

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀

▶▶

◀

▶

Pàgina 1 de 18

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Subespais fonamentals

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

<https://mat-web.upc.edu/people/rafael.cubarsi/>



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament de Matemàtiques

Copyright ©2015-2020 Rafael Cubarsi (rafael.cubarsi@upc.edu)



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 4.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Alguna d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode>

Índex

1	Subespais associats a la matriu A	4
2	Subespais associats a la matriu A^T	6
3	Exemples	8
4	Relació amb el producte escalar	11
5	Millor aproximació a partir de Col A	13
6	Millor aproximació a partir de Row A	14
7	Exemples	15
8	Aplicacions lineals associades a A i A^T	16

1. Subespais associats a la matriu A

Una matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ transforma vectors d'acord amb el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{array}$$

Definirem dos subespais vectorials relacionats amb la matriu A .

Definició 1 El subespai nul $\text{Nul } A$ es defineix a partir de les seves equacions implícites:

$$\text{Nul } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m\}$$

Així,

$$\text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

El nombre d'equacions linealment independents (l.i.) del sistema homogeni $A\vec{x} = \vec{0}$ vé donat per $\text{rk } A$, mentre que el nombre de graus de llibertat del sistema és $n - \text{rk } A$, coincidint amb el nombre de generadors l.i. de $\text{Nul } A$.

Per tant,

Propietat 1

$$\dim \text{Nul } A = n - \text{rk } A$$

Ara considerem les columnes de la matriu A com a vectors generadors d'un altre subespai vectorial.

Definició 2 *El subespai columna $\text{Col } A$ es defineix a partir de les combinacions lineals de les columnes de A :*

$$\text{Col } A = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y} = A\vec{x}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Per tant,

$$\text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^m$$

El nombre de vectors base d'aquest subespai és $\text{rk } A$. És a dir:

Propietat 2

$$\dim \text{Col } A = \text{rk } A$$

Per tant,

$$\dim \text{Nul } A + \dim \text{Col } A = n$$

La darrera relació, però, no vol dir que els respectius subespais siguin complementaris, ja que, en general, pertanyen a espais vectorials diferents.

2. Subespais associats a la matriu A^T

La matriu transposada $A^T \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ transforma els vectors d'acord amb el següent diagrama de l'esquerra:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{A^T} & \mathbb{R}^n \\
 \vec{y} & \longmapsto & A^T \vec{y}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\
 \vec{y}^T & \longmapsto & \vec{y}^T A
 \end{array}$$

que, en termes de la matriu A , i considerant un vector com una matriu fila multiplicant per l'esquerra de la matriu, és equivalent al diagrama de la dreta.

Ara definirem els dos subespais vectorials anteriors en relació a la matriu transposada A^T .

Definició 3 El subespai $\text{Col } A^T$ és el generat les columnes de A^T :

$$\text{Col } A^T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = A^T \vec{y}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m \}$$

Ara bé, tenint en compte el segon dels diagrames anteriors, aquest espai és el mateix que el **subespai fila** $\text{Row } A$, generat per les combinacions lineals de les files de A , fetes per l'esquerra:

Definició 4

$$\text{Row } A = \{ \vec{x}^T \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x}^T = \vec{y}^T A, \vec{y}^T \in \mathbb{R}^m \}$$

Donat que $\text{rk } A = \text{rk } A^T$, es compleix:

Propietat 3

$$\begin{aligned}\text{Col } A^T &= \text{Row } A \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim \text{Col } A^T &= \dim \text{Row } A = \text{rk } A\end{aligned}$$

De manera semblant definim el subespai $\text{Nul } A^T$.

Definició 5 *El subespai nul per l'esquerra de A , $\text{Nul } A^T$, es defineix a partir de les seves equacions implícites:*

$$\begin{aligned}\text{Nul } A^T &= \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \vec{y} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n\} = \\ &= \{\vec{y}^T \in \mathbb{R}^m \mid \vec{y}^T A = \vec{0}^T \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

Així,

$$\text{Nul } A^T \subseteq \mathbb{R}^m$$

El nombre d'equacions l.i. del sistema homogeni $A^T \vec{y} = \vec{0}$ ve donat per $\text{rk } A$, mentre que el nombre de graus de llibertat del sistema és $m - \text{rk } A$, coincidint amb el nombre de vectors base de $\text{Nul } A^T$. Per tant,

Propietat 4

$$\begin{aligned}\dim \text{Nul } A^T &= m - \text{rk } A \\ \dim \text{Nul } A^T + \dim \text{Col } A^T &= m\end{aligned}$$

3. Exemples

Suposem que la matriu A té una forma esgalonada per files R resultant d'aplicar el mètode de reducció de Gauss.

Convé recordar que si es calcula R seguint l'algoritme de Doolittle, la matriu triangular superior R és el resultat d'una sèrie de combinacions lineals de les files de A que es pot expressar de manera única com el producte

$$A = LU$$

on L és una matriu regular i $U = R$.

Observació 1 A partir de les columnes de R que contenen un pivot (el primer element no nul d'una fila), podem saber les columnes de A que generen el subespai $\text{Col } A$.

És a dir, $\text{Col } A \neq \text{Col } R$, però, si R^i és una columna de R que conté un pivot, la columna i -èsima de A és un vector base de $\text{Col } A$.

Exemple 1 Considerem una matriu $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}$, que transforma vectors $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3$, i sigui R la seva forma esglaonada (amb els pivots enquadrats):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de $\text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^3$ la formen els vectors de les columnes 1 i 2 de A : $\{(1, 1, -3), (3, 1, 1)\}$.

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 8 de 18

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Observació 2 Les files no nul·les de R són base de $\text{Row } A$, ja que son combinacions lineals de les de files de A , i són linealment independents. Per tant,

$$\text{Row } A = \text{Row } R$$

Exemple 2 Seguim l'exemple anterior. Una base de $\text{Row } A \subseteq \mathbb{R}^4$ la formen les files no nul·les de R : $\{(1, 3, -1, 1), (0, -2, 0, -1)\}$.

Observació 3 El subespai $\text{Nul } A$ està format per vectors que satisfan el sistema homogeni $A\vec{x} = \vec{0}$. Per tant, les seves components també verificaran el sistema equivalent $R\vec{x} = \vec{0}$. Així,

$$\text{Nul } A = \text{Nul } R$$

Exemple 3 Per a trobar $\text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^4$, millor encara que resoldre el sistema $R\vec{x} = \vec{0}$, és fer-ho a partir de la forma esglaonada reduïda de la matriu (obtinguda pel mètode de Gauss-Jordan), en aquest cas donada per la matriu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x_1 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$; $x_2 = -\frac{1}{2}x_4$, amb dos graus de llibertat. Llavors,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Nul } A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Hi ha una manera fàcil de calcular el subespai nul per l'esquerra $\text{Nul } A^T$ si tenim la factorització $A = LU$. Com $L^{-1}A = U$, podem procedir de la forma següent:

Observació 4 Si $\vec{v}^T = L_i^{-1}$ és una fila de L^{-1} , que és enviada per A a una fila nul·la de U ,

$$\vec{v}^T A = \vec{0}^T$$

llavors $\vec{v}^T$ és un vector base de $\text{Nul } A^T$.

Com les files de L^{-1} són l.i., podem trobar tota la base de $\text{Nul } A^T$, amb tants vectors com files nul·les tingui U .

Exemple 4 Continuant amb els exemples anteriors, es compleix

$$A = LU : \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}A = U : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pert tant, $\text{Nul } A^T = \langle (-2, 5, 1) \rangle$, de la darrera fila de L^{-1} .

Fixem-nos en que hem obtingut subespais complementaris:

$$\mathbb{R}^4 = \text{Nul } A \oplus \text{Col } A^T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathbb{R}^3 = \text{Nul } A^T \oplus \text{Col } A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Relació amb el producte escalar

Suposem que expressem els vectors en bases ortonormals de $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. En aquest cas, la mètrica dels productes escalars és la matriu identitat en cada espai.

Tot vector $\vec{y}^T \in \text{Nul } A^T$ satisfà $\vec{y}^T A = \vec{0}^T$. Per tant, $\vec{y}$ és un vector de $\mathbb{R}^m$ ortogonal a cada columna A^i de A ; $i = 1, \dots, n$.

Propietat 5

$$\vec{y} \cdot A^i = 0 \iff \text{Nul } A^T \perp \text{Col } A$$

Observi's que $\text{Col } A$ està format per les combinacions lineals $A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, i es verifica

$$\vec{y}^T (A\vec{x}) = 0$$

D'aquesta forma, per a cada matriu $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, hem trobat els subespais ortogonals: $V = \text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^m$, definit per generadors, i $V^\perp = \text{Nul } A^T \subseteq \mathbb{R}^m$, definit per les equacions implícites. Es verifica $\dim V + \dim V^\perp = m$, per tant,

Propietat 6

$$\text{Nul } A^T \oplus \text{Col } A = \mathbb{R}^m$$

Semblantment, tot vector $\vec{x} \in \text{Nul } A$ satisfà $A\vec{x} = \vec{0}$. Per tant, $\vec{x}$ és un vector de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a cada fila A_i de A ; $i = 1, \dots, m$.

Propietat 7

$$A_i \cdot \vec{x} = 0 \iff \text{Nul } A \perp \text{Row } A \iff \text{Nul } A \perp \text{Col } A^T$$

Com $\text{Row } A = \text{Col } A^T$ està format per les combinacions lineals de les files de A , és a dir, $\vec{y}^T A$ amb $\vec{y}^T \in \mathbb{R}^m$, es satisfà

$$(\vec{y}^T A)\vec{x} = 0$$

Els subespais ortogonals $W = \text{Col } A^T = \text{Row } A \subseteq \mathbb{R}^n$, definit per generadors, i $W^\perp = \text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^n$, definit per les equacions implícites, verifiquen $\dim W + \dim W^\perp = n$, per tant,

Propietat 8

$$\text{Nul } A \oplus \text{Col } A^T = \mathbb{R}^n$$

Si les bases no són les canòniques i les matrius de productes escalars són G_n en $\mathbb{R}^n$ i G_m en $\mathbb{R}^m$, és immediat obtenir les següents relacions:

Propietat 9

$$\text{Nul } AG_n \perp_{G_n} \text{Col } A^T; \quad \text{Nul } AG_n \oplus \text{Col } A^T = \mathbb{R}^n$$

$$\text{Nul } A^T G_m \perp_{G_m} \text{Col } A; \quad \text{Nul } A^T G_m \oplus \text{Col } A = \mathbb{R}^m$$

5. Millor aproximació a partir de Col A

Considerem una matriu

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$$

i un vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^m = \text{Col } A \oplus \text{Nul } A^T$. Si la matriu A està formada per columnes linealment independents, i.e., $\dim \text{Col } A = n \leq m$, la descomposició

$$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}''; \quad \vec{b}' \in \text{Col } A, \quad \vec{b}'' \in \text{Nul } A^T$$

és única i proporciona la *millor aproximació* $\vec{b}'$ de $\vec{b}$ a partir de Col A . La diferència $\vec{b}'' = \vec{b} - \vec{b}' \in \text{Nul } A^T$ és el vector que dona l'error de l'aproximació. La norma $\|\vec{b} - \vec{b}'\|$ s'anomena *error quadràtic* de l'aproximació.

En efecte, suposem el cas general $\vec{b} \notin \text{Col } A$. Llavors existeix un vector no nul $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{b}' = A\vec{x} \in \text{Col } A$. Per a trobar $\vec{x}$ n'hi ha prou en imposar la condició $\vec{b}'' = \vec{b} - A\vec{x} \in \text{Nul } A^T$, és a dir,

$$A^T \vec{b} - A^T A \vec{x} = \vec{0}$$

Aquest sistema d'equacions, anomenat d'*equacions normals*, quan $\text{rk } A = n$ (és a dir, $\text{rk } A^T A = n$ i la matriu $A^T A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ és invertible) és compatible determinat i proporciona la solució buscada,

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} \Rightarrow \vec{b}' = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

La matriu $A^+ \equiv (A^T A)^{-1} A^T$ és l'anomenada *matriu pseudoinversa*.

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 13 de 18

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

6. Millor aproximació a partir de Row A

La situació anterior es dóna quan es vol aproximar un sistema sobredeterminat d'equacions $A\vec{x} = \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ i $n < m$, és a dir, amb més equacions que incògnites. Semblantment, trobar la millor aproximació d'un vector $\vec{c}^T \in \mathbb{R}^n$ a partir d'una combinació lineal de les files de A , i.e., $\vec{y}^T A$, es pot interpretar com un sistema sobredeterminat d'equacions $\vec{y}^T A = \vec{c}^T$, on les incògnites són ara les components de $\vec{y}^T \in \mathbb{R}^m$, amb més equacions que incògnites ($n > m$).

La millor aproximació del vector $\vec{c} \in \mathbb{R}^n = \text{Row } A \oplus \text{Nul } A$ a partir de Row A és única quan les files de A són linealment independents, per tant, $\text{rk } A = m \leq n$. Considerem la descomposició

$$\vec{c} = \vec{c}' + \vec{c}''; \quad \vec{c}' \in \text{Row } A, \quad \vec{c}'' \in \text{Nul } A$$

Ens situem en el cas general $\vec{c} \notin \text{Row } A$. Llavors existeix un vector no nul $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\vec{c}' = A^T \vec{y} \in \text{Row } A = \text{Col } A^T$. Per a trobar $\vec{y}$ n'hi ha prou en imposar la condició $\vec{c}'' = \vec{c} - A^T \vec{y} \in \text{Nul } A$, és a dir,

$$A\vec{c} - AA^T \vec{y} = \vec{0}$$

Si $\text{rk } A = m$, llavors $AA^T \in \mathcal{M}_{m \times m}$ és de rang m i el sistema d'equacions anterior, invertible, proporciona la solució buscada,

$$\vec{y} = (AA^T)^{-1} A\vec{c} \Rightarrow \vec{c}' = A^T (AA^T)^{-1} A\vec{c}$$

7. Exemples

Exemple 5 Considerem el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $m < n$ i $\text{rk } A = m$. Llavors, hi ha un únic un vector $\vec{x} \in \text{Col } A^T$ que n'és solució, tot i que el sistema té infinites solucions.

En efecte, prenem $\vec{x} \in \text{Col } A^T$, és a dir, $\vec{x} = A^T \vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Llavors hem de resoldre $AA^T \vec{v} = \vec{b}$. Com, per l'exemple anterior, $\text{rk } AA^T = \text{rk } A = m$, $AA^T \in \mathcal{M}_{m \times m}$ és invertible i la solució $\vec{v} = (AA^T)^{-1} \vec{b}$ és única, d'on $\vec{x} = A^T (AA^T)^{-1} \vec{b} \in \text{Col } A^T$.

D'altra banda, $\mathbb{R}^n = \text{Nul } A \oplus \text{Col } A^T$ i $\dim \text{Nul } A = n - \text{rk } A = n - m > 0$. Per tant, qualsevol vector de $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} = \vec{x} + \vec{w}$, amb $\vec{x}$ l'anterior vector de $\text{Col } A^T$ i $\vec{w} \in \text{Nul } A$, també és solució del sistema.

Exemple 6 Considerem el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ amb $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $n < m$ i $\text{rk } A = n$. Depenent de si $\vec{b} \in \text{Col } A$ o $\vec{b} \notin \text{Col } A$, quantes solucions té el sistema? En cas que $\vec{b} \notin \text{Col } A$, quina és la projecció ortogonal de $\vec{b}$ sobre $\text{Col } A$? és única?

Si $\vec{b} \in \text{Col } A$, $\text{rk } A = \text{rk}(A|\vec{b}) = n$. Pel T. de Roché-Frobenius, el sistema té solució única. Si $\vec{b} \notin \text{Col } A$, $\text{rk } A < \text{rk}(A|\vec{b})$ i el sistema és incompatible.

Observem que $\mathbb{R}^m = \text{Nul } A^T \oplus \text{Col } A$ i $\dim \text{Nul } A^T = m - \text{rk } A = m - n > 0$. Si $\vec{b} \notin \text{Col } A$, la projecció ortogonal serà un vector $\vec{b}' = A\vec{x} \in \text{Col } A$ tal que $A^T(A\vec{x} - \vec{b}) = 0$. Com $\text{rk } A^T A = \text{rk } A = n$, $A^T A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ és invertible i la solució $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$ és única, d'on $\vec{b}' = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$.

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 15 de 18

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

8. Aplicacions lineals associades a A i A^T

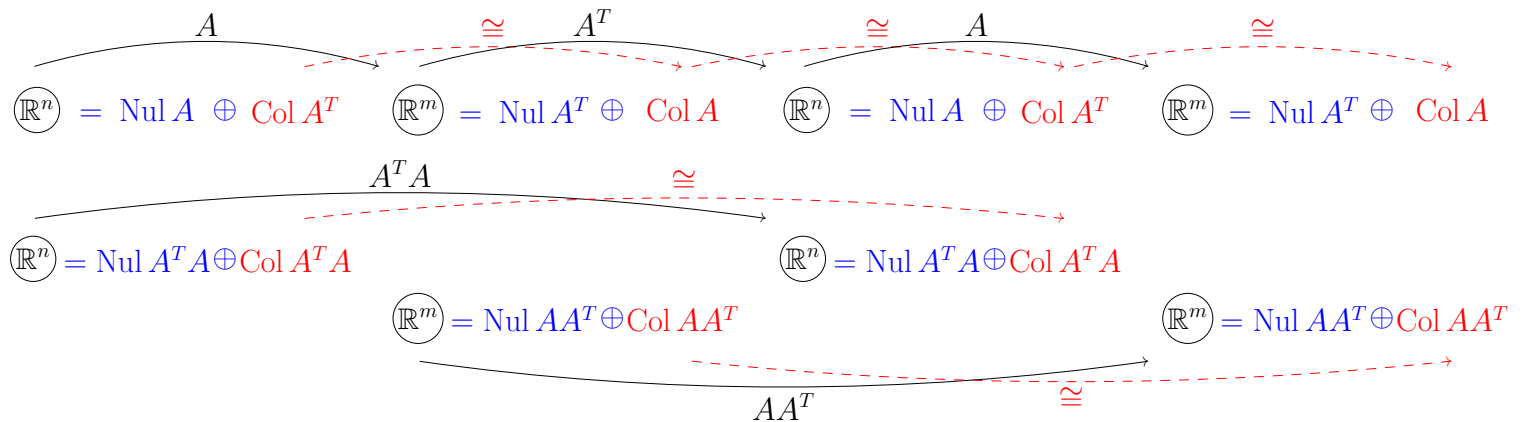
Exemple 7 Considerem les aplicacions lineals donades per matrius a les bases canòniques:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m, \quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^n$$

Relacionarem els subespais fonamentals lligats a A i A^T amb els de $A^T A$ i AA^T , i provarem les següents igualtats:

1. $\text{Nul } A = \text{Nul } A^T A$
2. $\text{Col } A^T = \text{Col } A^T A$
3. $\text{Nul } A^T = \text{Nul } AA^T$
4. $\text{Col } A = \text{Col } AA^T$
5. $\text{rk } A = \text{rk } A^T = \text{rk } AA^T = \text{rk } A^T A$

Primer, representem aquests subespais amb les respectives aplicacions:



Observem que les aplicacions marcades en vermell, entre subespais de la mateixa dimensió, gràcies a la propietat 5, corresponen a bijeccions ($\cong$).

Provem les igualtats.

1. $\text{Nul } A = \text{Nul } A^T A.$

Vegem que $\text{Nul } A \subset \text{Nul } A^T A$. Si $\vec{x} \in \text{Nul } A \subset \mathbb{R}^n$, llavors $A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$, d'on $A^T A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Per tant, $\vec{x} \in \text{Nul } A^T A$.

Ara provem que $\text{Nul } A^T A \subset \text{Nul } A$. Si $\vec{x} \in \text{Nul } A^T A \in \mathbb{R}^n$, llavors $A^T A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ i $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0$. És a dir, $\|A\vec{x}\| = 0$, el qual implica $A\vec{x} = \vec{0}$. És a dir, $\vec{x} \in \text{Nul } A$.

2. $\text{Col } A^T = \text{Col } A^T A$. Vegem que $\text{Col } A^T \subset \text{Col } A^T A$. Llavors, per a tot vector $\vec{x} \in \text{Col } A^T \subset \mathbb{R}^n$, $\exists \vec{v} \in \text{Col } A \subset \mathbb{R}^m$ tal que $\vec{x} = A^T \vec{v}$. És a dir, $\vec{x} = A^T A\vec{c}$, per a cert $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Per tant, $\vec{x} \in \text{Col } A^T A$.

Ara provem que $\text{Col } A^T A \subset \text{Col } A^T$. Això és immediat, doncs si $\vec{x} \in \text{Col } A^T A \subset \mathbb{R}^n$, $\exists \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x} = A^T (A\vec{v})$. Per tant, $\vec{x} \in \text{Col } A^T$.

3 i 4. $\text{Nul } A^T = \text{Nul } AA^T$, $\text{Col } A = \text{Col } AA^T$. Es demostren com les anteriors.

5. $\text{rk } A = \text{rk } A^T = \text{rk } AA^T = \text{rk } A^T A$.

Com $\text{rk } A = \text{rk } A^T = \dim \text{Col } A = \dim \text{Col } A^T$, $\text{rk } A^T A = \dim \text{Col } A^T A$ i $\text{rk } AA^T = \dim \text{Col } AA^T$, per les igualtats 2 i 4 obtenim $\text{rk } A = \text{rk } A^T A = \text{rk } AA^T$.

Una conseqüència d'aquestes propietats és que si $A = A^T$, llavors

$$\text{Nul } A = \text{Nul } A^n, \quad \text{rk } A = \text{rk } A^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Exemple 8 Donat el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, anem a justificar les següents afirmacions:

1. Existeix un vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ que fa el sistema incompatible si i només si $\text{rk } A < m$. En aquest cas, $\dim \text{Nul } A^T > 0$ i $\dim \text{Col } A < m$.
2. Si A és la matriu d'un epimorfisme, el sistema mai serà incompatible.
3. Existeix un vector $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ que fa el sistema compatible indeterminat si i només si $\text{rk } A < n$. En aquest cas, $\dim \text{Nul } A > 0$, $\dim \text{Row } A < n$ i tot sistema compatible té infinites solucions.
4. Si A és la matriu d'un monomorfisme, tot sistema compatible té solució única.

En efecte,

1. Incompatible vol dir que $\text{rk } A < \text{rk}(A|\vec{b})$; com $\text{rk}(A|\vec{b}) \leq m$, llavors $\text{rk } A < m$. D'altra banda, si $\dim \text{Col } A = \text{rk } A < m$, com $\dim \text{Nul } A^T + \text{rk } A = m$, llavors $\dim \text{Nul } A^T > 0$ i tot vector $\vec{b} \in \text{Nul } A^T$ fa el sistema incompatible.
2. Si A és la matriu d'un epimorfisme, llavors $\text{rk } A = m$, $\text{Nul } A^T = \{\vec{0}\}$ i $\text{Col } A = \mathbb{R}^m$. Per tant, $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\text{rk } A = \text{rk}(A|\vec{b}) = m$. És a dir, el sistema és compatible.
3. Compatible indeterminat vol dir que $\text{rk } A = \text{rk}(A|\vec{b}) < n$. D'altra banda, si $\dim \text{Row } A = \text{rk } A < n$, $\dim \text{Nul } A = n - \text{rk } A > 0$; per tant, si a una solució del sistema li afegim un vector de $\text{Nul } A$, continuarà essent solució.
4. Si A és la matriu d'un monomorfisme, $\text{rk } A = n$. Per tant, $\text{Nul } A = \{\vec{0}\}$ i $\text{Row } A = \mathbb{R}^n$. Un sistema compatible satisfarà $\text{rk } A = \text{rk}(A|\vec{b}) = n$, per tant, tindrà solució única i entre $\text{Row } A$ i $\text{Col } A$ hi haurà una bijecció.