altres

169. Sigui l'aplicació lineal $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 4y)$; $x, y, z \in \mathbb{R}$. Llavors, podem afirmar:

- (a) Hi ha infinits vectors $\vec{v}$ tals que $f(\vec{v}) = (1, 2)$
- (b) Existeix un sol vector $\vec{v}$ tal que $f(\vec{v}) = (1, 2)$
- (c) No existeix cap vector $\vec{v}$ tal que $f(\vec{v}) = (1, 2)$
- (d) f és injectiva

170. En l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ es considera una base ortonormal B de matriu E i la base canònica. Si un endomorfisme $f \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ ve donat, en la base canònica, per la matriu M i, en la base B , per la matriu N , aleshores,
- (a) $M = N$
 - (b) $M = E^T N E$
 - (c) $N = E M E^{-1}$
 - (d) $E^{-1} = E^T$
171. D'una aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ podem afirmar:
- (a) $\dim E = \dim F \Rightarrow f$ injectiva
 - (b) f bijectiva $\Rightarrow E = F$
 - (c) f exhaustiva $\Rightarrow \dim F \leq \dim E$
 - (d) $\dim F = \text{rang } f \Rightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$
172. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ diferent de la identitat. Si $f^2 = f$, podem assegurar que:
- (a) $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$
 - (b) $\det f = 1$
 - (c) La matriu associada a f és la matriu nul·la
 - (d) f no és isomorfisme
173. Considerem l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(1, 2) = (3, 4)$ i $f(-1, 1) = (0, 6)$. Aleshores:
- (a) $f(0, 4) = (12, 5)$
 - (b) $f(0, 4) = (4, 40/3)$
 - (c) $f(0, 4) = (3, 10)$
 - (d) No existeix tal endomorfisme
174. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z)$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida per $g(x, y) = (x - 2y, x + 2y, 3x)$. Llavors de la composició $f \circ g$ podem afirmar:
- (a) És injectiva però no exhaustiva
 - (b) És exhaustiva però no injectiva
 - (c) No és ni injectiva ni exhaustiva
 - (d) És bijectiva

175. Quines són les antiimatges del vector $(1, 1, 1)$ per l'endomorfisme $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, y + 2z)$?

- (a) $(3, 3, 3)$
- (b) $(1, -1, 1) + \lambda(1, -2, 1); \lambda \in \mathbb{R}$
- (c) No en té
- (d) $\lambda(1, 1, 1); \lambda \in \mathbb{R}$

176. Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ amb matriu associada a la base canònica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aleshores podem afirmar que f és

- (a) injectiva, no exhaustiva
- (b) exhaustiva, no injectiva
- (c) bijectiva
- (d) ni injectiva ni exhaustiva

177. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió finita que verifica $f^2 = I$. Aleshores podem afirmar:

- (a) $f = I$
- (b) $f^{-1} = f$
- (c) f no és invertible
- (d) $f^{-1} = I$

178. Sigui l'endomorfisme $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $f(x, y, z) = (x - y - 2z, z, y + z)$. Per a quins valors de $m \in \mathbb{R}$ el subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + mz = 0\}$ satisfà $f(F) = F$?

- (a) $m \neq 3$
- (b) $m = 3$
- (c) Per a tot valor de m
- (d) Per a cap valor de m

179. Sigui l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ amb matriu associada A a la base canònica. Quina de les següents afirmacions és certa?

- (a) $f : \text{Col } A^T \rightarrow \mathbb{R}^m$ és exhaustiva
- (b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Col } A$ és injectiva
- (c) $f : \text{Col } A^T \rightarrow \text{Col } A$ és bijectiva
- (d) $f : \text{Nul } A \rightarrow \text{Nul } A^T$ és injectiva

180. Considerem les aplicacions lineals donades per les matrius $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Es compleix:
- (a) $\text{Col } A^T = \text{Col } A^T A$
 - (b) $\text{Col } A^T = \text{Col } A A^T$
 - (c) $\text{Col } A = \text{Col } A^T A$
 - (d) $\text{Col } A^T \cap \text{Col } A^T A = \{\vec{0}\}$
181. Sigui l'aplicacion lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ amb matriu associada A a la base canònica. Considerem el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Quina de les següents afirmacions és certa?
- (a) Si f és monomorfisme el sistema és compatible
 - (b) Si f és epimorfisme el sistema és compatible
 - (c) Si f és monomorfisme i el sistema és compatible, llavors és indeterminat
 - (d) Si f és epimorfisme i el sistema és compatible, llavors és determinat

Solucions

142. b

143. c

144. b

145. d

146. a

147. b

148. d

149. d

150. d

151. a

152. d

153. a

154. d

155. d

156. b

157. b

158. c

159. d

160. d

161. c

162. d

163. d

164. d

165. c

166. b

167. a

168. b

169. a

170. d

171. c

172. d

173. b

174. d

175. b

176. d

177. b

178. b

179. c

180. a

181. b

Diagonalització d'endomorfismes

182. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, és **FALS** que
- (a) no és diagonalitzable a $\mathbb{R}$
 - (b) els seus autovalors són $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2$ (simple)
 - (c) no és diagonalitzable a $\mathbb{C}$
 - (d) és diagonalitzable a $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$
183. Sigui E un espai vectorial real i $\varphi: E \rightarrow E$ un endomorfisme amb polinomi característic $-(x-2)^2(x+1)$. Llavors es pot afirmar que
- (a) φ és diagonalitzable a $\mathbb{R}$
 - (b) φ és bijectiu
 - (c) φ no diagonalitza
 - (d) φ no és invertible
184. Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definit per $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (2, 3, 0)$ i $f(0, 0, 1) = (2, 0, -1)$. Quin dels següents és un vector propi de f ?
- (a) $(1, 1, 0)$
 - (b) $(1, 0, 1)$
 - (c) $(0, 1, 1)$
 - (d) $(3, 1, 1)$
185. Sigui A una matriu quadrada real. Aleshores
- (a) A^n té els mateixos valors propis que A
 - (b) A^n té els mateixos vectors propis que A
 - (c) si A^n diagonalitza en $\mathbb{R}$, A també ho fa
 - (d) Cap de les altres és certa
186. Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ definit per $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_1 + 3e_2$ i $f(e_3) = 2e_1 - e_3$. Un vector propi del valor propi 3 és
- (a) $-e_1 + e_3$
 - (b) $e_2 + e_3$
 - (c) $e_1 + e_2$
 - (d) $3e_1 + e_2 + e_3$

187. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

on $a \in \mathbb{R}$, aleshores

- (a) A és diagonalitzable a $\mathbb{R}$ quan $a = -3$
- (b) A és diagonalitzable a $\mathbb{R}$ quan $a \neq 3$
- (c) A no és mai diagonalitzable a $\mathbb{R}$
- (d) A és sempre diagonalitzable a $\mathbb{C}$

188. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}_2[x]$ definit per $f(1) = 1$, $f(x) = 2 + 3x$ i $f(x^2) = 2 - x^2$. Aleshores, els vectors propis de valor propi 3 determinen un subespai de dimensió 1 amb base

- (a) $1 + x$
- (b) $-1 + x^2$
- (c) $x + x^2$
- (d) $3 + x + x^2$

189. Sigui φ un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ amb polinomi característic $(x - 1)(x - 2)^3$. Quina de les següents **NO** pot ser la matriu de φ ?

- (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

190. Sigui $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que $f(p) = p + p'$. És cert que

- (a) la matriu en la base $1, x, x^2, x^3$ és $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) diagonalitza
- (c) $\dim \ker(f - I) = 2$
- (d) $\dim \ker(f - I) = 1$

191. Si A és una matriu quadrada d'ordre dos amb coeficients reals amb $\text{Ker}(A + iI) = \langle (1 - i, i) \rangle$, aleshores $A = PDP^{-1}$, on

(a) $P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

(b) $P = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

192. Quina de les següents matrius té $(1, 1, 0)$ per vector propi?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

193. Considereu els vectors $v_1 = (1 + 2i, 1 - 2i, 1)$, $v_2 = (1 - 2i, 1 + 2i, 1)$, $v_3 = (5, -3 + 4i, 1 + 2i)$ i els escalars $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 2$. Podem afirmar:

- (a) Existeix una matriu diagonalitzable en $\mathbb{R}$ de la qual són vectors i valors propis associats
- (b) Existeix una matriu diagonalitzable en $\mathbb{C}$ de la qual són vectors i valors propis associats
- (c) Els escalars no poden ser valors propis de cap matriu
- (d) Els vectors no poden ser una base de vectors propis de cap matriu

194. En certa base, l'endomorfisme f té per matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Llavors,

- (a) els vectors propis de A no formen base de $\mathbb{R}^2$
- (b) existeix una base de $\mathbb{R}^2$ de vectors propis ortogonals de A
- (c) existeix una base de $\mathbb{R}^2$ on f és simètric
- (d) els vectors propis de A són base no ortogonal de $\mathbb{R}^2$

195. Si el polinomi característic d'una matriu A és $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$ i els subespais propis són respectivament $\langle(1, 2, 0), (1, 1, -1)\rangle$ i $\langle(2, -1, 1)\rangle$, aleshores la matriu A s'obté fent

(a) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

(d) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

196. Si A és una matriu real quadrada d'ordre 4 i rang 4, aleshores,

- (a) el nombre de valors propis diferents és 4
- (b) A representa un endomorfisme bijectiu
- (c) el nombre de valors singulars diferents és 4
- (d) pot tenir algún valor propi nul

197. Siguin una matriu $A = M(f, B_c)$ diagonalitzable, D la matriu diagonal i C la matriu del canvi de base vers la canònica B_c . Aleshores,

- (a) $A = CDC^{-1}$
- (b) $A = C^{-1}DC$
- (c) $A = C D C^T$
- (d) $A = C^T D C$

198. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determineu quina afirmació és correcta:

- (a) A no diagonalitza
- (b) A diagonalitza en $\mathbb{R}$
- (c) A diagonalitza en $\mathbb{C}$, però no en $\mathbb{R}$
- (d) A diagonalitza en una base ortogonal

199. Sigui l'endomorfisme $\varphi \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x - y - 2z, z, y + z)$. El subespai $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + az = 0\}$ satisfà $\varphi(F) \subset F$ si
- (a) $a = 3$
 - (b) $a \neq 3$
 - (c) Per a tot valor de a
 - (d) Per a cap valor de a
200. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ amb valors propis 0, 1, 2, i 3. Quina de les afirmacions següents és certa?
- (a) $\text{tr } f = 6$
 - (b) f és exhaustiva
 - (c) $\ker f = \{\vec{0}\}$
 - (d) f és invertible
201. Si una matriu A té valors propis i subespais propis $\lambda = 2$, $V = \langle (-2, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle$ i $\lambda' = -1$, $V' = \langle (1, 2, 2) \rangle$, llavors,
- (a) $A^{-1} = A^T$
 - (b) A no diagonalitza
 - (c) $V \oplus V' = \mathbb{R}^3$
 - (d) $A \neq A^T$
202. Sigui $\vec{v} \neq \vec{0}$ un vector propi de la matriu A amb valor propi $\lambda \neq 0$. Llavors podem assegurar que:
- (a) $\vec{v} \in \text{Col}(A)$
 - (b) $\vec{v} \in \text{Nul}(A)$
 - (c) $\vec{v} \in \text{Nul}(A^T)$
 - (d) $\vec{v} \in \text{Row}(A)$
203. Si $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ té valors propis 0, 1, 2, llavors,
- (a) $\text{rang } f = 3$
 - (b) $\text{rang } f = 2$
 - (c) $\text{rang } f = 1$
 - (d) no tenim prou informació per a saber rang f

204. L'aplicació lineal $f(x, y, z) = (x + ay - 2z, 3y, -2x + z)$ diagonalitza en $\mathbb{R}$:

- (a) per a tot a
- (b) només si $a = 0$
- (c) només si $a \neq 0$
- (d) no diagonalitza per a cap a

205. La matriu d'un endomorfisme f en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Llavors,

- (a) f té un valor propi doble
- (b) f té un valor propi nul
- (c) f diagonalitza en $\mathbb{R}$
- (d) f no diagonalitza

206. Suposem $A \in M_n(\mathbb{R})$ amb únic valor propi $\lambda = 0$ (múltiple). Deduïu quina de les següents afirmacions és **FALSA** :

- (a) $A = 0$
- (b) $\det A = 0$
- (c) $\text{rang } A < n$
- (d) $\text{tr } A = 0$

207. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 0, 4)$ i $f(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$. Quin dels següents és un vector propi de f ?

- (a) $(3, 0, -1)$
- (b) $(1, 0, 0)$
- (c) $(1, -3, 5)$
- (d) $(3, -3, 5)$

208. Doneu tots els valors de $a \in \mathbb{R}$ per als quals la següent matriu diagonalitza en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) $\forall a \in \mathbb{R}$
- (b) $a \neq 1, 2$
- (c) $a \neq 1$
- (d) $a \neq 2$

209. Donat el polinomi característic $p_f(x) = -(1 + x^2)(1 + x)$, aleshores
- (a) la dimensió de l'espai vectorial sobre el que està definit l'endomorfisme f és 2
 - (b) l'endomorfisme f és diagonalitzable en $\mathbb{R}$
 - (c) la traça de f és 1
 - (d) el determinant de f és -1
210. Sigui $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ tal que els seu polinomi característic $p(x) = (x - 2)(x - 3)(x^2 + 4)$. Llavors:
- (a) f diagonalitza a $\mathbb{R}$
 - (b) f diagonalitza a $\mathbb{C}$, però no a $\mathbb{R}$
 - (c) La matriu associada a f és una matriu simètrica
 - (d) Cap de las altres afirmacions és certa
211. Sigui $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ una matriu que diagonalitza amb valors propis $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, i vectors propis respectivament $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Llavors:
- (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
 - (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
 - (d) Tal matriu no existeix
212. Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, podem afirmar:
- (a) Si A diagonalitza, A^T també ho fa amb els mateixos vectors propis
 - (b) Si A diagonalitza, A^T també ho fa amb els mateixos valors propis
 - (c) Si $A^T A$ diagonalitza, A també diagonalitza
 - (d) Si A no diagonalitza, $A^T A$ no diagonalitza

213. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quina de les següents afirmacions és certa?

- (a) Diagonalitza a $\mathbb{C}$ però no a $\mathbb{R}$
- (b) No diagonalitza
- (c) Diagonalitza a $\mathbb{R}$ però no a $\mathbb{C}$
- (d) Diagonalitza a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{C}$

214. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, és **FALS** que:

- (a) $\text{rang}(AA^T) = \text{rang}(A^T A)$
- (b) Els vectors propis de $A^T A$ i AA^T coincideixen
- (c) $A^T A$ i AA^T tenen els mateixos valors propis no nuls
- (d) $A^T A$ i AA^T són matrius semidefinides positives

215. Donada una matriu simètrica, podem afirmar:

- (a) Tots els seus valors propis són reals i no negatius
- (b) Vectors propis de valors propis diferents són ortogonals
- (c) Tots els seus valors propis són reals i simples
- (d) Tota base de vectors propis és ortogonal

216. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$, amb una base ortonormal de matriu E , l'endomorfisme f vé donat per una matriu diagonal D . Si la matriu de f en la base canònica és A , aleshores

- (a) A és diagonal
- (b) $A = EDE^T$
- (c) $A = E^T DE$
- (d) $A^{-1} = A^T$

217. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, aleshores és **FALS** que:

- (a) A és diagonalitzable en una base de vectors propis ortogonals
- (b) $\dim \ker A > 0$
- (c) A és una matriu de producte escalar
- (d) A és invertible

218. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $M = A^T A$. Llavors, M
- (a) no diagonalitza
 - (b) diagonalitza amb valors propis no negatius
 - (c) diagonalitza amb valors propis positius
 - (d) diagonalitza amb valors propis simples
219. Una matriu simètrica $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ té polinomi característic $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Si $\ker(A - I) = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$, llavors
- (a) $\ker(A + I) = \langle (0, 1, 1) \rangle$
 - (b) Cap de les altres és certa
 - (c) $\ker(A + I) = \langle (1, -1, -1) \rangle$
 - (d) $\ker(A + I) = \langle (-1, -1, 1) \rangle$
220. D'una matriu A , simètrica, podem afirmar:
- (a) Els valors propis de A concideixen amb els seus valors singulars
 - (b) $\text{Nul } A = (\text{Col } A)^\perp$
 - (c) Els valors propis de A són reals no negatius
 - (d) Cap de les altres
221. Els valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ són
- (a) $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$
 - (b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$
 - (c) $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 0$
 - (d) $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$
222. La descomposició en valors i vectors singulars de la matriu diagonal $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ és
- (a) $5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - (b) $1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - (c) $5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - (d) $1 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$

223. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ amb rang $A = r$. Considerem l'expressió $A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i$; $i = 1, \dots, r$; on $\{\vec{u}_i\}$ és una base ortonormal de $\text{Col } A$ i $\{\vec{v}_i\}$ és una base ortonormal de $\text{Row } A$. Llavors,

- (a) σ_i són els valors propis de $A^T A$
- (b) σ_i són els valors singulars de A
- (c) σ_i són els valors propis de AA^T
- (d) Cap de les altres és certa

224. Els valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ són

- (a) $2, -2$
- (b) $1, 4$
- (c) $1, 16$
- (d) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

225. Una matriu A té vectors singulars per la dreta $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1)$, per l'esquerra $\vec{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{u}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, i valors singulars $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$. Llavors,

- (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

226. Quins són els valors singulars no nuls de la matriu A ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) $\{1, 3\}$
- (b) $\{1, 9\}$
- (c) $\{1, 2\}$
- (d) $\{-1, 3\}$

227. Si $A = U\Sigma V^T$ és la descomposició en valors singulars d'una matriu $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$, es pot afirmar que,

- (a) $A^T A$ té algún valor propi nul
- (b) si $U = I_4$, $\text{rang}(A) = 4$
- (c) A té 3 valors singulars no nuls
- (d) AA^T té algún valor propi nul

228. Sabem que una matriu $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$ admet una descomposició en r valors singulars no nuls $A = \sum_{i=1}^r \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$. Aleshores,

- (a) $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^3$
- (b) $\vec{u}_i \in \mathbb{R}^4$
- (c) $\text{rang } A = r$
- (d) $r < \text{rang } A < 4$

229. A l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ amb base B i matriu de producte escalar G , l'endomorfisme f té per matriu associada A . Llavors, f és simètric si, i només si,

- (a) $A^T = A$
- (b) $G^T = G$
- (c) $G^T = G^{-1}$
- (d) $A^T G = G^T A$

230. La matriu de producte escalar en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ és $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

L'endomorfisme f que, en aquesta base, té per matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

és simètric si

- (a) $a = 4$
- (b) $a = 0$
- (c) $a = -2$
- (d) mai

231. Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ i $B = A^T A$, llavors és **FALS** que

- (a) $\det A^2 = \det B$
- (b) B és una matriu de producte escalar
- (c) B és simètrica
- (d) B diagonalitza amb valors propis reals

232. Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$ i $A^T = A$, llavors és **FALS** que
- (a) A diagonalitza amb valors propis reals positius
 - (b) $\text{Nul } A = \text{Nul } A^T = \{\vec{0}\}$
 - (c) A diagonalitza amb valors propis diferents de zero
 - (d) els valors propis de AA^T i $A^T A$ coincideixen
233. La matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (a) no diagonalitza en $\mathbb{R}$
 - (b) no diagonalitza en $\mathbb{C}$
 - (c) admet una base ortogonal de vectors propis
 - (d) els valors propis són simples
234. Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ té 3 valors propis reals i vectors propis $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$. Aleshores,
- (a) A és invertible
 - (b) els valors propis de A són simples
 - (c) A és una matriu simètrica
 - (d) A és una matriu ortogonal
235. La matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ té un valor singular σ_1 . Llavors,
- (a) σ_1 és valor propi de $A^T A$
 - (b) $\sqrt{\sigma_1}$ és valor propi de A
 - (c) σ_1 és valor propi de A
 - (d) σ_1^2 és valor propi de $A^T A$
236. Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ té n valors singulars diferents de zero, és **FALS** que
- (a) A és invertible
 - (b) A diagonalitza
 - (c) $\dim \text{Nul } A^T = \dim \text{Nul } A = 0$
 - (d) $\dim \text{Col } A = \dim \text{Row } A = n$
237. Els valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ són
- (a) 5 i 1
 - (b) $\sqrt{5}$ i 1
 - (c) 25 i 1
 - (d) -5 i -1

238. Els valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ són

- (a) 3 i 1
- (b) 9 i 1
- (c) $\sqrt{3}$ i 0
- (d) $\sqrt{3}$ i 2

239. Sabem que $\sigma_1 = 5$ i $\sigma_2 = 3$ són valors singulars de la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Llavors, els vectors singulars per la dreta són

- (a) $\vec{v}_1 = (1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1)$
- (b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, -4)$
- (c) $\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$
- (d) $\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{v}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}})$

240. Sabem que $\sigma = 3$ és valor singular de la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ i que $\vec{v} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és el respectiu vector singular per la dreta. Llavors, el vector singular per l'esquerra és

- (a) $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- (b) $\vec{u} = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$
- (c) $\vec{u} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-4}{\sqrt{2}})$
- (d) $\vec{u} = (\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}})$

Solucions

	211. b
	212. b
182. d	213. b
183. b	214. b
184. a	215. b
185. b	216. b
186. c	217. b
187. a	218. b
188. a	219. c
189. c	220. b
190. d	221. b
191. c	222. c
192. c	223. b
193. d	224. b
194. a	225. b
195. a	226. a
196. b	227. d
197. a	228. c
198. b	229. d
199. a	230. a
200. a	231. b
201. c	232. a
202. a	233. c
203. b	234. c
204. b	235. d
205. c	236. b
206. a	237. a
207. b	238. a
208. d	239. c
209. d	240. d
210. b	

