

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀

▶▶

◀

▶

Pàgina 1 de 20

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Polinomis de matrius i descomposició primària

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

<http://www-ma4.upc.edu/~rcubarsi>



Departament de **Matemàtica Aplicada IV**

Copyright ©2010 Rafael Cubarsi (rcubarsi@mat.upc.edu)



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 3.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

Plana personal

Inici

Contingut

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Pàgina 3 de 20

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Índex

1	Polinomis de matrius	4
1.1	Polinomi anul·lador	5
1.2	Polinomi mínim	7
2	Subespais invariants	9
3	Valors propis complexos	11
4	Descomposició primària	15

1. Polinomis de matrius

Els endomorfismes d'un espai vectorial E es poden compondre entre ells i continuen essent endomorfismes de E . Recordem que fixant una base, la composició d'endomorfismes correspon a la multiplicació de matrius. Un cas particular d'aquesta composició és el següent,

Definició 1 Considerem $f : E \rightarrow E$ endomorfisme, i el polinomi

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t].$$

El polinomi $p(t)$ avaluat en f és l'endomorfisme de E

$$p(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 I,$$

$$\text{on } f^k(\vec{v}) = f \circ \cdots \circ f(\vec{v}).$$

Les següents propietats són immediates de comprovar.

Propietat 1 Si $f : E \rightarrow E$ és endomorfisme, i $p, q \in \mathbb{R}[t]$, aleshores:

- $(p + q)(f) = p(f) + q(f)$.
- $(p \cdot q)(f) = (q \cdot p)(f) = p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.
- Si f té matriu A en una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, llavors $p(f)$ té matriu

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Exemple 1 Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $p(t) = t^2 - 2t + 4$, aleshores

$$p(A) = A^2 - 2A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.1. Polinomi anul·lador

De la mateixa manera que les arrels donen informació sobre un polinomi, fixat un endomorfisme f , mirar quins polinomis compleixen $p(f) = 0$ dona informació sobre f .

Teorema 1 Sigui $p(t)$ un polinomi de $\mathbb{R}[t]$ i f un endomorfisme. Si $p(f) = 0$, tots els valors propis de f han de ser zeros de $p(t)$.

Ara ens preguntem si, donat un endomorfisme f , hi ha algun polinomi tal que $p(f) = 0$. Ja que les matrius $n \times n$ i els endomorfismes d'un espai de dimensió n formen un espai vectorial de dimensió n^2 , els endomorfismes $\{I, f, f^2, \dots, f^{n^2}\}$ han de ser linealment dependents, i una relació entre ells donarà un polinomi verificant $p(f) = 0$ de grau n^2 o menys.

Ara bé, per la relació entre valors propis de f i zeros de p , resulta que hi ha un polinomi de grau molt més baix que també anul·la f .

Teorema 2 (de Cayley-Hamilton) $p_f(f) = 0$.

(Pel polinomi característic $p_f(t)$, associat a l'endomorfisme f , es fa servir la mateixa notació que en les transparències anteriors d'àlgebra lineal.)

Exemple 2 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme que, en la base canònica, té per matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. El polinomi característic és $p_f(t) = t^2 - 3t + 3$. Comprovem el teorema de Cayley-Hamilton:

$$A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, conèixer un polinomi que s'anul·li en la matriu permet calcular la seva inversa. Com $A^2 - 3A + 3I = 0$, podem aïllar I i treure factor comú A ,

$$-\frac{1}{3}A(A - 3I) = I.$$

Com la inversa és única,

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 3I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Propietat 2 Sigui $p(t)$ un polinomi de $\mathbb{R}[t]$ i f un endomorfisme que diagonalitza. Una matriu associada a f es pot escriure com $A = CDC^{-1}$, amb $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Llavors, $p(f)$ també diagonalitza i $p(A) = C p(D) C^{-1}$, amb $p(D) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$.

1.2. Polinomi mínim

El polinomi característic no té per què ser el més simple que anul·li un endomorfisme.

Definició 2 *El polinomi mínim d'un endomorfisme f és el polinomi $m_f(t)$ de grau mes petit tal que $m_f(f) = 0$.*

El polinomi mínim existeix i és únic, llevat de producte per escalar.

Exemple 3 *L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, té per matriu*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

té polinomi característic

$$p_f(t) = -(t - 2)^2(t + 1),$$

però podem comprovar fàcilment que $p(t) = (t-2)(t+1)$ verifica $p(f) = 0$. Sabem que tot $p(t)$ tal que $p(f) = 0$ ha de tenir com a zeros els valors propis $-1, 2$, per tant $(t - 2)(t + 1)$ és el polinomi mínim de f .

Proposició 1 *Si un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ diagonalitza i té valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, amb independència de la seva multiplicitat, el seu polinomi mínim és $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$.*

Una altra propietat dels polinomis que anul·len a endomorfismes és la següent:

Teorema 3 *Sigui $f : E \rightarrow E$ un endomorfisme. Si existeix un polinomi $p(t)$ que anul·la f i té tots els seus zeros simples, aleshores f diagonalitza (pot tenir zeros complexos i diagonalitzar en $\mathbb{C}$).*

Exemple 4 *Sigui f un endomorfisme tal que $f^2 = f$. Llavors el polinomi*

$$p(t) = t^2 - t$$

s'anul·la en f . Això proporciona informació sobre f :

- *Els valors propis de p han d'estar entre els zeros de f . Poden ser 0 o 1.*
- *Com $p(t)$ té els zeros simples, f diagonalitza.*

$F = \ker(f - I)$ i $G = \ker f$ són els únics subespais propis i f diagonalitza. Llavors, $E = F \oplus G$, és a dir, F i G són subespais complementaris.

El subespai F és propi de valor propi 1, així, si $\vec{u} \in F$, $f(\vec{u}) = \vec{u}$. El subespai G és el nucli de f . Llavors, qualsevol vector $\vec{v} \in E$ es pot escriure de manera única com $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, amb $\vec{u} \in F$, $\vec{w} \in G$.

En aplicar f tenim

$$f(\vec{v}) = f(\vec{u} + \vec{w}) = f(\vec{u}) + f(\vec{w}) = \vec{u}.$$

Per tant, l'aplicació f envia cada vector a la seva component en F . Aquest endomorfisme es la projecció sobre F en la direcció de G .

2. Subespais invariants

Recordem el següent resultat:

Teorema 4 *Suposem que U i V són subespais vectorials de E , amb bases respectives $\mathcal{B}_U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ i $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, disjunts. Llavors $E = U \oplus V$ si, i només si, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V$ és base de E .*

Aquest resultat i els següents són igualment vàlids per un nombre més gran de subespais.

Definició 3 *Sigui $f : E \rightarrow E$, $E = U \oplus V$, i suposem que es compleix $f(U) \subset U$ i $f(V) \subset V$, és a dir, f deixa invariants aquests subespais. Notem f_U, f_V les respectives restriccions de f a cada subespai. Llavors es diu que f és la suma directa $f_U \oplus f_V$, i que U i V formen una descomposició en suma directa f -invariant de E .*

Aleshores, en la base $\mathcal{B}$, si f_U té per matriu associada A_U i la matriu de f_V és A_V , la matriu A associada a f és diagonal per blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_U & 0 \\ 0 & A_V \end{pmatrix}$$

i s'expressa com $A = A_U \oplus A_V$. Recordem que es compleix $\det(A) = \det(A_U) \det(A_V)$. En aquesta situació, pel polinomi mínim es compleix la següent propietat:

Propietat 3 *Suposem que un endomorfisme té associada una matriu diagonal per blocs, $A_1, A_2, \dots, A_k$. Llavors el polinomi mínim és el mínim comú múltiple dels polinomis mínims de cada bloc A_i , $1 \leq i \leq k$.*

Plana personal

Inici

Contingut

« »

◀ ▶

Pàgina 9 de 20

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

Proposició 2 Si $f : E \rightarrow E$ és endomorfisme, i $p, q_1, q_2 \in \mathbb{R}[t]$, aleshores:

- El subespai $\ker p(f)$ és un subespai invariant per f
- Si $p = q_1 q_2$, amb q_1, q_2 primers entre ells, aleshores $\ker p(f) = \ker q_1(f) \oplus \ker q_2(f)$

Exemple 5 Si un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ diagonalitza i té valors propis diferents $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, amb $\dim E = n$, llavors:

- El seu polinomi característic és

$$p_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \cdots + n_k = n.$$

- La multiplicitat algebraica i geomètrica dels valors propis coincideixen

$$n_i = \dim \ker(f - \lambda_i I), 1 \leq i \leq k.$$

- El seu polinomi mínim és $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$.
- E es descomposa en suma directa de subespais invariants,

$$E = \ker(f - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k I).$$

- L'endomorfisme f és una suma directa i la seva matriu associada, en la base dels vectors propis, és diagonal per blocs (diagonals),

$$\text{diag}(\lambda_1, \overset{n_1}{\cdot}, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{diag}(\lambda_k, \overset{n_k}{\cdot}, \lambda_k).$$

3. Valors propis complexos

És possible generalitzar la descomposició d'un espai vectorial E en suma directa de subespais invariants, en particular quan l'endomorfisme f no diagonalitza en $\mathbb{R}$. Vegem el cas de valors propis simples complexos.

Si λ és un valor propi (real o complex) de f , llavors el factor de primer grau $p(t) = t - \lambda$ proporciona el vector propi del $\ker p(f)$.

Però si el valor propi és complex, $\lambda = \alpha + i\beta$, amb vector propi $\vec{a} + i\vec{b}$, i només volem considerar factors primers de polinomis reals, llavors haurem d'aplegar els factors lineals en λ i el seu conjugat $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, que té per vector propi $\vec{a} - i\vec{b}$.

Així, el factor quadràtic

$$q(t) = [t - (\alpha + i\beta)][t - (\alpha - i\beta)] = (t - \alpha)^2 + \beta^2$$

proporcionarà, en el cas de valors propis complexos, dos vectors reals $\vec{a}, \vec{b} \in \ker q(f)$, doncs

$$q(f)(\vec{a} + i\vec{b}) = \vec{0}$$

es compleix separatament per a les parts real i imaginària.

Evidentment, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ han de ser linealment independents, doncs, si no, el valor propi seria necessàriament real.

En aquest cas, en considerar un factor primer real de grau dos, hem trobat un subespai invariant de dimensió dos, generat pels vectors reals $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tot i que l'endomorfisme no diagonalitza en $\mathbb{R}$.

Exemple 6 Seguint amb el cas anterior, vegem quina forma prén la matriu associada a f en la base $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$. Per hipòtesi, es verifica

$$f(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha + i\beta)(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + i(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}).$$

Per tant, tenint en compte la linealitat de f , igualant separatament les parts real i imaginària dels dos extrems de la igualtat, obtenim,

$$f(\vec{a}) = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}; \quad f(\vec{b}) = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

D'aquesta forma, en la base $\mathcal{B}$, la matriu A associada a f resulta ser:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Exemple 7 Vegem en quina base la següent matriu A , associada a un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica, diagonalitza per blocs en $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = [(\lambda - 1)^2 + 2^2](3 - \lambda).$$

Les arrels del polinomi característic són $\lambda = 3, 1 + 2i, 1 - 2i$.

Calculem el vector propi per a $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'on $x = z$, $y = 0$. Per tant, un vector propi és $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Busquem ara el vector propi associat a $\lambda = 1 + 2i$.

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 & 2 \\ -1 & 1 - 2i & 1 \\ 1 & -3 & 1 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Després d'alguns càlculs, s'obté $x = -(1 + i)z$, $y = -iz$.

Per tant, un vector propi és $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 - i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Separant les parts real i imaginària, $\vec{w} = \vec{a} + i\vec{b}$, tenim

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Així, d'acord amb el que s'ha vist en l'exemple 6, en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}\}$ l'endomorfisme s'expressa amb la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

amb un bloc 1×1 , $M_1 = (3)$, corresponent al subespai invariant generat pel vector $(1, 0, 1)^T$, i un bloc 2×2 , $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, corresponent al subespai invariant generat pels vectors $(-1, 0, 1)^T, (-1, -1, 0)^T$.

La matriu C de canvi de base, de la base $\mathcal{B}$ a la canònica, és la que té els elements de la base $\mathcal{B}$ per columnes, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que sempre és invertible.

Finalment, la relació entre les matrius A i M és precisament la que correspon al canvi de base entre les respectives matrius. Per tant, M també es podria haver calculat com

$$M = C^{-1} A C.$$

4. Descomposició primària

Vegem ara un resultat més general, aplicable a valors propis múltiples en el cas en que la matriu no diagonalitza. Comencem per unes propietats importants.

Propietat 4 *Sigui $p \in \mathbb{R}[t]$ un factor indivisible de primer o de segon grau, i f un endomorfisme.*

- *Llavors, $\ker p(f) \subset \ker p^2(f)$.*

En efecte, si $\vec{v} \in \ker p(f)$, $p(f)(\vec{v}) = \vec{0}$, i tornant a aplicar $p(f)$, $p^2(f)(\vec{v}) = \vec{0}$.

- *En particular, si $\vec{v} \in \ker p^2(f)$, llavors es compleix $p(f) \circ p(f)(\vec{v}) = \vec{0}$. Per tant, $p(f)(\vec{v}) \in \ker p(f)$.*

- *En general, si $\vec{v} \in \ker p^n(f)$ per a algun nombre natural $n > 1$, llavors $p^{n-k}(f)(\vec{v}) \in \ker p^k(f)$, amb $k < n$.*

De forma general, tindrem,

Proposició 3 *Sigui $f : E \rightarrow E$ endomorfisme i $p \in \mathbb{R}[t]$. Si $m_1 < m_2$ són dos nombres naturals, aleshores $\ker p^{m_1}(f) \subset \ker p^{m_2}(f)$. A més, si $\ker p^{m_1}(f) = \ker p^{m_2}(f)$, aleshores $\ker p^{m_1}(f) = \ker p^k(f)$ per a tot natural $k \geq m_1$.*

La següent propietat caracteritza al polinomi mínim:

Proposició 4 *Si $f : E \rightarrow E$ és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n i la descomposició factorial del polinomi característic $p_f(t)$ en $\mathbb{R}[t]$ és*

$$p_f(t) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad \sum_{i=1}^k n_i \operatorname{gr}(p_i) = n$$

aleshores, el polinomi mínim és

$$m_f(t) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

amb $1 \leq m_i \leq n_i$ per a tot $i = 1, \dots, k$. En particular, m_i és el menor valor que compleix $\dim \ker p^{m_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$.

Per tant, sempre podem comptar amb que $\dim \ker p^{n_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$, encara que de vegades trobarem els generadors del $\ker p^{n_i}$ a partir del $\ker p^{m_i}$ amb $m_i < n_i$.

Exemple 8 En l'exemple 3, un endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tenia per matriu, en la base canònica,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que és diagonal. El primer bloc 2x2, $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, està associat al factor $(t - 2)^2$ de $p_f(t)$. Com $\dim \ker(D_1 - 2I) = 2$, el polinomi mínim d'aquest bloc és $(t - 2)$, i el polinomi mínim de f és $m_f(t) = (t - 2)(t + 1)$.

Teorema 5 (de descomposició primària) Sigui $f : E \rightarrow E$, un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n . Si

$$m_f(t) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}, \quad p_f(t) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

($\sum_{i=1}^k n_i \operatorname{gr}(p_i) = n$) són les descomposicions factorials dels polinomis mínim i característic, respectivament, aleshores, l'espai vectorial E es descomposa en suma directa dels següents subespais f -invariants,

$$E = \ker p_1^{m_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{m_k}(f),$$

$$E = \ker p_1^{n_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{n_k}(f),$$

amb dimensió $\dim \ker p^{m_i} = \dim \ker p^{n_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$.

Exemple 9 En l'exemple d'abans, $\mathbb{R}^3 = \ker(D - 2I) \oplus \ker(D + I)$.

Exemple 10 Apliquem el teorema de descomposició primària a la matriu

Plana personal

Inici

Contingut

◀

▶

◀

▶

Pàgina 18 de 20

Tornar

Full Screen

Tancar

Sortir

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

associada a un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$. Es demana: determinar els subespais invariants per A ; donar-ne una base; trobar la forma diagonal per blocs, M , de l'endomorfisme en aquesta base; i calcular la matriu invertible C que satisfà $M = C^{-1} A C$.

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -5 & 6 \\ 4 & 7 - \lambda & -4 \\ -8 & -4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(1 - \lambda).$$

Les arrels del polinomi característic són $\lambda = 5$, doble, i $\lambda = 1$, simple.

Busquem els vectors propis per a $\lambda = 5$.

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'on $y = -2x$, $z = 0$. Per tant, un vector propi és $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Com $\text{rang}(A - 5I) = 2$, $\dim \ker(A - 5I) = 1$, i la matriu no diagonalitza. Així, el subespai invariant no és $\ker(A - 5I)$ sinó $\ker(A - 5I)^2$, i el bloc corresponent ha de ser 2×2 .

D'acord amb la propietat 4, el vector propi $\vec{v}_1$ ja pertany al $\ker(A - 5I)^2$. Hem de trobar, doncs, un vector del $\ker(A - 5I)^2$ linealment independent de l'anterior.

Aquest vector, $\vec{v}_2 \in \ker(A - 5I)^2$, el trobarem resolent $(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$, $\vec{v}_1 \in \ker(A - 5I)$,

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'on $y = 1 - 2x$, $z = 1$. Fent $x = 0$ tenim $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Així, $\ker(A - 5I)^2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, i les imatges d'aquests vectors per A són

$$A\vec{v}_1 = 5\vec{v}_1,$$

$$(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \implies A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 5\vec{v}_2.$$

Ara busquem un vector propi per a $\lambda = 1$. És immediat veure que

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ho és. Per tant, la seva imatge per A és

$$A\vec{v}_3 = \vec{v}_3.$$

En resum, la descomposició de $\mathbb{R}^3$ en subespais invariants queda com

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A - 5I)^2 \oplus \ker(A - I).$$

En la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, la matriu associada a l'endomorfisme s'expressa per tres columnes $(5, 0, 0)^T, (1, 5, 0)^T, (0, 0, 1)^T$, és a dir,

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb un bloc 2×2 , $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, i un bloc 1×1 , $M_2 = (1)$.

La matriu C de canvi de base, de la base $\mathcal{B}$ a la canònica, és la que té els elements de la base $\mathcal{B}$ per columnes, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordem que sempre és invertible.

Finalment, la relació entre les matrius A i M és precisament la que correspon al canvi de base entre les respectives matrius. Per tant, M també es pot calcular com

$$M = C^{-1} A C.$$