

POLINOMIS

Un *monomi* és una expressió de la forma ax^m , on el coeficient a és un nombre real o complex, x és una indeterminada i m és un nombre natural o zero. Un *polinomi* és una suma finita de monomis, que escrivim com

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

amb $a_n \neq 0$ si $n > 0$. Es diu que n és el *grau* de $p(x)$. Els polinomis de grau 0, també anomenats *constants*, s'identifiquen amb els nombres. Els polinomis es poden sumar, restar i multiplicar seguint les lleis ordinàries de l'àlgebra, i només tenen invers els polinomis constants no nuls.

Divisió entera. Donats dos polinomis $p(x)$ i $d(x) \neq 0$, existeixen dos únics polinomis $q(x)$ (*quocient*) i $r(x)$ (*residu*) tals que:

$$(1) \quad p(x) = d(x)q(x) + r(x).$$

$$(2) \quad r(x) \text{ és } 0 \text{ o de grau més petit que el grau de } d(x).$$

La demostració és senzilla, per inducció sobre el grau de $p(x)$. Sens dubte, el lector també coneix la *regla de Ruffini*, que esquematitza la divisió d'un polinomi $p(x)$ per $x - \alpha$.

Quan $r(x) = 0$ la divisió és *exacta*, i es diu que $d(x)$ és un *divisor* de $p(x)$ o bé que $p(x)$ és un *múltiple* de $d(x)$.

Si α és un nombre real o complex, el *valor numèric* d'un polinomi $p(x)$ quan $x = \alpha$ és

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n,$$

i α és una *arrel* de $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Proposició B.1 (a) *(Teorema del residu.) El residu de la divisió d'un polinomi $p(x)$ per $x - \alpha$ és el valor numèric $p(\alpha)$.*

(b) *(Teorema del factor.) Un nombre α és arrel d'un polinomi $p(x)$ si, i només si, $x - \alpha$ és un divisor de $p(x)$.*

DEMOSTRACIÓ. (a) La divisió de $p(x)$ per $x - \alpha$ dona $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, i substituint arreu $x = \alpha$ queda $p(\alpha) = r$.

(b) Es una conseqüència immediata de (a).



Exemples B.2 (a) Els valors numèrics d'un polinomi es poden calcular amb la regla de Ruffini. Per exemple, si volem trobar $p(\sqrt{2})$ quan $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, fem

	1	2	-3	1
$\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$	$4 - \sqrt{2}$
	1	$2 + \sqrt{2}$	$-1 + 2\sqrt{2}$	$5 - \sqrt{2}$

i tenim que $p(\sqrt{2}) = 5 - \sqrt{2}$.

(b) Segons el teorema del factor, si α és una arrel de $p(x)$ tenim

$$p(x) = (x - \alpha)q(x).$$

Si β és una arrel de $q(x)$ resulta $q(x) = (x - \beta)r(x)$, i per tant

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)r(x).$$

Si continuem aquest procés de descomposició, i tenim en compte el comportament del grau davant de la multiplicació de polinomis, observem que el darrer quocient serà de grau zero, i per tant **un polinomi de grau $n > 0$ pot tenir, com a màxim, n arrels diferents.**

Teorema B.3 (Teorema fonamental de l'àlgebra.) Tot polinomi no constant de coeficients complexos té alguna arrel complexa.

DEMOSTRACIÓ. Gauss va donar cinc demostracions diferents d'aquesta propietat. Lamentablement, cap d'elles és prou elemental per incloure-la aquí. $\square$

Corol·lari B.4 Tot polinomi no constant $p(x)$ de coeficients complexos es descompon totalment dins de $\mathbb{C}[x]$ en producte de factors de primer grau:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

o, agrupant les arrels segons les seves multiplicitats,

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r}.$$

En particular, tot polinomi no constant té, comptant les multiplicitats, tantes arrels com indica el seu grau:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n.$$

DEMOSTRACIÓ. Només cal aplicar reiteradament el teorema fonamental de l'àlgebra i el teorema del factor. $\square$

El teorema de Gauss també dóna informació sobre els polinomis de coeficients reals, i ens ocuparem immediatament d'aquesta qüestió.

Lema B.5 *Si tenim un polinomi no constant $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, i $\alpha \in \mathbb{C}$ és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m , el complex conjugat $\bar{\alpha}$ també és una arrel de $p(x)$, i amb la mateixa multiplicitat m .*

DEMOSTRACIÓ. La conjugació, és a dir, l'aplicació

$$\alpha = u + iv \quad \mapsto \quad \bar{\alpha} = u - iv,$$

conserva les quatre operacions aritmètiques. Denotarem per $\bar{q}(x)$ el polinomi que resulta de conjuguar els coeficients de $q(x)$. Conjugant les relacions

$$p(x) = (x - \alpha)^m q(x) \quad \text{i} \quad q(\alpha) \neq 0$$

obtenim les corresponents a $\bar{\alpha}$,

$$p(x) = (x - \bar{\alpha})^m \bar{q}(x) \quad \text{i} \quad \bar{q}(\bar{\alpha}) \neq 0,$$

i per tant $\bar{\alpha}$ és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m . □

Corollari B.6 Tot polinomi no constant $p(x)$ de coeficients reals es descompon totalment dins de $\mathbb{R}[x]$ en producte de factors de primer grau o de segon grau amb discriminant negatiu:

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} (x^2 + b_1x + c_1)^{n_1} \cdots (x^2 + b_sx + c_s)^{n_s},$$

amb $\alpha_1, \dots, \alpha_r, b_1, c_1, \dots, b_s, c_s \in \mathbb{R}$ i $b_j^2 - 4c_j < 0$ per a $j = 1, \dots, s$.

DEMOSTRACIÓ. Si $\beta = u + iv$ i $\bar{\beta} = u - iv$ són arrels complexes conjugades de $p(x)$, podem agrupar els factors corresponents així:

$$\begin{aligned}(x - \beta)(x - \bar{\beta}) &= (x - u - iv)(x - u + iv) = (x - u)^2 + v^2 \\ &= x^2 - 2ux + (u^2 + v^2) = x^2 + bx + c,\end{aligned}$$

on $b = -2u$, $c = u^2 + v^2$ i $b^2 - 4c < 0$. Partim ara de la descomposició de $p(x)$ a $\mathbb{C}[x]$, que segons el lema anterior serà de la forma

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_r)^{m_r} (x - \beta_1)^{n_1} (x - \bar{\beta}_1)^{n_1} \cdots (x - \beta_s)^{n_s} (x - \bar{\beta}_s)^{n_s},$$

amb $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ i $\beta_1, \dots, \beta_s \notin \mathbb{R}$. Agrupant de la manera indicada abans cada arrel complexa amb la seva conjugada resulta la descomposició de $p(x)$ dins de $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Si $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, habitualment es considera $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Aquesta *funció polinòmica* és contínua i, de fet, infinitament derivable.

Exemples B.7 (a) Tot polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau senar té alguna arrel real. Això és conseqüència de l'aparellament d'arrels conjugades, però també es pot demostrar considerant la funció polinòmica p . Suposant $a_n > 0$ observem que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = +\infty,$$

perquè el grau de $p(x)$ és senar. Per tant, existeixen nombres t_0 i t_1 tals que $p(t_0) < 0$ i $p(t_1) > 0$. Aplicant el teorema de Bolzano, es dedueix que $p(\alpha) = 0$ per a algun $\alpha \in (t_0, t_1)$.

(b) α és una arrel del polinomi $p(x)$ amb multiplicitat m si, i només si,

$$p(\alpha) = Dp(\alpha) = D^2p(\alpha) = \dots = D^{m-1}p(\alpha) = 0 \quad \text{però} \quad D^m p(\alpha) \neq 0,$$

on $D^i p(\alpha)$ representa la i -èssima derivada de la funció p en el punt α . La demostració d'aquesta propietat és senzilla, observant que si α és una arrel de $p(x)$ amb multiplicitat m aleshores també ho és de $Dp(x)$ amb multiplicitat $m - 1$.