



Nombres Complexos

Àlgebra Lineal
Dept. de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

6 de Setembre de 2010

Designarem amb $\mathbb{C}$ el conjunt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dels parells *ordenats* de nombres reals, i. e.:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

de manera que, si $z = (x, y), z' = (x', y')$ són dos elements de $\mathbb{C}$,

$$z = z' \Leftrightarrow x = x' \text{ i } y = y'$$

i en conseqüència:

$$(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y \rightsquigarrow \text{L'ordre importa!}$$

Els elements de $\mathbb{C}$ així definits reben el nom de *nombres complexos* (Gauss 1831-1832). Finalment, si $z = (x, y) \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z, && \text{és la "part real" de } z, \\ y &= \operatorname{Im} z, && \text{és la "part imaginària" de } z. \end{aligned}$$

Operacions en $\mathbb{C}$

Definició 1

Donats $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ elements arbitraris de $\mathbb{C}$, es defineixen les operacions:

■ Suma $\ll + \gg$:

$$z + z' = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

■ Producte $\ll \cdot \gg$:

$$z \cdot z' = zz' = (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Diagrama d'Argand (1806)

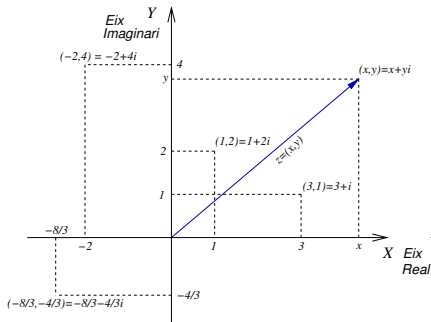


Figura 1: Diagrama d'Argand.

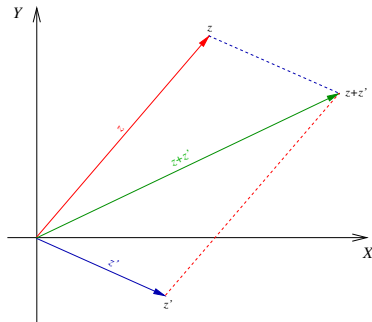


Figura 2: Llei del paral·lelogram.

Proposició 2

Es satisfan les propietats següents:

1 $z + z' = z' + z$

2 $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$

3 *Si posem $\mathbf{0} = (0, 0)$ es té: $z + \mathbf{0} = \mathbf{0} + z$*

4 *Donat $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ tenim*

$$(x, y) + (-x, -y) = (-x, -y) + (x, y) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

$(-x, -y)$ és l'oposat de $z = (x, y)$ i s'escriu:

$$(-x, -y) = -(x, y) = -z.$$

5 $zz' = z'z$

6 $z(z'z'') = (zz')z''.$

Proposició 2 (cont.)

7 Si introduïm $\mathbf{1} = (1, 0)$ es satisfà $\mathbf{1}z = z\mathbf{1} = z$

8 Donat $z \neq 0$, $\exists! w \in \mathbb{C} : zw = wz = \mathbf{1}$. Si $z = (x, y)$, w ve donat per:

$$w = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

w és l'invers o *recíproc* de z i s'escriu $z^{-1} = w$.

9 $z(z' + z'') = zz' + zz''$,
 $(z + z')z'' = zz'' + z'z''$

(aquí z, z', z'' són elements arbitraris de $\mathbb{C}$).

Amb aquestes propietats, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un *cos commutatiu*.

Resta i quocient de nombres complexos

Idènticament a com es fa al cos dels reals, $\mathbb{R}$,

- Per qualssevol $z, z' \in \mathbb{C}$, definim la seva *resta* com $z - z'$, com

$$z - z' = z + (-z').$$

- Si z, z' són nombres complexos arbitraris, amb $z' \neq 0$, escrivim $(z')^{-1} = 1/z'$, i el *quocient* de z i z' , z/z' , s'introdueix com:

$$\frac{z}{z'} = z \frac{1}{z'} = z(z')^{-1}.$$

A partir d'ara farem ús dels “convenis” següents:

Inclusió de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Escriurem indistintament x ó $(x, 0)$ sempre que $x \in \mathbb{R}$. Això és, identifiquem els punts de recta real amb el punts sobre l'eix horitzontal (eix real) del pla complex (figura 1).

La unitat imaginària i (Euler, 1750)

S'introdueix la *unitat imaginària*, i , com

$$i \equiv (0, 1)$$

Llavors, el nombre complex $z = (x, y)$ es pot expressar com

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi$$

que és la *forma binòmica* del nombre complex z .

Remarca 3

Notem que,

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

És per això que sovint s'escriu:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Aleshores, equacions com $x^2 + 1 = 0$ ó $x^2 + 2x + 2 = 0$ tindran solució “en els complexos”. En efecte, canviant $x \rightarrow z$:

$$\begin{aligned} z^2 + 1 = 0, \quad \text{Sol.: } z &= \pm\sqrt{-1} = \pm i, \\ z^2 + 2z + 2 = 0, \quad \text{Sol.: } z &= \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \stackrel{(*)}{=} -1 \pm i. \end{aligned}$$

$$(*) \sqrt{4-8} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i.$$

El càlcul dels productes i quocients es fa es fa d'una forma còmoda emprant aquesta notació (i tenint en compte les propietats enunciades):

- Per $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ nombres complexos arbitraris:

$$\begin{aligned}zz' &= (x + yi)(x' + y'i) \\&= x(x' + y'i) + y(x' + y'i)i \\&= xx' + xy'i + x'yi + yy'i^2 \\&= xx' - yy' + (xy' + x'y)i\end{aligned}$$

- Si $w = u + vi \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ (per tant $u, v \in \mathbb{R}$, amb $uv \neq 0$):

$$\frac{z}{w} = \frac{x + yi}{u + vi} = \frac{x + yi}{u + vi} \frac{u - vi}{u - vi} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} - \frac{xv - yu}{u^2 + v^2}i \quad (1)$$

Definició 4 (Conjugat d'un nombre complex)

Donat un nombre complex $z = x + yi$ el es defineix seu *conjugat*, $\bar{z}$, al nombre complex

$$\bar{z} = x - yi$$

(notem que $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$).

Proposició 5

Per $z, z' \in \mathbb{C}$ qualssevol, es satisfà:

1 $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,

2 $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$,

3 $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$,

4 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Definició 6 (Mòdul d'un nombre complex)

Donat $z = x + yi \in \mathbb{C}$, anomenarem mòdul de z , $|z|$, al nombre real no negatiu:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Proposició 7

Es satisfan les propietats següents:

- 1 $|z|^2 = z\bar{z}$,
- 2 $|z| \geq 0$,
- 3 $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- 4 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (*desigualtat triangular*),
- 5 $|zz'| = |z||z'|$,

on z, z' són nombres complexos arbitraris.

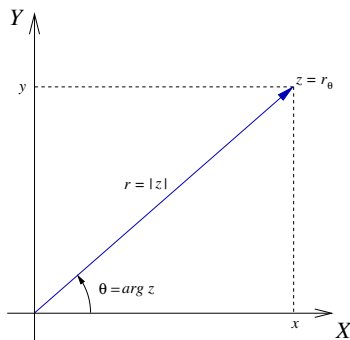


Figura 3: $r = |z|$, $\theta = \arg z$

Forma polar d'un complex

Per qualsevol nombre complex $z \neq 0$, existeixen $r, \theta \in \mathbb{R}$ t.q.:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2)$$

S'escriu

$$z = r e^{i\theta}, \quad (3)$$

que es la *forma polar* de $z \in \mathbb{C}$.

Notació. En (3):

- r és el *mòdul* de z
- θ és el *argument* de z , posem $\theta = \arg z$ (veure Remarca 8)

Remarca 8

Algunes precisions:

- 1 Per qualsevol nombre complex, z , el seu mòdul, r , ve determinat de manera única per $r = |z|$.
- 2 En canvi, el argument d'un nombre complex $z \neq 0$, θ , ve determinat mòdul 2π , i.e., excepte un nombre enter de vegades 2π .
- 3 Anomenem $\arg z$ a la classe $\{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ o a qualsevol dels seus representants (abús de llenguatge).
- 4 En altres paraules, per dos nombres complexos $z, z' \neq 0$, amb $z = r_\theta$, $z' = \rho_\phi$ es satisfà:

$$\rho_\phi = r_\theta \Leftrightarrow \rho = r \text{ i } \phi - \theta = 2k\pi, \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}$$

Part principal de l'argument

En canvi, a qualsevol nombre complex $z \neq 0$ li correspon un *únic* θ entre 0 i 2π , i.e.: $0 \leq \theta < 2\pi$ ó entre $-\pi$ i π : $-\pi < \theta \leq \pi$.

De fet es podria fer servir qualsevol interval d'amplitud 2π . En general: $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ ó $\alpha - \pi < \theta \leq \alpha + \pi$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat.

Qualsevol elecció particular per l'interval que es trii de bon principi s'anomena *part principal* de l'argument i el valor corresponent de $\arg z$ en aquest interval es coneix com *valor principal* de l'argument.

Normalment, es consideren els intervals $[0, 2\pi[$ ó $]-\pi, \pi]$. Així, les formes polars dels nombres complexos $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$ s'escriuen, respect.: $\sqrt{2}_{\pi/4}$, $\sqrt{2}_{3\pi/4}$, $\sqrt{2}_{5\pi/4}$, $\sqrt{2}_{7\pi/4}$ ó $\sqrt{2}_{\pi/4}$, $\sqrt{2}_{3\pi/4}$, $\sqrt{2}_{-3\pi/4}$, $\sqrt{2}_{-\pi/4}$.

Proposició 9 (producte i quocient en forma polar)

Si $z = r_\theta$ i $z' = r'_{\theta'}$, el seu producte i quocient es poden calcular mitjançant:

$$zz' = (rr')_{\theta+\theta'}$$

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\theta-\theta'}$$

Remarca 10 (part pricipal del producte i del quocient)

Per fixar idees, suposem que hem triat l'interval $[0, 2\pi[$. Llavors és possible que $\theta \pm \theta' \notin [0, 2\pi[$. En aquest cas, com que sempre existeix $k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\theta \pm \theta' + 2k\pi \in [0, 2\pi[$, triem aquest valor de l'angle com argument del producte/quocient. Per ex.: $3_{3\pi/4}5_{4\pi/3} = 15_{25\pi/12} = 15_{2\pi+\pi/12} = 15_{\pi/12}$.

La sèrie de Taylor de la funció exponencial, $\exp$, ve donada per:

$$e^z = \exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

En particular, per $z = i\theta$ amb $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} n = 2k &\implies (i\theta)^{2k} = (-1)^k \theta^{2k} \\ n = 2k+1 &\implies (i\theta)^{2k+1} = i(-1)^k \theta^{2k+1} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Aleshores podem escriure,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \cdots \\ &\quad + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

S'arriba doncs a:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (4)$$

que és la coneguda *fórmula d'Euler*.

Remarca 11

Aquí agafem $\theta \in \mathbb{R}$, però, a partir de la deducció que hem feta dalt, és fàcil concloure que (4) també és vàlida quan $\theta \in \mathbb{R}$ es substitueix per un nombre complex z qualsevol.

A partir de (4) i tenint en compte (2) deduïm:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (5)$$

sempre que $z \neq 0$ (per $z = 0$, l'argument θ no està definit). (5) és la *forma exponencial* del nombre complex z .

La següent és l'anàloga a la proposició 9

Proposició 12 (producte i quocient de forma exponencial)

Si $z = re^{i\theta}$, $z' = r'e^{i\theta'}$ es tenen les igualtats:

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right) e^{i(\theta-\theta')}$$

Remarca 13

Els conceptes de part principal i valor principal de l'argument que introduïem quan parlàvem de la forma polar es traslladen punt per punt quan treballem amb la forma exponencial. Tanmateix, la remarca 10 sobre les parts principals dels arguments del producte i del quocient s'aplica de manera idèntica a la proposició 12.

Definició 14

Per $n \in \mathbb{N}$, definim recursivament $z^n = z^{n-1}z$. Llavors es verifiquen les propietats:

$$\begin{aligned} z^{n+m} &= z^n z^m \\ z^{nm} &= (z^n)^m, \end{aligned} \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

Corol·lari 15 (fórmula de Moivre)

Per tot $\theta \in \mathbb{R}$ es verifica:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

que és la fórmula de Moivre.

Definició 16 (arrel n -èsima d'un nombre complex)

Donat $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, direm que $u \in \mathbb{C}$ és una *arrel n -èsima* de z si $u^n = z$. És a dir, si u és solució de l'equació:

$$u^n - z = 0. \quad (6)$$

Proposició 17

L'equació (6), amb $z \neq 0$, de la definició de dalt admet exactament n solucions diferents, $u_0, \dots, u_{n-1}$, donades per:

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ i on $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

DEMOSTRACIÓ. Posant $z = re^{i\theta}$, $u = \rho e^{i\phi}$; llavors $u^n - z = 0$ sii:

$$\rho^n e^{in\phi} = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r & \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\phi = \theta + 2k\pi & \Leftrightarrow \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k=0,1,\dots,n-1 \end{cases}$$

d'on s'obtenen les arrels (7). ■

Remarca 18

Notem que només els valors de $k = 0, 1, \dots, n-1$ porten a valors *diferents* de les arrels (per ex. per $k = n$: $u_n = u_0$; per $k = n+1$: $u_{n+1} = u_1$; ... etc.)

Interpretació geomètrica: Les arrels n -èsimes tenen totes el mateix mòdul i els seus arguments es diferencien en $2\pi/n$ cadascun del següent. Això és, les arrels n -èsimes es troben als vèrtex d'un polígon regular inscrit a la circumferència amb centre $(0,0)$ i radi $|z|^{1/n}$ (veure l'exemple 19 a continuació).

Exemple 19 (Arrels cinques de $z = 1 + i\sqrt{3}$)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}} &= \left(2e^{i\pi/3}\right)^{1/5} = \sqrt[5]{2}e^{i(\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5})}, & \text{per } k = 0, 1, 2, 3, 4 \\
 &= \sqrt[5]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \right], & \text{per } k = 0 \\
 &= \sqrt[5]{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{15}\right) \right], & \text{per } k = 1 \\
 &= \sqrt[5]{2} \left[-\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{15}\right) \right], & \text{per } k = 2 \\
 &= \sqrt[5]{2} \left[-\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) - i \sin\left(\frac{4\pi}{15}\right) \right], & \text{per } k = 3 \\
 &= \sqrt[5]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right], & \text{per } k = 4
 \end{aligned}$$

Dibuixem $z = e^{i\pi/3}$ i les seves arrels cinques a la figura 4.

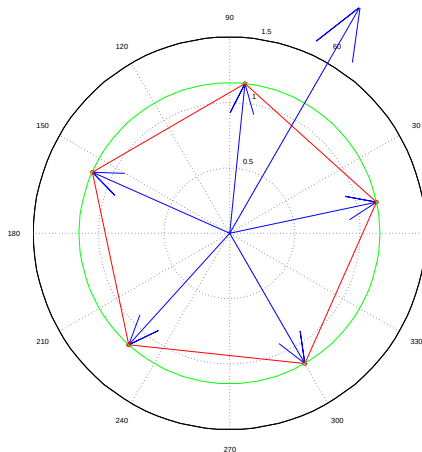


Figura 4: Arrels cinqueses de $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$.