

Problemes d'espais vectorials

Rafael Cubarsi (rcubarsi@mat.upc.edu)

Departament de Matemàtiques, UPC

Octubre de 2015

Matrius i determinants

1. Si $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ tals que $AX = B$, aleshores:
 - (a) $X \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$
 - (b) $X \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$
 - (c) $X \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
 - (d) $X \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$
2. Un sistema homogeni $A\vec{x} = \vec{0}$, amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, compleix que:
 - (a) si $m = n$, només admet la solució trivial
 - (b) si $\text{rang} A < m$, és incompatible
 - (c) si $m > n$, té infinites solucions
 - (d) si $\text{rang} A = n$, té solució única
3. Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3 on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes. El determinant de la matriu $B = (C_1 + C_2 - C_3, C_1 + C_3, 4C_1 + 2C_3)$ val
 - (a) 0
 - (b) $2 \det(A)$
 - (c) $-\det(A)$
 - (d) $\det(A)$
4. Considerem la matriu $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrius A , tals que $AB = BA$, són de la forma
 - (a) $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$
 - (b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$
 - (c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & -a \end{pmatrix}$
 - (d) $A = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & -a \end{pmatrix}$

5. Si $A = [X, Y, Z]$ és la matriu 3×3 que té per columnes els vectors X, Y, Z , llavors la matriu $B = [-X + Y - Z, X + Z, -3X - Z]$ és

(a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} A$

(b) $B = A \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $B = A \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} A$

6. El sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

- (a) és incompatible si $a = 1$
 (b) és compatible determinat si $a = 2$
 (c) és compatible indeterminat si $a = -1$
 (d) és compatible determinat si $a = 0$
7. Considerem $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tals que $AB = C$. Aleshores:
- (a) si A és regular, B també ho és
 (b) si A és regular, C també ho és
 (c) si B és regular, C també ho és
 (d) si C és regular, A també ho és
8. Si el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $\vec{b} \neq 0$, és incompatible, llavors sempre es compleix
- (a) $m = n$
 (b) $\text{rang} A = n$
 (c) $\text{rang} A = m$
 (d) $\text{rang} A < m$
9. La forma esglaonada reduïda que resulta d'aplicar el mètode de Gauss-Jordan a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ és:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Si $P = (X, Y, Z, T)$, $Q = (T, Z, Y, X)$, $R = -(X, Y, Z, T)$, són matrius amb columnes X, Y, Z, T , llavors

- (a) $\det(P) = \det(Q)$
- (b) $\det(P) = -\det(R)$
- (c) $\det(R) = -\det(Q)$
- (d) $\det(P + Q) = \det(P) + \det(Q)$

Espais vectorials

11. Sigui $F = \{N \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ tals que } AN = NA\}$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La dimensió de F és

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 0
- (d) 3

12. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ té coordenades (u_1, u_2) en la base $\{(1, 0), (1, 2)\}$, per a trobar les coordenades de $\vec{u}$ en la base $\{(1, 2), (1, -1)\}$ farem

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

13. Els vectors $(2, 1, -3), (1, 0, -4), (m, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ són linealment dependents si

- (a) $m = 1$
- (b) $m = -3$
- (c) $m = \frac{5}{2}$
- (d) $m = -\frac{3}{2}$

14. Donats $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 3x - y + z = 0\}$ i $G = \langle (a, 0, 1), (b, -2, 2) \rangle$ on $a, b \in \mathbb{R}$, quan podem assegurar que la suma $F + G$ és directa?

- (a) Per a $a = b = 1$
- (b) En cap cas
- (c) Per $a - b \neq 1$
- (d) Per $a - b = 1$

15. Sabem que en una base B de $\mathbb{R}^2$ el vector $(1, 2)$ té coordenades $(2, 3)$ i el vector $(1, 3)$ té coordenades $(3, 2)$. Aleshores, les coordenades del vector $(1, 5)$ en la base B són

- (a) $(5, 0)$
- (b) $(0, 5)$
- (c) $(1, 5)$
- (d) $(5, 1)$

16. Donat el subespai $F = \langle -x, x(x - 2), 3x(1 + x) \rangle$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, és cert que

- (a) $\dim F = 2$
- (b) $F = \mathbb{R}_2[x]$
- (c) $\dim F = 1$
- (d) Cap de les altres

17. Considerem els següents subespais de $\mathbb{R}^4$,
 $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = x + y + z = 0\}$,
 $W = \langle (1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$. Llavors,

- (a) $\{(1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ és base de $V + W$
- (b) $\{(-1, 2, 1, 1)\}$ és base de $V \cap W$

- (c) $\{(1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ és base de $V \cap W$
 (d) $\{(-1, 2, 1, 1)\}$ és base de $V + W$
18. Considerant els següents subespais de $\mathbb{R}^3$,
 $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$,
 $G = \langle (-1, 1, 0), (0, 1, -1) \rangle$, és cert que
- (a) $G = F$
 (b) $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
 (c) $G \subset F$
 (d) $\mathbb{R}^3 = F + G$
19. Els vectors $(1 + i, i)$, $(3 + i, 1 + 2i)$ del $\mathbb{C}$ -espai vectorial $\mathbb{C}^2$
- (a) són linealment dependents
 (b) són base de $\mathbb{C}^2$
 (c) són un sistema de generadors de $\mathbb{C}^2$
 (d) no generen cap subespai vectorial de $\mathbb{C}^2$
20. Si $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és base de $\mathbb{R}^3$, $B' = \{\vec{u}'_1 = \vec{u}_1, \vec{u}'_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}'_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ i $\vec{v} = (x, y, z)$ és un vector en la base B , llavors
- (a) B' no és base
 (b) $\vec{v} = (x - y, y - z, z)$ en la base B'
 (c) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 (d) $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$
21. El següent sistema descriu un subespai vectorial $V \subset \mathbb{R}^3$
- $$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$
- (a) sempre, i V és de dimensió 2
 (b) només si $a = 0$, i V és de dimensió 2
 (c) només si $a = 0$, i V és de dimensió 1
 (d) només si $a = -1$, i V és de dimensió 1
22. Si $U = \langle \vec{u} \rangle$ i $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ són dos subespais propis de $\mathbb{R}^3$ amb $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vectors linealment independents, llavors

- (a) $\vec{v}_1 \notin U \iff U + V = U \oplus V$
 (b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \notin U \iff U + V = U \oplus V$
 (c) $U + V = U \oplus V$, sempre
 (d) $\vec{u} \notin V \iff U + V = U \oplus V$
23. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quins són els generadors de $\text{Nul}A$?
- (a) $\langle(0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\rangle$
 (b) $\langle(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1)\rangle$
 (c) $\langle(1, 0, 1), (1, 0, 0)\rangle$
 (d) $\langle(0, 1, 0)\rangle$
24. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, quins són els generadors de $\text{Nul}A^T$?
- (a) $\langle(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1)\rangle$
 (b) $\langle(0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\rangle$
 (c) $\langle(0, 1, 0)\rangle$
 (d) $\langle(1, 0, 1), (1, 0, 0)\rangle$

Espai euclidià

25. Una base ortogonal de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ és
- (a) $\{(2, 1, 0), (-3, 6, 5)\}$
 (b) $\{(2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$
 (c) $\{(1, -2, 3), (2, 1, 0)\}$
 (d) $\{(-3, 6, 5), (1, -2, 3)\}$
26. Si $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, llavors
- (a) $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0; x - z = 0\}$
 (b) $F^\perp = \langle(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$
 (c) $F^\perp = \langle(-1, 0, 1)\rangle$
 (d) $F^\perp = \langle(2, 1, 0)\rangle$
27. Un vector ortogonal a $(1, -2) \in \mathbb{R}^2$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tal que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 5$ és

- (a) $(8, -3)$
 - (b) $(2, 1)$
 - (c) $(1, -2)$
 - (d) $(3, 8)$
28. Considerem en $\mathbb{R}^3$ el producte escalar tal que els vectors $(1, 2, 1)$, $(-1, 0, 2)$ i $(0, 1, -1)$ formen una base ortonormal. Llavors
- (a) la norma del vector $(1, 2, 1)$ en aquest producte escalar és $\sqrt{6}$
 - (b) aquesta és l'única base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ amb aquest producte escalar
 - (c) no existeix tal producte escalar
 - (d) el resultat de multiplicar escalarment els vectors $(0, 2, 3)$ i $(0, 3, 2)$ és 2
29. Considerem l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar habitual. La projecció ortogonal del vector $(2, 1, -1, -2)$ sobre el subespai generat pels vectors $\{(0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 1)\}$ és
- (a) $(0, 1, 0, -2)$
 - (b) $(0, -3, 0, -6)$
 - (c) $(0, -\frac{3}{5}, 0, -\frac{6}{5})$
 - (d) $(0, -\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{6}{\sqrt{5}})$
30. Sigui H un subespai de $\mathbb{R}^3$ tal que $H^\perp$ està generat pels vectors $(0, 1, -1)$ i $(1, -1, 1)$. Aleshores és **FALS** que
- (a) H és el subespai generat per $(0, 1, 1)$
 - (b) $H = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0, y - z = 0\}$
 - (c) la projecció ortogonal de $(0, 1, 0)$ sobre H és $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 - (d) la projecció ortogonal de $(0, 1, 0)$ sobre H és $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
31. La base ortonormal resultant d'aplicar el mètode de Gram Schmidt a la base $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0)\}$ amb el producte escalar habitual en $\mathbb{R}^3$ és
- (a) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)\}$
 - (b) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)\}$
 - (c) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 0)\}$
 - (d) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)\}$

32. Per a quins valors de a i b la funció $y = ax + b$ proporciona la millor aproximació als valors de la taula:

x	-3	-1	1	3
y	3	2	0	-1

- (a) $a = -\frac{7}{5}, b = \frac{1}{4}$
 (b) $a = \frac{7}{10}, b = \frac{5}{2}$
 (c) $a = -\frac{8}{5}, b = 0$
 (d) $a = -\frac{7}{10}, b = 1$
33. Si $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és base del subespai $U \subset \mathbb{R}^n$ i $\vec{v}$ és un vector ortogonal a U , llavors
- (a) $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és un sistema de generadors de U
 (b) $\vec{v}$ és linealment independent de B
 (c) B és base ortogonal de U
 (d) $\{\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ és una família ortogonal
34. Resolem un sistema sobredeterminat $AX = B$, amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, pel mètode de mínims quadrats. La matriu pseudoinversa A^I , que dóna la solució $X = A^I B$, val

- (a) $A^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
 (b) $A^I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
 (c) $A^I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
 (d) $A^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

35. Si E és la matriu d'una base de $\mathbb{R}^n$ i $M = E^T E$, llavors és **FALS** que
- (a) $\det E \neq 0$
 (b) $\det M > 0$
 (c) $E^T E = E E^T$
 (d) $M^T = M$