

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀

▶▶

◀

▶

Pàgina 1 de 17

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Valors i vectors singulars

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

<https://mat-web.upc.edu/people/rafael.cubarsi/>



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament de Matemàtiques

Copyright ©2015-2017 Rafael Cubarsi (rafael.cubarsi@upc.edu)



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 4.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Alguna d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀

▶▶

◀

▶

Pàgina 3 de 17

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Índex

1	Matriu definida positiva	4
2	Notació	6
3	Matriu de projecció	7
4	Valors singulars	8
5	Vectors singulars	9
6	Descomposició en valors singulars	11
7	Matriu pseudoinversa	12
8	Aplicacions	13
9	Exemples	13

Una conseqüència del teorema de diagonalització ortogonal de matrius simètriques és la *descomposició en valors singulars* d'una matriu, que generalitza la descomposició obtinguda en la diagonalització de matrius quadrades. És una estratègia per a estudiar una matriu A , possiblement rectangular, a partir de les matrius $A^T A$ i AA^T , que són quadrades i simètriques. Recordem que una matriu simètrica real diagonalitza amb valors i vectors propis reals. Revisem, primer, uns quants conceptes que hi estan relacionats.

1. Matriu definida positiva

Estudiant l'espai euclidià hem vist que una matriu simètrica $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ s'anomena *definida positiva* si per a tot vector no nul $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es satisfà

$$\vec{x}^T M \vec{x} > 0$$

Només quan $\vec{x} = \vec{0}$, es compleix $\vec{x}^T M \vec{x} = 0$.

Havíem vist que una matriu és definida positiva si, i només si, tots els seus menors principals són estrictament positius. Ara donarem dues noves equivalències.

Propietat 1

- M és simètrica definida positiva.
- Els valors propis de M són positius.
- Existeix una matriu regular $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $M = B^T B$.

Conseqüentment, com una matriu definida positiva diagonalitza i no té cap valor propi nul, és invertible.

En canvi, si per als vectors no nuls $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es compleix

$$\vec{x}^T M \vec{x} \geq 0$$

llavors la matriu s'anomena *semidefinida positiva*.

En aquest cas, els menors principals i els valors propis són no negatius.

També es pot obtenir M com el producte

$$M = B^T B$$

però ara la matriu B pot ser singular.

Recíprocament, i més en general, amb B rectangular, es dona la següent situació.

Propietat 2

Una matriu de la forma $M = B^T B$ amb $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ és semidefinida positiva.

Òbviament, M és simètrica. D'altra banda,

$$\vec{x}^T B^T B \vec{x} = \|B\vec{x}\|^2 \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Només en el cas en que $\text{rk } B = n$, l'únic vector $\vec{x}$ que satisfà $B\vec{x} = \vec{0}$ és el vector nul. Per tant, només en aquest cas, en que les columnes de B són linealment independents, la matriu M és definida positiva i invertible (recordem que una situació com aquesta apareixia en les *equacions normals*).

2. Notació

Primer, precisarem unes qüestions de notació. En estudiar l'espai euclíà denotavem el producte escalar de dos vectors en una *base ortonormal* com el producte entre una matriu fila per una matriu columna:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Per exemple, la matriu de producte escalar a $\mathbb{R}^n$ associada a una base de matriu $E = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n]$ s'escriu com

$$E^T E = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^T \\ \vdots \\ \vec{e}_n^T \end{bmatrix} [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n] = \begin{pmatrix} \vec{e}_1^T \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_1^T \vec{e}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{e}_n^T \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n^T \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Fent servir la mateixa notació, la matriu formada com el producte d'una matriu columna per una matriu fila (anomenat producte tensorial diàdic)

$$M = \vec{a} \vec{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1, \dots, b_n] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

és una matriu de rang 1. En general, per a dues matrius $P = [\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n]$; $Q = [\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, el producte PQ^T és la suma de n matrius de rang 1:

$$PQ^T = [\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n] \begin{bmatrix} \vec{q}_1^T \\ \vdots \\ \vec{q}_n^T \end{bmatrix} = \vec{p}_1 \vec{q}_1^T + \dots + \vec{p}_n \vec{q}_n^T$$

3. Matriu de projecció

Vegem alguns exemples on apareixen sumes de matrius de rang 1. En calcular la projecció ortogonal $\vec{p}$ d'un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre el subespai generat per la base *ortonormal* formada per les columnes de la matriu $U = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m]$ obteníem $\vec{p} = U\vec{c}$, calculat a partir de les equacions normals com $U^T U \vec{c} = U^T \vec{x}$, d'on $\vec{c} = U^T \vec{x}$. És a dir, els coeficients de Fourier són $c_i = \vec{u}_i^T \vec{x}$. Llavors, fent $P_U = U U^T$, tenim

$$\vec{p} = P_U \vec{x} = (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \vec{u}_m \vec{u}_m^T) \vec{x} \quad (1)$$

Propietat 3 La projecció ortogonal de $\vec{x}$ en la direcció del vector unitari $\vec{u}_i$ és $\vec{u}_i \vec{u}_i^T \vec{x}$. La matriu $\vec{u}_i \vec{u}_i^T$ s'anomena matriu de projecció ortogonal en la direcció del vector $\vec{u}_i$.

Òbviament, $P_U^2 = P_U$ i $P_U^T = P_U$. En general, tota matriu que satisfaci $P^2 = P$ és una matriu de projecció i, a més, si $P^T = P$, la projecció és ortogonal.

Un altre cas el teníem en la diagonalització d'una matriu simètrica $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. S'havia obtingut una matriu diagonal de valors propis $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i una matriu de la base de vectors propis ortonormals $U = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$, tals que

$$M = U D U^{-1} = U D U^T$$

que dona lloc a la *descomposició espectral*

$$M = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T \quad (2)$$

on M queda expressada com a suma de matrius de projecció de rang 1 en les respectives direccions dels vectors propis ortonormals. Per tant, en aquesta base, M és diagonal.

4. Valors singulars

Considerem les següents matrius associades a una matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{A^T A} \mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{A A^T} \mathbb{R}^m$$

Llavors, per a la matriu $A^T A$, és immediat veure que es compleixen les següents propietats. Denotem $r = \text{rk } A$.

- La matriu simètrica $A^T A$ diagonalitza ortogonalment, amb valors propis λ_i i vectors propis ortonormals $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$; $i = 1, \dots, n$.
- Per la Propietat 2, els valors propis λ_i són no negatius.
- Es compleix $\|A\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i \geq 0$. És a dir, $A\vec{v}_i$ té mòdul $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
- Els vectors $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ tals que $A\vec{v}_i \neq \vec{0}$ són del subespai $\text{Row } A \in \mathbb{R}^n$ (exercici).
- Els vectors $\vec{v}_i$ de $\lambda_i \neq 0$ són una base ortonormal de $\text{Row } A$, amb $\dim \text{Row } A = \dim \text{Col } A = r$. Formen les columnes d'una matriu $V_r \in \mathcal{M}_{n \times r}$.
- Per a $\lambda_i \neq 0$, els vectors $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i \in \mathbb{R}^m$ són ortonormals (exercici).
- Una base de $\text{Col } A \in \mathbb{R}^m$ està formada per r vectors $\vec{u}_i$ (associats als $\lambda_i \neq 0$). Formen les columnes d'una matriu $U_r \in \mathcal{M}_{m \times r}$.
- Els r vectors no nuls $\vec{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$ són vectors propis de $A A^T$ amb els mateixos valors propis $\lambda_i \neq 0$ (exercici).

Plana personal

Inici

Contingut

« »

« »

Pàgina 8 de 17

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Per tant, es compleix

$$A\vec{v}_i = \vec{u}_i\sigma_i; i = 1, \dots, r$$

el que significa que, en els respectius subespais amb bases V_r de $\mathbb{R}^n$ i U_r de $\mathbb{R}^m$, la matriu diagonalitza.

Definició 1 Els valors $\sigma_i \geq 0; i = 1, \dots, n$; s'anomenen valors singulars.

S'ordenen de major a menor, $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Només ens interessen els r diferents de zero. Llavors, escriurem

$$A[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r] = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r] \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}; AV_r = U_r \Sigma_r \quad (3)$$

amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $V_r \in \mathcal{M}_{n \times r}$, $U_r \in \mathcal{M}_{m \times r}$ i $\Sigma_r \in \mathcal{M}_{r \times r}$.

Les propietats anteriors ténen les seves recíproques per la matriu AA^T , és a dir, canviant els papers de A i A^T i dels vectors $\vec{u}_i$ i $\vec{v}_i$. Com que els valors singulars són els mateixos, el càlcul més curt s'aconsegueix treballant amb la matriu de menor dimensió entre $AA^T \in \mathcal{M}_{m \times m}$ i $A^T A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

5. Vectors singulars

Fins aquí hem treballat amb r dels n vectors propis de $A^T A$ i amb r dels m vectors propis de AA^T , que són els que corresponen a valors propis diferents de zero. Ara podem completar les bases de cada espai, afegint-hi els vectors propis corresponents als valors propis nuls.

D'una banda, a $\mathbb{R}^n$ hi ha $n - r$ vectors propis ortonormals de $\text{Nul } A$, que són els $\vec{v}_i$ de $\lambda_i = 0$. Formen les columnes d'una matriu $V_{n-r} \in \mathcal{M}_{n \times (n-r)}$ i són ortogonals als vectors de $\text{Row } A$ de les columnes de la matriu $V_r \in \mathcal{M}_{n \times r}$.

D'altra banda, a $\mathbb{R}^m$ hi ha una base de $m - r$ vectors ortonormals del subespai $\text{Nul } A^T$, que corresponen als vectors propis $\vec{u}_i$ de la matriu AA^T de $\lambda_i = 0$. Formen les columnes d'una matriu $U_{m-r} \in \mathcal{M}_{m \times (m-r)}$ i són ortogonals als vectors de $\text{Col } A$ que formaven les columnes de $U_r \in \mathcal{M}_{m \times r}$.

Com les matrius $U = [U_r, U_{m-r}] \in \mathcal{M}_{m \times m}$ i $V = [V_r, V_{n-r}] \in \mathcal{M}_{n \times n}$ són ortogonals,

$$U^T U = I_m, \quad V^T V = I_n, \quad U_r^T U_r = I_r, \quad V_r^T V_r = I_r$$

Per tant, l'Eq. 3 es pot completar afegint $n - r$ columnes de zeros a Σ_r i $m - r$ files de zeros, fins a completar una matriu $\Sigma \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Aleshores, l'Eq. 3 es converteix en

$$A \underbrace{[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r]}_{\text{Row } A} \underbrace{[\dots, \vec{v}_n]}_{\text{Nul } A} = \underbrace{[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r]}_{\text{Col } A} \underbrace{[\dots, \vec{u}_m]}_{\text{Nul } A^T} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \dots \end{pmatrix} \dots 0$$

$$AV = U\Sigma \quad (4)$$

amb, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $V \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $U \in \mathcal{M}_{m \times m}$ i $\Sigma \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Definició 2 Els vectors de les columnes de la matriu U s'anomenen vectors singulars per l'esquerra, i els de les columnes de V són els vectors singulars per la dreta.

6. Descomposició en valors singulars

Com V és invertible i $V^{-1} = V^T$, a partir de l'Eq. 4 trobem una forma diagonal per a la matriu A :

$$A = U \Sigma V^T \quad (5)$$

resultat d'haver triat les bases V de $\mathbb{R}^n$ i U de $\mathbb{R}^m$. Una conseqüència important és una nova propietat sobre la invertibilitat d'una matriu.

Propietat 4 Una matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ és invertible si, i només si, té n valors singulars diferents de zero.

Que és equivalent a $\dim \text{Col } A = \dim \text{Row } A = n$, $\dim \text{Nul } A = \dim \text{Nul } A^T = 0$.

La descomposició equival a fer, primer, un canvi de base ortogonal en $\mathbb{R}^n$, després un canvi d'escala entre les direccions dels vectors singulars i, finalment, un canvi de base ortogonal en $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \\ V^T \downarrow & & \uparrow U \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Alternativament, l'equació 5 s'expressa com una suma de matrius de rang 1,

$$A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \vec{u}_r \vec{v}_r^T \quad (6)$$

que també és vàlida per a l'Eq. 3, anomenada descomposició en valors singulars reduïda, que s'acostuma a escriure com

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T \quad (7)$$

7. Matriu pseudoinversa

En resoldre un sistema sobredeterminat $\vec{y} = A\vec{x}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, per mínims quadrats s'obté una solució $\vec{x}$ tal que $\hat{\vec{y}} = A\vec{x}$ és la *projecció ortogonal del vector $\vec{y}$ sobre el subespai generat per les columnes de la matriu A* .

Si expressem A mitjançant la descomposició en valors singulars reduïda

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T$$

recordant que Col A té per base U_r i tenint en compte la matriu de projecció de l'Eq. 1, la condició anterior equival a dir que $\hat{\vec{y}} = U_r U_r^T \vec{y}$. Per tant, la solució $\vec{x}$ satisfà

$$A\vec{x} = U_r U_r^T \vec{y}$$

Llavors,

$$U_r \Sigma_r V_r^T \vec{x} = U_r U_r^T \vec{y}$$

Com $V_r^T V_r = U_r^T U_r = I_r$ i la matriu diagonal Σ_r és invertible, la solució serà

$$\vec{x} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \vec{y}$$

on la matriu

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T \in \mathcal{M}_{n \times m}$$

és la *matriu pseudoinversa* de A . És fàcil veure que la solució $\vec{x} = A^+ \vec{y}$ verifica les equacions normals i, per tant,

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

La matriu pseudoinversa satisfà (equacions de Moore-Penrose)

$$AA^+A = A; \quad A^+AA^+ = A^+; \quad (AA^+)^T = AA^+; \quad (A^+A)^T = A^+A$$

8. Aplicacions

L'equació 6 s'utilitza per a fer aproximacions d'una matriu a partir dels primers termes de la sèrie quan la dimensió és molt gran. El comportament dominant d'una matriu està associat al valor singular major, mentre que els altres hi van afegint detalls. Això s'usa per a compressió d'imatges i per a indexació de continguts a internet. També és la base de l'anàlisi de components principals en estadística, per a determinar quines variables són les que produeixen més dispersió. Numèricament, el nombre de valors singulars positius és una forma estable d'avaluar el rang d'una matriu. El valor σ_1/σ_r s'anomena nombre de condició de la matriu A , i és indicatiu de com la solució d'un sistema d'equacions associat a aquesta matriu es veu afectada pels errors dels seus coeficients. Un nombre de condició gran dóna lloc a un problema mal condicionat.

9. Exemples

Exemple 1 Trobem els valors i vectors singulars de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Com $A = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matriu és suma de matrius de rang 1, d'acord amb l'Eq. 2. Els valors singulars i la descomposició són únics, per tant, $\sigma_1 = 3$ i $\sigma_2 = 1$. D'altra banda, aquestes matrius es poden escriure com

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on, els respectius vectors singulars, per la dreta i per l'esquerra, són

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que són unitaris i ortogonals dos a dos.

Exemple 2 Calculem la descomposició en valors singulars la matriu $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

La matriu $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$ s'expressarà com $U\Sigma V^T$ amb

$$U \in \mathcal{M}_{3 \times 3}, \quad \Sigma \in \mathcal{M}_{3 \times 2}, \quad V \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$$

Primer diagonalitzem la matriu

$$A^T A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$$

Recordem que els valors propis d'una matriu M , 2×2 , es poden calcular directament com

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{tr } M \pm \sqrt{\text{tr}^2 M - 4 \det M})$$

d'on obtenim els valors propis i els valors singulars, ja ordenats de major a menor,

$$\lambda_1 = 90 \Rightarrow \sigma_1 = 3\sqrt{10}, \quad \lambda_2 = 10 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{10}$$

El vector propi de $\lambda_1 = 90$ és un vector $\vec{v}_1 \in \text{Nul}(A^T A - 90I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{pmatrix}$.

Per tant, $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ja normalitzat, és un vector singular de A per la dreta.

Calculem el corresponent vector singular per l'esquerra,

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \vec{v}_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que és unitari.

El vector propi de $\lambda_2 = 10$ és un vector $\vec{v}_2 \in \text{Nul}(A^T A - 10I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{pmatrix}$.

Lavors, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ja normalitzat, és l'altre vector singular de A per la dreta, que és ortogonal a $\vec{v}_1$. Observem que aquest vector s'hauria pogut trobar directament com l'unitari ortogonal a $\vec{v}_1$, en ser V una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. En dimensió superior, però, cal calcular sempre el vector propi.

El respectiu vector singular per l'esquerra és

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

que és unitari i ortogonal a $\vec{u}_1$. Aquí no passa com abans, que aquesta operació ens la podíem estalviar, ja que vectors proporcionals a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ també serien ortogonals a $\vec{u}_1$.

La base ortonormal de la matriu U té tres vectors. Ens en falta un. Aquest vector és $\vec{u}_3 \in \text{Nul } A^T$, que el podem calcular a partir d'aquesta condició, o bé imposant que sigui ortogonal a $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, i unitari. Així, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per tant, la descomposició en valors singulars de A és

$$A = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Observem que hem hagut de completar la matriu Σ , que té la mateixa dimensió que la matriu original A , amb una fila de zeros.

Exemple 3 *Descomposem en valors singulars la matriu* $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

En primer lloc, fixem-nos en les dimensions dels espais que transformen les matrius:

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A^T A} \mathbb{R}^3 \quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{A A^T} \mathbb{R}^2$$

És més ràpid treballar amb la matriu $A A^T$ que no pas amb $A^T A$, a canvi d'intercanviar els papers de V i U . Ens els dos casos hem de buscar els valors propis positius que, en ser els mateixos, n'hi ha 2 com a màxim. Per tant, diagonalitzem la matriu 2×2

$$A A^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

Calculem els valors propis com en l'exemple anterior, i obtenim

$$\lambda_1 = 25 \Rightarrow \sigma_1 = 5, \quad \lambda_2 = 9 \Rightarrow \sigma_2 = 3$$

El vector propi de $\lambda_1 = 25$ és un vector $\vec{u}_1 \in \text{Nul}(A A^T - 25I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$.

Per tant, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, ja normalitzat, és un vector singular de A per l'esquerra.

Calculem el corresponent vector singular per la dreta, que serà unitari,

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A^T \vec{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector propi de $\lambda_2 = 9$ és un vector $\vec{u}_2 \in \text{Nul}(AA^T - 9I) = \text{Nul} \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Llavors, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, ja normalitzat, és l'altre vector singular per l'esquerra de A , ortogonal a $\vec{u}_1$.

El respectiu vector singular per la dreta, també unitari i ortogonal a $\vec{v}_1$, és

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^T \vec{u}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ja tenim la descomposició en valors singulars reduïda:

$$A = \sigma_1 \vec{u}_1 \vec{v}_1^T + \sigma_2 \vec{u}_2 \vec{v}_2^T = 5 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Per a calcular la matriu de la base ortonormal completa V ens falta un vector $\vec{v}_3 \in \text{Nul } A$, que també el podem calcular imposant que sigui ortogonal a $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, i unitari.

Així, $\vec{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finalment, la descomposició completa queda com

$$A = U \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

on, Σ , amb la mateixa dimensió que A , s'ha acabat d'omplir amb una columna de zeros.