



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Pàgina 2 de 194

Índex

1	Matrius i sistemes d'equacions lineals	3
2	Determinants	27
3	Espais vectorials	51
4	L'espai vectorial euclidià	75
5	Transformacions lineals	99
6	Transformacions lineals de l'espai vectorial euclidià	123
7	Geometria lineal	147
8	Còniques i quàdriques	171



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

1 Matrius i sistemes d'equacions lineals

1.1 Matrius

Definició 1.1 Una **matriu** de m files i n columnes amb **coeficients reals** és una funció

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que assigna a cada parell d'índexs (i, j) un nombre real a_i^j .

És habitual representar una matriu A en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

posant el coeficient a_i^j a la fila i i la columna j . Es diu que A és una **matriu del tipus** $m \times n$. El conjunt de totes aquestes es representa per $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. A les **files** o **columnes** d'una matriu A les representarem per A_i i A^j respectivament.

En particular, cal destacar les **matrius quadrades** o $n \times n$, les **matrius fila** o $1 \times n$, i les **matrius columna** o $m \times 1$. Les matrius 1×1 són, de fet, **números reals**.

Una **submatriu** és la matriu formada per algunes de les files i columnes d'una matriu.

També podem considerar totes aquestes definicions de forma anàloga en el cas de que treballem amb **números complexos** en lloc de reals.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Donades dues matrius A i B amb el mateix nombre de files, notarem $(A|B)$ la matriu obtinguda al posar consecutivament les columnes d' A i B respectivament, i direm que la matriu $(A|B)$ s'ha obtingut per **adjunció** de totes dues.

Definició 1.2 La matriu **transposada** d'una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ és la matriu $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ de coeficients a_j^i per tot $j = 1, 2, \dots, n$ i $i = 1, 2, \dots, m$.

Proposició 1.3 $(A^t)^t = A$.

Exemple 1.4 La **transposada** de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

és la matriu

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Definició 1.5 Una matriu quadrada A és **simètrica** si, i només si, $a_j^i = a_i^j$ per qualssevol $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Proposició 1.6 Una matriu quadrada A és **simètrica** si, i només si, $A^t = A$.

Exemple 1.7 La matriu anterior és **no simètrica** evidentment.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Definició 1.8 La **suma** de dues matrius A i B del tipus $m \times n$ totes dues és la matriu $S = A + B$ donada per $s_i^j = a_i^j + b_i^j$ per tot $i = 1, 2, \dots, m$ i tot $j = 1, 2, \dots, n$. I el **producte per un nombre real** α és la matriu $P = \alpha A$ tal que $p_i^j = \alpha a_i^j$ per tot $i = 1, 2, \dots, m$ i tot $j = 1, 2, \dots, n$.

Es defineix la **matriu nul·la** O com la matriu formada íntegrament per **zeros**. I, donada una matriu A qualsevol, es defineix la seva matriu **oposada** $-A$ com l'obtinguda en canviar el signe a tots els seus elements.

Proposició 1.9 Si $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, llavors

- (a) **Associativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- (b) **Commutativa:** $A + B = B + A$.
- (c) **Neutre:** $A + 0 = A$ per a tota A .
- (d) **Oposat:** per a cada matriu A , $A + (-A) = 0$.
- (e) **Distributiva respecte de la suma de matrius:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- (f) **Distributiva respecte de la suma de nombres:** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- (g) **Compatibilitat dels productes:** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
- (h) **Unitat:** $1A = A$.

Exemple 1.10 Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, llavors

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposició 1.11 (a) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

(b) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 1.12 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, el seu **producte** és la matriu $P = AB \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ definida per

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

per tot $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, p$.

Exemple 1.13
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 10 & -11 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},$$

ja que, per exemple, $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 = 10$.

Es defineix, per a cada n , la **matriu unitat o identitat** I_n com la matriu quadrada $n \times n$ formada per **uns** a la diagonal i **zeros** a fora.

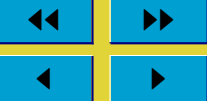
Proposició 1.14 Quan són factibles els productes, es compleixen les propietats:

- (a) **Associativa:** $A(BC) = (AB)C$.
- (b) **Element unitat:** $I_m A = A = A I_n$ per a tota $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
- (c) **Distributives:** $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.
- (d) **Compatibilitat:** $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

Proposició 1.15 $(AB)^t = B^t A^t$.

En particular, quan A sigui una matriu quadrada, podem considerar la **potència** de A :

$$A^n = A \cdot A \cdot \overset{(n)}{\dots} \cdot A.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 1.16 Direm que una **fila** A_i d'una matriu A és **combinació lineal** d'altres files $A_{r_1}, A_{r_2}, \dots, A_{r_k}$ si, i només si, **existeixen** uns escalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tals que

$$A_i = \alpha_1 A_{r_1} + \alpha_2 A_{r_2} + \dots + \alpha_k A_{r_k}.$$

Definició 1.17 Direm que unes files $A_{r_1}, A_{r_2}, \dots, A_{r_k}$ són **linealment independents** si, i només si, **cap** d'elles és combinació lineal de les altres.

Proposició 1.18 Les files $A_{r_1}, \dots, A_{r_k}$ són **linealment independents** si, i només si,

$$\alpha_1 A_{r_1} + \alpha_2 A_{r_2} + \dots + \alpha_k A_{r_k} = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Definició 1.19 S'anomena **rang per files** d'una matriu al **nombre màxim** de files linealment independents que té.

Totes aquestes definicions i propietats són anàlogues en el cas de les columnes.

Teorema 1.20 El **rang per files** i el **rang per columnes** d'una matriu coincideixen.

Definició 1.21 S'anomena **rang** d'una matriu A al seu rang per files o per columnes.

Proposició 1.22 (a) $\text{rang } A = \text{rang } A^t$.
(b) $\text{rang}(\alpha A) = \text{rang } A$ si $\alpha \neq 0$.
(c) $\text{rang}(AB) \leq \min \{\text{rang } A, \text{rang } B\}$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Anomenem **operacions elementals per files** a les transformacions següents:

- (a) Intercanviar files.
- (b) Sumar o restar un múltiple d'una fila a una altra.
- (c) Multiplicar o dividir una fila per un nombre diferent de zero.

Anàlogament es defineixen les **operacions elementals per columnes**.

Proposició 1.23 En efectuar *operacions elementals*, el rang d'una matriu no varia.

Observació 1.24 Fent operacions elementals, tota matriu es pot *triangular*, és a dir:

- Les files amb tots els coeficients nuls són les últimes.
- El primer coeficient no nul de cada fila, anomenat **pivot**, està situat a la dreta dels pivots anteriors.
- Els coeficients situats per sota de cada pivot són nuls.

En tal cas, el **rang** és el **nombre de files no completament nul·les** que hi ha o bé el **nombre de pivots** que s'han obtingut. Aquest és l'anomenat **mètode de Gauss**.

Exemple 1.25 Calculem el **rang** de la matriu següent, triangular-la per files pel **mètode de Gauss**:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 + 5F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -10 & -11 \\ 0 & -9 & 3 & 30 & 33 \end{pmatrix}.$$

Ara és clar que sumant-li a la darrera fila la segona multiplicada per 3, obtenim zeros a tota la tercera fila. En conseqüència, la matriu té dues files no completament nul·les i, per tant, **rang** $A = 2$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

1.2 Sistemes d'equacions lineals

Definició 1.26 Un **sistema d'equacions lineals** de m equacions i n incògnites és una col·lecció d'equacions del tipus

$$\left. \begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \cdots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_2^n x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \cdots + a_m^n x_n = b_m \end{array} \right\},$$

on els **coeficients** a_i^j , els **termes independents** $b_1, b_2, \dots, b_m$ i els valors que poden prendre les **incògnites** $x_1, x_2, \dots, x_n$ són nombres reals (o, en tot cas, complexos).

Un sistema és **homogeni** si els seus **termes independents** són tots nuls.

Exemple 1.27 El sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = -1 \\ x + 4y - z = 7 \\ 7x + y + 2z = -6 \end{array} \right\}$$

està format per 3 equacions i 3 incògnites i no és homogeni.

Els **coeficients** de la incògnita x , per exemple, són 2, 1 i 7, i els **termes independents** són -1 , 7 i -6 .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Tot sistema d'equacions lineals es pot representar matricialment en la forma $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La matriu A se'n diu **de coeficients**, i X i B , matrius columna d'**incògnites** i de **termes independents**. La informació del sistema està resumida en la **matriu ampliada** $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n & b_m \end{array} \right).$$

Exemple 1.28 El sistema d'equacions lineals anterior

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = -1 \\ x + 4y - z = 7 \\ 7x + y + 2z = -6 \end{array} \right\}$$

es representa en la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

I la seva **matriu ampliada** és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Una **solució** és una col·lecció de nombres que compleixen **totes** les igualtats del sistema. Dos sistemes amb les mateixes solucions se'n diuen **equivalents**.

Un sistema és **compatible** si admet alguna solució i **incompatible** si no n'admet cap. I un sistema compatible és **determinat** si té una solució i **indeterminat** si en té més.

En aquest darrer cas, la **solució general** del sistema consistirà en posar algunes de les incògnites (*principals*) en funció de les altres (*secundàries*) –que és la **forma explícita**– o bé totes elles en funció d'uns certs *paràmetres* –**forma paramètrica**–. Al nombre d'incògnites secundàries o paràmetres se l'anomena **graus de llibertat** del sistema.

Proposició 1.29 *Tot sistema **homogeni** és **compatible**.*

Això és perquè tot sistema homogeni admet la **solució trivial** $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Exemple 1.30 Una de les solucions del sistema **homogeni** següent (format, en aquest cas, per una sola equació)

$$x - 2y + 3z = 0$$

és, efectivament, $x = y = z = 0$. De fet, és obvi que és **compatible indeterminat** amb **dos graus de llibertat** i que la seva **solució general** –en **forma paramètrica**– és

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array} \right\}.$$

Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 1.31 *Teorema de Rouché-Fröbenius.*

- (a) El sistema $AX = B$ és **compatible** si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$.
(b) Si $AX = B$ és compatible, llavors és **determinat** si, i només si, $\text{rang}(A) = n$.
(c) I si és **indeterminat**, el nombre de graus de llibertat és $n - \text{rang}(A)$.

Com que en aquest teorema només intervenen els rangs de la matriu A i de la matriu ampliada $(A|B)$, només cal calcular aquests pel **mètode de Gauss** –tal com hem vist abans pel càlcul del rang d’una matriu–.

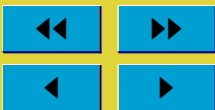
Exemple 1.32 Vejam quin és el **caràcter** del sistema d’equacions lineals

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & -1 \\ x + 4y - z & = & 7 \\ 7x + y + 2z & = & -6 \end{array} \right\}.$$

Tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - 7F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -3 & 15 \\ 0 & 9 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{array} \right).$$

I com que $\text{rang}(A) = 2$, però $\text{rang}(A|B) = 3$, el sistema és **incompatible**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

De l'exemple anterior es dedueix que tot sistema d'equacions lineals es pot transformar, mitjançant operacions elementals, en un sistema equivalent de *forma triangular*, que es pot resoldre per “*substitució endarrera*”. Aquest és el **mètode de Gauss** per a la resolució de sistemes d'equacions lineals.

Exemple 1.33 Resolució del sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - z = -7 \\ x + 4y - 3z = 7 \\ 7x + y - 2z = -16 \end{array} \right\}.$$

Aleshores

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & -3 & 7 \\ 7 & 1 & -2 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - 7F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 21 \\ 0 & 23 & 3 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 11F_3 - 23F_2} \simeq$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 21 \\ 0 & 0 & 148 & -296 \end{array} \right).$$

Com que **rang A = rang(A|B) = 3**, el sistema és **compatible determinat**. Llavors

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - z = -7 \\ 11y - 5z = 21 \\ 148z = -296 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 2 = -7 \\ 11y - 5(-2) = 21 \\ z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3 + 2 = -7 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{array} \right\}.$$

I la solució del sistema és, doncs, **x = -3, y = 1, z = -2**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Tot sistema d'equacions lineals es pot transformar, mitjançant operacions elementals, en un sistema equivalent de *forma triangular reduïda*, és a dir, que compleixi

- El sistema està en forma triangular.
- Els coeficients situats per sota i per sobre de cada pivot són nuls.

Aquest és el **mètode de Gauss-Jordan**, i resulta especialment indicat per a la **resolució simultània** de sistemes d'equacions lineals amb la **mateixa matriu de coeficients**.

Exemple 1.34 Considerem els sistemes d'equacions lineals següents

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - z = 2 \\ x + 4y + 2z = -2 \\ 3x + y + z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y - z = 3 \\ x + 4y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 1 \end{array} \right\}.$$

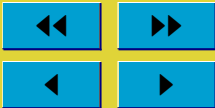
Escrivint els dos sistemes en una sola matriu i aplicant el **mètode de Gauss-Jordan**:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - 3F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -6 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 \sim 11F_1 + 3F_2 \\ F_3 \sim F_3 - F_2}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|cc} 22 & 0 & 4 & 4 & 36 \\ 0 & 11 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right)$$

En el primer cas, com que **rang A = rang(A|B) = 2 ≠ 3**, el sistema és **compatible indeterminat amb un grau de llibertat** i la seva **solució general** –en forma explícita– és

$$x = \frac{2 - 2z}{11}, \quad y = \frac{-6 - 5z}{11},$$

mentre que el segon és **incompatible**, ja que **rang(A) = 2**, però **rang(A|B) = 3**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

1.3 Equacions matricials i matrius singulars i regulars

Quan coneixem el resultat d'una operació, però desconeixem algun dels elements que hi intervenen, obtenim la seva **equació matricial bàsica**.

En el cas de la **transposició**, tenim $X^t = A$, que té solució $X = (X^t)^t = A^t$.

Exemple 1.35 Si

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

llavors

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

En quant a la **suma**, queda $A + X = B$ o $X + A = B$, que tenen solució $X = B - A$.

Exemple 1.36 La solució de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

és

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finalment, pel **producte per escalars**, de $\alpha X = A$ s'obté $X = \frac{1}{\alpha}A$, sempre que $\alpha \neq 0$.

Exemple 1.37 De

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

s'obté

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Observació 1.38 Les equacions matricials del tipus $AX = B$ poden ser considerades com un conjunt de sistemes lineals amb la mateixa matriu de coeficients, que podem resoldre **simultàniament** pel **mètode de Gauss–Jordan**. En conseqüència, poden tenir també solució única (quan $\text{rang } A = \text{rang}(A|B) = n$), infinites solucions (quan $\text{rang } A = \text{rang}(A|B) < n$) o no tenir-ne cap (quan $\text{rang } A \neq \text{rang}(A|B)$).

Exemple 1.39 Considerem l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Resoldre aquesta equació equival a resoldre els sistemes d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2y_1 = 2 \\ -2x_1 - 4y_1 = -4 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 + 2y_2 = 4 \\ -2x_2 - 4y_2 = -8 \end{array} \right\}.$$

I és clar, doncs, que hi ha **infinites solucions**, que són

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2y_1 & 4 - 2y_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{amb } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Observació 1.40 Les equacions matricials del tipus $XA = B$ poden reduir-se a les anteriors **transposant** els dos membres de la igualtat. Així, de $XA = B$ tenim que $(XA)^t = B^t$, és a dir, $A^t X^t = B^t$, que és del primer tipus. I, resolent aquesta, obtenim X^t , d'on, **transposant**, tenim que $X = (X^t)^t$.

Exemple 1.41 Donada l'equació matricial del tipus $XA = B$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix},$$

transposant, s'obté l'equació matricial anterior i, per tant, les seves **solucions** són

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2y_1 & 4 - 2y_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 - 2y_1 & y_1 \\ 4 - 2y_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{amb } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 1.42 Considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, és evident que $AB \neq BA$ i, en particular, doncs, tenim que el **producte de matrius no és commutatiu**.

Definició 1.43 Sigui A una matriu quadrada **no nul·la**.

Se'n diu que A és **divisora de zero** si, i només si, existeix alguna matriu quadrada **no nul·la** X tal que

$$AX = 0 \quad \text{o} \quad XA = 0.$$

Diem que A és **simplificable** si, i només si, de les relacions

$$AX = AY \quad \text{o} \quad XA = YA$$

se'n dedueix que $X = Y$.

Finalment, direm que és **invertible** si, i només si, existeix alguna matriu quadrada **no nul·la** X tal que

$$AX = I \quad \text{o} \quad XA = I.$$

L'existència de matrius per les quals es donen algunes de les situacions anteriors posa de manifest que aquestes propietats del producte de matrius no són les mateixes que estem habituats en d'altres casos i, per tant, no en podem fer ús d'elles en general.

Aquests **quatre** fets –la **no commutativitat**, l'existència de matrius **divisores de zero**, l'existència de matrius **no simplificables** i l'existència de matrius **no invertibles**– es coneixen com els **“defectes”** del producte de matrius.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 1.44 Les matrius quadrades $n \times n$ que tenen **rang menor que n** s'anomenen **singulars**.

Teorema 1.45 Si A és una matriu quadrada, llavors **són equivalents**:

- (a) A és **divisora de zero**.
- (b) A **no** és **invertible**.
- (c) A **no** és **simplificable**.
- (d) A és **singular**.

Exemple 1.46 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Anem a veure que és **singular** i a trobar una matriu X tal que $AX = 0$. Tenim que

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim -3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Per tant, **rang(A) = 2** i A és, doncs, **singular**.

I per trobar una matriu que, multiplicada per ella, sigui la matriu nul·la, només cal tenir en compte que una de les solucions del sistema homogeni que té com a matriu l'anterior és $x = -1$, $y = 2$ i $z = 3$. Per tant, **una possible solució** és

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 1.47 Les matrius quadrades $n \times n$ que tenen **rang** n s'anomenen **regulars**.

Les matrius **regulars** són, doncs, les **no divisores de zero**, **simplificables** i **invertibles**.

Proposició 1.48 Si A és **regular**, la matriu X tal que $AX = I$ o $XA = I$ és **única**.

Definició 1.49 A aquesta matriu l'anomenem **inversa** d' A i la notem per A^{-1} .

Exemple 1.50 Anem a veure si la matriu següent és **regular** i, en cas afirmatiu, a calcular la seva **inversa**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolent l'**equació matricial** $AX = I$ pel mètode de Gauss–Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 - 4F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - 4F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_1 + F_2 \\ F_3 \sim F_3 + 2F_2}]{\simeq}$$

En particular, **rang**(A) = 3 i, per tant, la matriu és **regular**.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 6 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_1 - F_3 \\ F_2 \sim 3F_2 - 2F_3}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 9 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 12 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & 6 & 3 \end{array} \right).$$

Per tant,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Proposició 1.51 Si les matrius A i B són **regulars**, llavors:

- (a) A^{-1} és regular i $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (b) A^t és regular i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- (c) αA és regular si $\alpha \neq 0$ i $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.
- (d) AB és regular i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 1.52 Sabent que A és regular, resolguem l'equació matricial

$$A(X^{-1})^t A^{-1} = A^t.$$

En primer lloc, **multiplicant per A^{-1} a l'esquerra i per A a la dreta**, tenim que

$$(X^{-1})^t = A^{-1}A^tA,$$

d'on, transposant els dos membres i tenint en compte que $(AB)^t = B^tA^t$, resulta que

$$\left((X^{-1})^t\right)^t = A^t(A^t)^t(A^{-1})^t.$$

A més a més, donat que $(A^t)^t = A$, l'expressió anterior queda

$$X^{-1} = A^tA(A^{-1})^t.$$

I com que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, es dedueix que

$$(X^{-1})^{-1} = ((A^{-1})^t)^{-1}A^{-1}(A^t)^{-1}$$

que, ja que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, es pot escriure

$$(X^{-1})^{-1} = ((A^{-1})^{-1})^t A^{-1}(A^t)^{-1}.$$

Finalment, fent servir que $(A^{-1})^{-1} = A$, obtenim

$$X = A^tA^{-1}(A^t)^{-1}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

1.4 Recapitulació

Exemple 1.53 Analitzem per quins valors del paràmetre α és **simètrica** la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenim que la seva matriu transposada és

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cal imposar, doncs, que

$$A^t = A,$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

I és clar ara que, igualant coeficient a coeficient d'ambdues matrius, s'obté que la condició que s'ha de verificar és

$$\alpha = 1.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.54 Estudiem el rang de la matriu anterior en funció del paràmetre α :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Triangulem-la fent servir el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

El segon element de la segona fila no s'anul·la si, i només si, $\alpha \neq 1$. Continuem, doncs, suposant que $\alpha \neq 1$ i deixem el cas $\alpha = 1$ per analitzar després:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

I tenim que $2 - \alpha - \alpha^2 = 0$ si, i només si, $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$.

Per tant, si $\alpha \neq 1, -2$, cap de les tres files no s'anul·la completament i, en conseqüència, $\text{rang}(A) = 3$.

A més a més, si $\alpha = -2$, és clar que $\text{rang}(A) = 2$, ja que la darrera fila és completament nul·la, però no així les dues primeres.

I, finalment, si $\alpha = 1$, és evident, a la vista de quina és la matriu A , que $\text{rang}(A) = 1$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.55 Estudiem el sistema següent en funció del paràmetre α :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha^2 \\ x + \alpha y + z = \alpha \end{array} \right\}.$$

Triangulem el sistema fent servir el **mètode de Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \alpha - 1 \end{array} \right).$$

El segon element de la segona fila no s'anul·la si, i només si, $\alpha \neq 1$. Continuem, doncs, suposant que $\alpha \neq 1$ i deixem el cas $\alpha = 1$ per analitzar després:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \alpha - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 & \alpha^2 - 1 \end{array} \right).$$

Com que $2 - \alpha - \alpha^2 = 0$ si, i només si, $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, és clar que si $\alpha \neq 1, -2$, tenim que **rang A = rang($A|B$) = 3** i el sistema és **compatible determinat**.

Si $\alpha = -2$, substituint a la darrera matriu, veiem que **rang A = 2** i **rang($A|B$) = 3**. Per tant, el sistema és **incompatible**.

Finalment, quan $\alpha = 1$, és clar que **rang(A) = rang($A|B$) = 1**. En conseqüència, el sistema és **compatible indeterminat amb dos graus de llibertat**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.56 Resolguem el sistema anterior en funció del paràmetre α :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + \alpha z = 1 \\ \alpha x + y + z = \alpha^2 \\ x + \alpha y + z = \alpha \end{array} \right\}.$$

En l'exemple precedent, hem vist que si $\alpha \neq 1, -2$, el sistema era **compatible determinat** i la matriu obtinguda després de la triangulació del sistema era

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 & \alpha^2 - 1 \end{array} \right).$$

Aleshores, **substituint cap endarrera**, s'obté fàcilment que la **solució**, en funció del paràmetre α , és

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \alpha \cdot \left(-\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right) - \frac{1}{\alpha + 2} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha + 2} \\ y = \frac{\alpha^2 - \alpha - (1 - \alpha^2) \cdot \left(-\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \right)}{1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha + 2} \\ z = \frac{\alpha^2 - 1}{2 - \alpha - \alpha^2} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \end{array} \right\}.$$

I si $\alpha = 1$, hem vist que el sistema era **compatible indeterminat amb dos graus de llibertat**. La seva **solució general** –en forma paramètrica– és, òbviament,

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 1.57 Anem a analitzar ara per quins valors del paràmetre α la matriu següent és **regular** i per quins és **singular**. I, en aquest últim cas, buscarem una **matriu quadrada no nul·la** X que, multiplicada per A , sigui la matriu nul·la:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que ja hem vist, després de triangular-la fent servir el **mètode de Gauss**, que **$\text{rang}(A) = 3$** si, i només si, $\alpha \neq 1, -2$, deduïm que és **regular** quan $\alpha \neq 1, -2$ i **singular** si $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$.

Llavors, si $\alpha = 1$, una solució del sistema homogeni **$AX = 0$**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

és **$x = 1$** , **$y = -1$** i **$z = 0$** , d'on s'obté que **una possible matriu solució** és

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anàlogament, si $\alpha = -2$, el sistema homogeni i **la possible matriu solució** són ara

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{i} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Exemple 1.58 Calculem la **inversa** de la matriu dels exemples precedents **en funció del paràmetre α** pels casos en què és regular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que A és **regular** quan $\alpha \neq 1, -2$. Plantegem, en tal cas, l'**equació matricial** $AX = I$ i resolguem-la pel **mètode de Gauss-Jordan**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - \alpha F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & | & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \sim (\alpha-1)F_1 + F_2 \\ F_3 \sim F_3 + F_2}]{\simeq} \\
\begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 & 1 - \alpha & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & | & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 & | & -1 - \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_3 - (\alpha+2)F_1 \\ F_2 \sim (\alpha+2)F_2 - (\alpha+1)F_3}]{\simeq} \\
\begin{pmatrix} (\alpha+2)(1-\alpha) & 0 & 0 & | & 1 & -\alpha-1 & 1 \\ 0 & (\alpha+2)(1-\alpha) & 0 & | & 1 & 1 & -\alpha-1 \\ 0 & 0 & (\alpha+2)(1-\alpha) & | & -\alpha-1 & 1 & 1 \end{pmatrix},
\end{pmatrix}$$

ja que $2 - \alpha - \alpha^2 = (\alpha+2)(1-\alpha)$ i $\alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)$.

Per tant, per $\alpha \neq 1, -2$, tenim:

$$A^{-1} = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \\ \alpha+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

2 Determinants

2.1 Determinants

Teorema 2.1 Existeix una **única** aplicació del conjunt de matrius quadrades d'ordre n a coeficients reals –o complexos– en el conjunt dels números reals – respectivament complexos– que a cada matriu quadrada A li associa un número, representat per $\det(A)$, amb les propietats següents:

(a) És una funció **multilineal** de les columnes, és a dir:

- Si una columna es **descompon en una suma**, $A^i = B^i + C^i$, aleshores

$$\det(A^1 \dots A^i \dots A^n) = \det(A^1 \dots B^i \dots A^n) + \det(A^1 \dots C^i \dots A^n).$$

- Si en una columna es **treu un factor comú**, $A^i = \alpha B^i$, aleshores

$$\det(A^1 \dots A^i \dots A^n) = \alpha \det(A^1 \dots B^i \dots A^n).$$

(b) És una funció **alternada** de les columnes, és a dir, si **dues columnes són iguals**, $A^i = A^j$, el valor és **0**:

$$\det(A^1 \dots A^i \dots A^j \dots A^n) = 0.$$

(c) El valor corresponent a la matriu **identitat** és **1**:

$$\det(I) = 1.$$

Definició 2.2 Aquesta aplicació s'anomena **determinant** i el valor $\det(A)$ que correspon a cada matriu quadrada A s'anomena **determinant d' A** .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

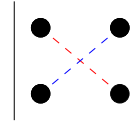
Vicenç Sales

Josep Tudurí

En particular, el **determinant** d'una matriu quadrada $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$ d'**ordre 2** és

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1$$

que, gràficament, ve representat per l'esquema



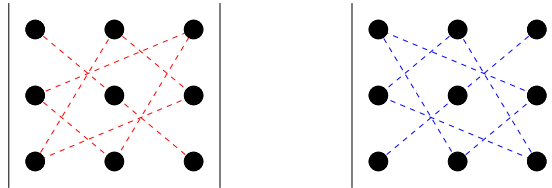
Exemple 2.3 Calculem el següent **determinant d'ordre 2**:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-2)(-3) - 1 \cdot 3 = 3.$$

Igualment, el **determinant** d'una matriu quadrada $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}$ d'**ordre 3** és

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2$$

que, gràficament, ve donat per l'esquema següent, anomenat **regla de Sarrus**:



Exemple 2.4 Calculem el següent **determinant d'ordre 3**:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 42 - 24 - 75 + 20 - 63 + 60 = -40.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 2.5 Sigui A una matriu quadrada.

(a) Si A té una **columna de zeros**, llavors $\det(A) = 0$.

(b) Si **permutem dues columnes** d' A , el determinant **canvia de signe**:

$$\det(A^1 \dots A^i \dots A^j \dots A^n) = -\det(A^1 \dots A^j \dots A^i \dots A^n).$$

(c) Si a una columna li **sumem un múltiple d'una altra**, el determinant **no varia**:

$$\det(A^1 \dots A^i + \alpha A^j \dots A^j \dots A^n) = \det(A^1 \dots A^i \dots A^j \dots A^n).$$

(d) $\det(A) = 0$ si, i només si, les columnes d' A són **linealment dependents**.

Totes aquestes propietats són igualment vàlides per **files** en lloc de **columnes**.

Exemple 2.6 Calculem el següent **determinant d'ordre 3**:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 + 3\alpha \\ -3 & 2 & 4 - 2\alpha \\ 2 & -5 & 7 + 5\alpha \end{vmatrix}.$$

Tenim:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 + 3\alpha \\ -3 & 2 & 4 - 2\alpha \\ 2 & -5 & 7 + 5\alpha \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3\alpha \\ -3 & 2 & -2\alpha \\ 2 & -5 & 5\alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -40, \end{aligned}$$

ja que el **primer determinant és el del darrer exemple**, mentre que el **segon és 0** perquè les dues últimes columnes són les mateixes, però canviades de signe.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Proposició 2.7 Si A és **triangular**, el seu determinant és el **producte** dels elements de la **diagonal**:

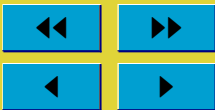
$$\det(A) = a_1^1 a_2^2 \cdots a_n^n.$$

Observació 2.8 Aplicant **operacions elementals**, es pot arribar a una matriu triangular, el determinant de la qual és el producte dels coeficients de la diagonal principal. Només cal tenir en compte, doncs, com les transformacions elementals modifiquen el valor del determinant. Aquest és el **mètode de Gauss** per al càlcul de determinants.

Exemple 2.9 Càlcul del determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1 \\ F_4 \sim 2F_4 + 3F_1}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & 2 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 \sim 7F_3 - F_2 \\ F_4 \sim 7F_4 + 11F_2}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 36 & 116 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 \sim F_4 + 18F_3} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{vmatrix} = \frac{2 \cdot 7 \cdot (-2) \cdot (-28)}{4 \cdot 49} = 4.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Proposició 2.10 $\det(A^t) = \det(A)$.

Proposició 2.11 (a) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, essent n l'ordre de la matriu A .
(b) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Proposició 2.12 (a) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$, essent n l'ordre de la matriu A .
(b) $\det(A^k) = (\det(A))^k$, per qualsevol nombre natural k .

Exemple 2.13 Si A i B són matrius quadrades d'ordre 2 amb $\det(A) = 4$ i $\det(B) = 3$,
$$\det\left(-\frac{1}{2}A^t B^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \det(A^t) \det(B^2) = \frac{1}{4} \det(A) (\det(B))^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 3^2 = 9.$$

Teorema 2.14 Una matriu quadrada A és **regular** si, i només si, $\det(A) \neq 0$.
I, en tal cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Definició 2.15 Les matrius regulars amb **determinant positiu** s'anomenen **directes**; i les de **determinant negatiu**, **inverses**.

Exemple 2.16 La matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

és **regular** i **inversa**, ja que el seu **determinant** és igual a -27 .



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Definició 2.17 Una matriu A és **ortogonal** si, i només si, $A^t A = I$.

Proposició 2.18 Una matriu quadrada A és **ortogonal** si, i només si, $A^{-1} = A^t$.

En particular, les **matrius quadrades ortogonals són regulars**.

Proposició 2.19 (a) El **producte** de matrius ortogonals és també ortogonal.

(b) Si una matriu quadrada és ortogonal, llavors la seva matriu **transposada** o **inversa** -ja que coincideixen- és també ortogonal.

Proposició 2.20 El **determinant** de tota **matriu ortogonal quadrada** és **1** o **-1**.

Per tant, les matrius ortogonals **directes** són les que tenen determinant **1**; i les **inverses**, les de determinant igual a **-1**.

Exemple 2.21 La matriu

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

és **ortogonal** perquè

$$A^t \cdot A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

I com que $\det(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-27) = -1$, és, a més a més, **inversa**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

2.2 Menors

Definició 2.22 S'anomena **menor d'ordre r** d'una matriu $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ al **determinant de qualsevol submatriu quadrada** d'ordre r de la matriu A .

Els **menors d'ordre 1** són els **elements de la matriu**.

Definició 2.23 Direm que un menor M' **conté** un menor M si la submatriu corresponent a M' conté a la submatriu que correspon a M .

Exemple 2.24 Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Llavors el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

és un **menor d'ordre 2** d' A , mentre que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

és un **menor d'ordre 3** d' A que **conté** el menor anterior.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 2.25 r files d'una matriu A són **linealment dependents** si, i només si, **tots** els menors d'ordre r obtinguts a partir d'aquestes files són **iguals a 0**.

Proposició 2.26 Si r files d'una matriu A són **linealment independents**, llavors una altra fila és **combinació lineal** d'aquestes si, i només si, **tots** els menors obtinguts afegint la nova fila i cadascuna de les altres columnes són **iguals a 0**.

Totes aquestes propietats són igualment vàlides per **columnes** en lloc de **files**.

Exemple 2.27 Considerem la matriu anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

És clar que el menor d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

és **no nul** i, en conseqüència, **les dues primeres files**—i també les dues primeres columnes—són **linealment independents**. I com que els menors obtinguts “**orlant**” aquest amb la tercera fila i cadascuna de les altres columnes són tots **nuls**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

deduïm que la **tercera fila és combinació lineal de les dues primeres**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 2.28 Una matriu A verifica que $\text{rang } A \geq r$ si, i només si, *conté un menor no nul d'ordre r* .

Exemple 2.29 En la matriu anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donat que el menor d'ordre 3 format per les dues primeres i la darrera fila i per les tres primeres columnes

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

és *no nul*, sabem ja que $\text{rang } A \geq 3$.

En particular, tenim la coneguda caracterització següent del rang.

Proposició 2.30 El *rang* d'una matriu A és *l'ordre del major menor no nul que conté*.

Aquesta proposició ens dóna una manera de saber si $\text{rang } A = r$: quan tenim un menor M d'ordre r no nul, comprovem si *tots* els menors d'ordre $r + 1$ són nuls. Ara bé, segons el següent resultat només cal considerar els menors obtinguts “*orlant*” M .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Todorí

Teorema 2.31 *Càlcul del rang per menors.*

El rang és r si, i només si, hi ha algun menor no nul d'ordre r i els menors d'ordre $r + 1$ que el contenen són nuls.

Exemple 2.32 Calculem per menors el rang de la matriu anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ja hem vist que $\text{rang } A \geq 3$, ja que el menor

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

és no nul.

Aleshores, donat que el rang no pot ser 4 (perquè la tercera fila és combinació lineal de les dues primeres i, per tant, no poden haver-hi quatre files linealment independents), deduïm que $\text{rang } A = 3$.

Observació 2.33 Observem que en el raonament anterior hem fet ús del concepte de **combinació lineal de files** per trobar ràpidament el rang de la matriu. Aquesta forma de procedir és interessant aplicar-la sempre que sigui possible.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 2.34 El sistema $AX = B$ és **de Cramer** si, i només si, A és **regular**.

Teorema 2.35 *Regla de Cramer.*

Si $AX = B$ és **de Cramer** i $A^1, A^2, \dots, A^n$ són les columnes de la matriu A ,

$$x_i = \frac{\det(A^1 \ A^2 \ \dots \ B \ \dots \ A^n)}{\det(A^1 \ A^2 \ \dots \ A^i \ \dots \ A^n)} \quad \text{per a } i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemple 2.36 **Resolució** del sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = -14 \\ 4x + y - 3z = 1 \\ -2x + 3y + 5z = 3 \end{array} \right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Com que $\det(A) = 84 \neq 0$, el sistema és **de Cramer** i la seva **solució** és

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -14 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{84} = \frac{-168}{84} = -2 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -14 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{84} = \frac{252}{84} = 3 \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -14 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{84} = \frac{-168}{84} = -2. \end{aligned}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 2.37 Quan $AX = B$ és compatible, però no és de Cramer, cal suprimir les equacions no corresponents a les files del menor no nul d'ordre màxim i passar a l'altre costat les incògnites que no són del menor. Aquest és el **mètode de Cramer**.

Exemple 2.38 Resolució del sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ -2x + y - 3z = -2 \\ 4x - 2y = 7 \end{array} \right\}, \quad \text{és a dir,} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Com que $\det(A) = 0$, el sistema no és de Cramer, però és evident que

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

és un menor no nul d'ordre màxim d' A i $(A|B)$, ja que

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Aleshores, eliminant la tercera equació i passant els termes en x a la dreta, queda:

$$\left. \begin{array}{l} -y + z = 3 - 2x \\ y - 3z = -2 + 2x \end{array} \right\}.$$

La solució del sistema en forma explícita és, doncs,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2x & 1 \\ -2 + 2x & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-7 + 4x}{2}$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 - 2x \\ 1 & -2 + 2x \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

2.3 Traces i adjunts

Definició 2.39 Donada una matriu quadrada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, s'anomena **menor centrat** de A a tot menor corresponent a files i columnes del mateix ordre.

Exemple 2.40 Donada la matriu d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

el **menor centrat** corresponent a les **files i columnes primera, segona i quarta** és

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 58.$$

És interessant remarcar que els **menors centrats corresponents a una sola fila i columna** no són res més que els **elements de la seva diagonal**.

Exemple 2.41 En el cas de la matriu anterior, el **menor centrat corresponent la tercera fila i columna** és

$$| 8 | = 8.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Todorí

Definició 2.42 Donada una matriu quadrada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, s'anomena **traça d'ordre k** de A , $tr_k(A)$, a la suma de tots els seus menors centrats d'ordre k .

La **traça d'ordre 1** s'anomena simplement **traça**, se sol representar per $tr(A)$ i és igual a la **suma dels elements de la diagonal** de la matriu A .

I la **traça d'ordre n** d'una matriu no és res més que el seu **determinant**.

Exemple 2.43 Donada la matriu d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

la seva **traça d'ordre 3** és

$$\begin{aligned} tr_3(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 7 & 5 \\ -9 & 8 & 5 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 + 58 + 2 + 208 = 266, \end{aligned}$$

mentre que la seva **traça** és

$$tr(A) = 2 - 4 + 8 + 3 = 9.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàduri

Definició 2.44 Donada una matriu quadrada $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ i fixat un coeficient a_i^j , si A_{i-}^j és la submatriu d'ordre $n - 1$ que s'obté eliminant la fila i i la columna j , s'anomena **adjunt** de a_i^j al menor d'aquesta submatriu **multiplicat per $(-1)^{i+j}$** :

$$A_i^j = (-1)^{i+j} \det(A_{i-}^j).$$

És fàcil recordar el signe corresponent a cada coeficient amb l'ajut de l'esquema següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.45 Donada la matriu d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

tenim que l'**adjunt** del coeficient $a_3^3 = 8$ és

$$A_3^3 = (-1)^{3+3} \det(A_{3-}^3) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 58.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Teorema 2.46 Regla de Laplace.

Donades una **fila** i o una **columna** j qualssevol d'una matriu quadrada A , es té que

$$\det(A) = a_i^1 A_i^1 + a_i^2 A_i^2 + \cdots + a_i^n A_i^n = a_1^j A_1^j + a_2^j A_2^j + \cdots + a_n^j A_n^j.$$

És convenient aplicar la Regla de Laplace **desenvolupant per una línia** que tingui el **màxim de zeros** possible. Aquests es poden introduir fent servir **operacions elementals**.

Exemple 2.47 Calculem el **determinant** de la matriu A anterior

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Fixem el darrer element de la primera fila, per exemple, i **pivotem** sobre ell per **posar zeros** a la resta d'elements de l'última columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 \sim 3F_2 - 5F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - 5F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1 \end{matrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ -1 & 13 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 13 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -5 & 7 & -9 \end{vmatrix} = 4.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 2.48 Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ és una matriu quadrada, la **matriu adjunta** de A , A^{ad} , és la que resulta de substituir cada **coeficient** a_i^j de A pel seu **adjunt** A_i^j .

Proposició 2.49 (a) Si $\text{rang}(A) \leq n - 2$, llavors $A^{ad} = 0$.
(b) Si $\text{rang}(A) = n - 1$, es té que $\text{rang}(A^{ad}) = 1$.
(c) Si A és regular, aleshores A^{ad} és també regular.

Exemple 2.50 Càlcul de l'adjunta de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

En un exemple anterior, hem vist que l'adjunt de l'element $a_3^3 = 8$ és

$$A_3^3 = (-1)^{3+3} \det(A_{3-}^{3-}) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 58.$$

Calculant anàlogament la resta d'adjunts dels coeficients de A , s'obté:

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 208 & 22 & -98 & 30 \\ 10 & 2 & -4 & 2 \\ -124 & -14 & 58 & -18 \\ -18 & -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 2.51 (a) $(A^{ad})^t = (A^t)^{ad}$.
(b) $A \cdot (A^{ad})^t = (A^{ad})^t \cdot A = (\det A) \cdot I$.

Teorema 2.52 (a) Si A és singular, llavors

$$A \cdot (A^{ad})^t = (A^{ad})^t \cdot A = 0,$$

essent 0 la matriu nul·la.

(b) Si A és regular, aleshores

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^{ad})^t.$$

Exemple 2.53 Càlcul de la inversa de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Com que $\det(A) = 4$, la seva inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 208 & 22 & -98 & 30 \\ 10 & 2 & -4 & 2 \\ -124 & -14 & 58 & -18 \\ -18 & -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 104 & 5 & -62 & -9 \\ 11 & 1 & -7 & -1 \\ -49 & -2 & 29 & 4 \\ 15 & 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

2.4 Recapitulació

Exemple 2.54 Calculem el **determinant** de la matriu següent

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

en funció del paràmetre α i analitzem en quins casos és **singular** i en quins és **regular**.

En casos com aquest i similars en què la matriu, per exemple, **té els mateixos elements per files o per columnes excepte l'ordre**, és útil **sumar totes les altres files o columnes a una donada**. Tenim així:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{F_1 \sim F_1 + F_2 + F_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha + 2 & \alpha + 2 & \alpha + 2 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= (\alpha + 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{=} (\alpha + 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - 1)^2 (\alpha + 2). \end{aligned}$$

En particular, els valors pels quals aquest **determinant s'anul·la** són $\alpha = 1$ i $\alpha = -2$. Per tant, si $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$ la matriu A és **singular**.

I, en canvi, si $\alpha \neq 1$ i -2 , el **determinant és diferent de zero** i la matriu A és, doncs, **regular**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.55 *Analitzem*, a continuació, per quins valors del paràmetre α , la matriu anterior

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

és *ortogonal*.

Per tal que ho sigui, cal que

$$A^t A = I.$$

En el nostre cas,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + 2 & 2\alpha + 1 & 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + 1 & \alpha^2 + 2 & 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + 1 & 2\alpha + 1 & \alpha^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Això equival, per tant, a que

$$\alpha^2 + 2 = 1 \quad \text{i} \quad 2\alpha + 1 = 0$$

que, òbviament, és *impossible*.

En conseqüència, es dedueix que aquesta matriu *no és ortogonal per cap valor del paràmetre α* .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tùdurí

Exemple 2.56 Estudiem el rang de la matriu anterior en funció del paràmetre α :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

En primer lloc, ja hem vist que si $\alpha \neq 1, -2$, la matriu A és **regular** i, per tant, $\text{rang}(A) = 3$.

Si $\alpha = 1$, la matriu A és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i és clar, llavors, que $\text{rang}(A) = 1$.

I si $\alpha = -2$, la matriu A és

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, per exemple, el menor d'ordre 2 format per les dues primeres files i columnes és **no nul**:

$$M = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

I, en conseqüència, com que la matriu A **no pot tenir rang igual a 3**, es dedueix que $\text{rang}(A) = 2$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.57 Estudiem i resolguem el sistema següent en funció del paràmetre α :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{array} \right\}.$$

Si $\alpha \neq 1, -2$, la matriu del sistema és regular i, aplicant la regla de Cramer, s'obté:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = -\frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{1}{\alpha + 2} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha + 2} \end{array} \right\}.$$

Si $\alpha = 1$, és clar que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 1$. Llavors, el sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i la seva solució general en forma explícita és

$$x = 1 - y - z.$$

I si $\alpha = -2$,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Per tant, $\text{rang}(A|B) = 3$. I com que $\text{rang}(A) = 2$, el sistema és incompatible.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.58 Considerem la matriu anterior

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Sabem ja que és **singular** quan $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$.

En el cas que $\alpha = 1$, obtenim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

amb $\text{rang}(A) = 1 < 3 - 1$. I es té que

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

efectivament. I si $\alpha = -2$, queda

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

amb $\text{rang}(A) = 2 = 3 - 1$ ara. I

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

verificant-se evidentment que

$$A \cdot (A^{ad})^t = (A^{ad})^t \cdot A = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 2.59 Ja hem vist que la matriu dels exemples anteriors

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

és **regular** quan $\alpha \neq 1, -2$.

En tal cas, la seva **adjunta** és

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 1 - \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha^2 - 1 & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & 1 - \alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$A^{ad} = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} \alpha + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

I, tenint en compte que $\det(A) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$, la **inversa** de la matriu A **en funció** del paràmetre α quan $\alpha \neq 1, -2$ és

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} (\alpha - 1) \begin{pmatrix} \alpha + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)(\alpha + 2)} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

3 Espais vectorials

3.1 Espais vectorials

Sigui $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n dots). Els seus elements $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ els anomenarem **vectors**. Es defineixen dues operacions en aquest conjunt.

Definició 3.1 La **suma** dels vectors $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és el vector

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

I el **producte** de l'escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ pel vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ és el vector

$$\alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Proposició 3.2 (a) **Associativa**: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

(b) **Commutativa**: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

(c) **Neutre**: Existeix un vector $\vec{0}$ tal que $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ per a tot vector $\vec{x}$.

(d) **Oposat**: Per a cada vector $\vec{x}$, existeix un vector $-\vec{x}$ tal que $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

(e) **Distributiva del producte per a la suma de vectors**: $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.

(f) **Distributiva del producte per a la suma d'escalars**: $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.

(g) **Compatibilitat**: $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$.

(h) **Unitat**: $1\vec{x} = \vec{x}$.

Es diu que $\mathbb{R}^n$, amb aquestes operacions, és l'**espai vectorial numèric** de dimensió n .



Imprimir

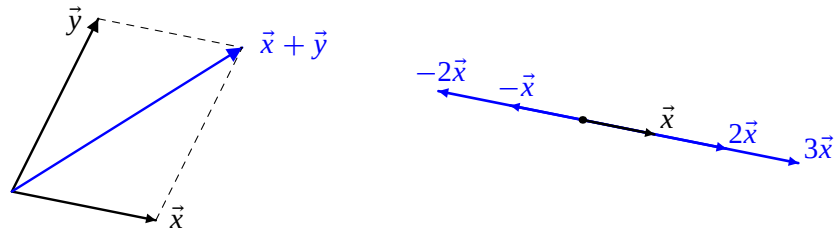
Tancar

Sortir

Definició 3.3 Tot conjunt E provist d'una **suma** i un **producte** com aquest que compleixin les vuit propietats anteriors s'anomena **espai vectorial**.

Els elements d' E s'anomenen **vectors**, mentre que els números reals s'anomenen **escalars**. Com a cas límit, tenim l'espai vectorial nul: $\{\vec{0}\}$.

Observació 3.4 Els **conjunts de matrius** $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, amb la suma i el producte per escalars coneguts, són espais vectorials. Podem identificar $\mathbb{R}^n$ amb $M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ o $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, segons si escrivim els vectors en fila o en columna.



Definició 3.5 A $\vec{0}$ se l'anomena el **vector nul**, i a $-\vec{x}$ el **vector oposat** de $\vec{x}$.

A $\mathbb{R}^n$, el vector nul és el $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ i l'oposat de $\vec{x}$ és el $-\vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Proposició 3.6 Per a cada vector $\vec{x}$ i cada escalar α es compleix:

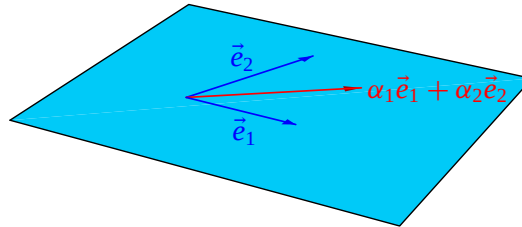
- (a) $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ i $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- (b) $\alpha \vec{x} = \vec{0} \implies \alpha = 0$ ó $\vec{x} = \vec{0}$.
- (c) $(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$.

Exemple 3.7 Si $\vec{x} = (1, 2, -3)$ i $\vec{y} = (-1, 0, 3)$, aleshores

$$\vec{x} + \vec{y} = (1, 2, -3) + (-1, 0, 3) = (0, 2, 0) \quad \text{i} \quad -2\vec{x} = -2(1, 2, -3) = (-2, -4, 6).$$

Definició 3.8 Se'n diu que un vector $\vec{x}$ és **combinació lineal** dels vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ si, i només si, **existeixen** escalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tals que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k.$$



Exemple 3.9 Veiem si el vector $(5, -2, 1)$ és **combinació lineal** dels vectors $(2, -1, 0)$ i $(0, 2, 1)$. Cal veure si **existeixen** escalars $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que

$$(5, -2, 1) = \alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 2, 1).$$

Igualant component a component, obtenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha = 5 \\ -\alpha + 2\beta = -2 \\ \beta = 1 \end{array} \right\}$$

que, evidentment, és **incompatible** i, per tant, el vector $(5, -2, 1)$ **no és combinació lineal** dels vectors $(2, -1, 0)$ i $(0, 2, 1)$.



Imprimir

Tancar

Sortir

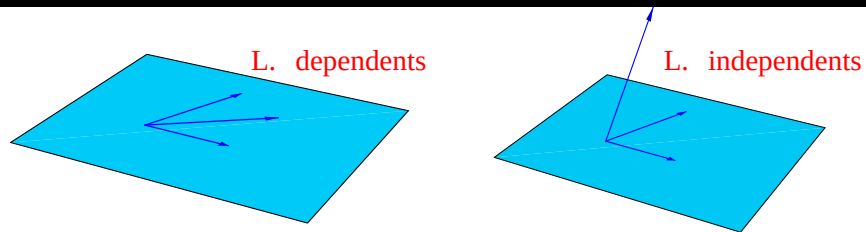
Definició 3.10 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ són **linealment dependents** si, i només si, **existeixen** escalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ no tots nuls tals que

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0}.$$

Per tant, direm que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ són **linealment independents** si, i només si,

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Proposició 3.11 (a) Si $k > 1$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ són **linealment dependents** si, i només si, **algun d'ells** és combinació lineal dels altres. I si $k = 1$, cal que $\vec{e}_1 = \vec{0}$.
(b) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ són **linealment independents** si, i només si, **cap d'ells** és nul ni combinació lineal dels altres.



Exemple 3.12 Veiem si $\{(2, -1, 0), (0, 2, 1), (5, -2, 1)\}$ són **linealment dependents** o **independents**. De $\alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(5, -2, 1) = (0, 0, 0)$, s'obté:

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + 5\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta - 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)_{F_2 \sim 2F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Aleshores, com que aquest sistema homogeni és compatible determinat, es dedueix que **té la solució trivial només** i, per tant, els vectors són **linealment independents**.

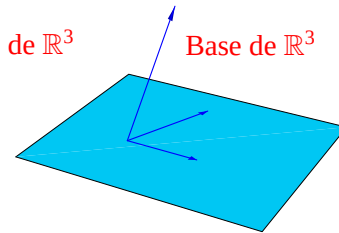
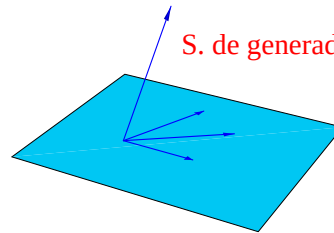
Definició 3.13 Direm que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ és un **sistema de generadors** de l'espai si, i només si, tot vector de l'espai és **combinació lineal** d'ells, és a dir, per tot vector $\vec{x}$, existeixen escalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tals que

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k.$$

Proposició 3.14 *Suposem que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ formen un **sistema de generadors de l'espai** i que $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_{k'}\}$ són **linealment independents**. Aleshores, $k \geq k'$.*

Definició 3.15 S'anomena **base** de l'espai a tot **sistema de generadors** format per vectors **linealment independents**.

Destaca la **base canònica** $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$: $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$.



Proposició 3.16 *Tot sistema de generadors d'un espai no nul **conté una base**.*

Exemple 3.17 Els vectors $\{(2, -1, 0), (0, 2, 1)\}$ **no són un sistema de generadors** de $\mathbb{R}^3$, ja que abans hem vist que el vector $(5, -2, 1)$ **no és combinació lineal** d'ells. En particular, doncs, tampoc **no són base** de $\mathbb{R}^3$.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 3.18 *Teorema de les bases.*

Totes les **bases** de l'espai tenen el **mateix nombre de vectors**.

Definició 3.19 S'anomena **dimensió** al nombre comú de vectors de qualsevol de les bases de l'espai. Es denota per **$\dim(E)$** .

Òbviament, **$\dim(\mathbb{R}^n) = n$** . Si $E = \{\vec{0}\}$, definim **$\dim(\{\vec{0}\}) = 0$** .

Proposició 3.20 Si l'espai té **dimensió n** , aleshores:

- (a) k vectors amb $k > n$ **no poden ser linealment independents**.
- (b) k vectors amb $k < n$ **no poden ser sistema de generadors** de l'espai.

Proposició 3.21 Si l'espai té **dimensió n** , llavors:

- (a) si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ són **linealment independents**, aleshores són **base** de l'espai.
- (b) si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ és un **sistema de generadors** de l'espai, llavors és una **base**.

És a dir, si coneixem la dimensió de l'espai i tenim **tants vectors com indica la dimensió**, **només cal comprovar una de les dues condicions** de la definició de base.

Exemple 3.22 Els vectors $\{(2, -1, 0), (0, 2, 1), (5, -2, 1)\}$ **sí són base** de $\mathbb{R}^3$, ja que aquest espai té **dimensió 3**, i ja hem comprovat anteriorment que aquests **tres** vectors són **linealment independents**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

3.2 Components i canvis de base

Proposició 3.23 $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ és una **base** de l'espai si, i només si, tot vector de l'espai **s'expressa de manera única** com a combinació lineal dels vectors de $\mathcal{B}$, és a dir, si per a cada vector $\vec{x}$ de l'espai, existeix una **única llista ordenada** d'escalars $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Definició 3.24 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'anomenen **components de $\vec{x}$ respecte $\mathcal{B}$** .

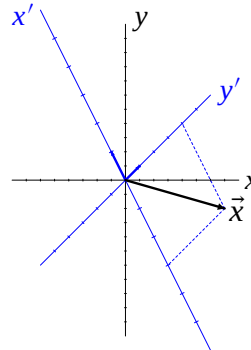
Exemple 3.25 Calculem les **components** de $(7, -2)$ respecte $\mathcal{B}' = \{(-1, 2), (1, 1)\}$.
De

$$(7, -2) = x'(-1, 2) + y'(1, 1),$$

s'obté

$$\left. \begin{array}{l} -x' + y' = 7 \\ 2x' + y' = -2 \end{array} \right\}.$$

I d'aquí, $x' = -3, y' = 4$. Per tant, les **components** de $(7, -2)$ respecte $\mathcal{B}'$ són $(-3, 4)$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Pàgina 58 de 194

En la **base canònica** $\mathcal{B}_c$, les components de qualsevol vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ són $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ també. Parlarem, en tal cas, de **components canòniques**.

Observació 3.26 Observem que, si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ és una base de l'espai, el vector $\vec{e}_1$ té components $(1, 0, \dots, 0)$, el vector $\vec{e}_2$ té components $(0, 1, \dots, 0)$, etc. Això significa que, si treballem amb components respecte d'aquesta base, aquests vectors $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ "fan el paper de base canònica" en aquest cas.

Proposició 3.27 (a) Si els vectors $\vec{x}, \vec{y}$ tenen components $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ respecte d'una base $\mathcal{B}$, llavors el vector $\vec{x} + \vec{y}$ té components $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

respecte la mateixa base $\mathcal{B}$.

(b) Si α és un escalar i $\vec{x}$ és un vector que té components $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecte la base $\mathcal{B}$, aleshores el vector $\alpha\vec{x}$ té components

$$(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

respecte d'aquesta base $\mathcal{B}$.

Això permet "identificar" tot vector amb les seves components respecte d'una base.

Proposició 3.28 (a) El **vector nul** $\vec{0}$ té components $(0, 0, \dots, 0)$ en qualsevol base.

(b) Si el vector $\vec{x}$ té components $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ respecte d'una base $\mathcal{B}$, el seu vector **oposat** $-\vec{x}$ té components $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ respecte d'aquesta mateixa base.

Exemple 3.29 Com que el vector $(7, -2)$ té components $(-3, 4)$ respecte la base $\mathcal{B}'$ d'abans, resulta que el vector $(-7, 2)$ té components $(3, -4)$ respecte d'aquesta mateixa base.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 3.30 S'anomena **matriu del conjunt de vectors** $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_k$ respecte d'una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ a la **matriu C** que té per columnes les components de cadascun d'ells respecte d'aquesta base.

La identificació entre vectors i components respecte de certa base permet “traduir” a simples càlculs matricials totes les qüestions relatives a conceptes vectorials.

Proposició 3.31 (a) Si X és la matriu columna de les components d'un vector $\vec{x}$ respecte de $\mathcal{B}$, llavors el vector $\vec{x}$ és **combinació lineal** de $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_k$ si, i només si, **$\text{rang } C = \text{rang}(C|X)$** .
(b) $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_k\}$ són **linealment independents** si, i només si, **$\text{rang } C = k$** .
(c) $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_k\}$ formen un **sistema de generadors** de l'espai si, i només si, **$\text{rang } C = n$** .

En particular, quan tenim **tants vectors com la dimensió de l'espai**, s'obté la següent caracterització de base.

Proposició 3.32 $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ formen **base** de l'espai si, i només si, **C és regular**.

Exemple 3.33 Així, $\mathcal{B}' = \{(-1, 2), (1, 1)\}$ és una **base** de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, ja que la matriu de $\mathcal{B}'$ respecte de la base canònica $\mathcal{B}_c$ és

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que, evidentment, és **regular**.



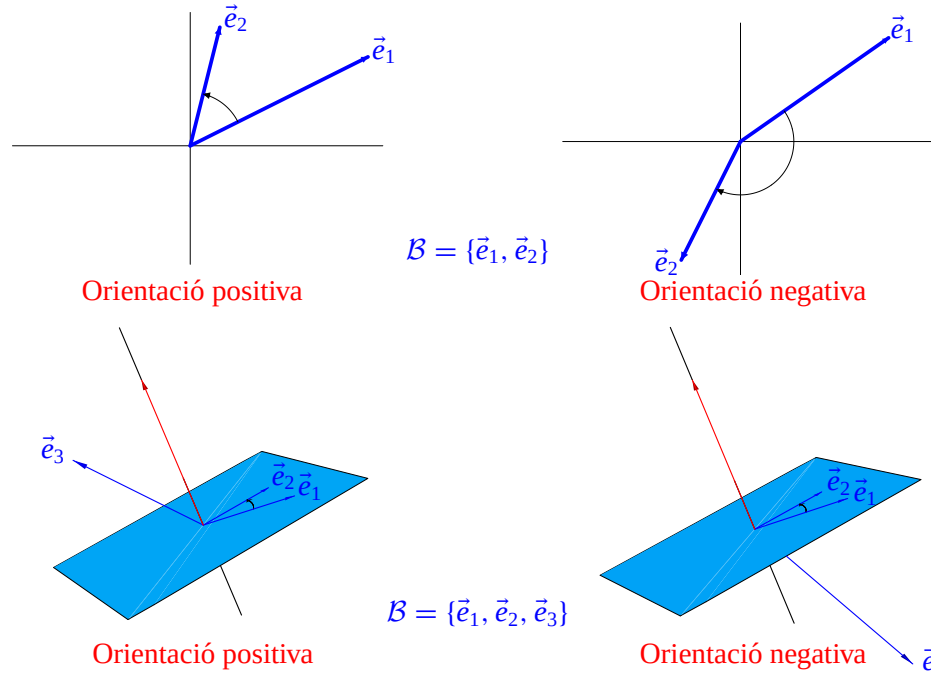
Imprimir

Tancar

Sortir

Definició 3.34 Dues bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ d'un espai tenen la **mateixa orientació** si, i només si, C és **directa**. I tenen **diferent orientació** si, i només si, C és **inversa**.

Les bases de $\mathbb{R}^n$ amb la **mateixa** orientació que la **base canònica** se'n diuen **positives**; i les que la tenen **diferent**, **negatives**.



Exemple 3.35 La base $\mathcal{B}' = \{(-1, 2), (1, 1)\}$ dels exemples anteriors és **negativa**, ja que la matriu de la base $\mathcal{B}'$ respecte de la base canònica $\mathcal{B}_c$ és **inversa**:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Definició 3.36 S'anomena **matriu de canvi de base** de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, a la matriu regular C de la base $\mathcal{B}'$ respecte la base $\mathcal{B}$. Si C és **directa**, es diu que el canvi de base **conserva l'orientació**; i si és **inversa**, es diu que **canvia l'orientació**.

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}).$$

Exemple 3.37 La **matriu de canvi de base** de la base $\mathcal{B}'$ d'abans a la base canònica $\mathcal{B}_c$ és

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposició 3.38 Si $C = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ és la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$**

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}),$$

llavors $C^{-1} = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ és la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$**

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{C^{-1}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}').$$

Exemple 3.39 La **matriu de canvi de base** de la base canònica $\mathcal{B}_c$ a la base $\mathcal{B}'$ és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposició 3.40 Si $C = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ és la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$** i $D = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B})$ és la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}$**

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}), \quad (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}'') \xrightarrow{D} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}),$$

llavors $P = C^{-1}D = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}')$ és la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$**

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}'') \xrightarrow{P=C^{-1}D} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}').$$

Exemple 3.41 Si $\mathcal{B}'' = \{(5, -1), (-1, 5)\}$, la **matriu de canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$** és

$$P = C^{-1}D = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Teorema 3.42 *Fórmula del canvi de base.*

Si $C = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}')$ és la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$

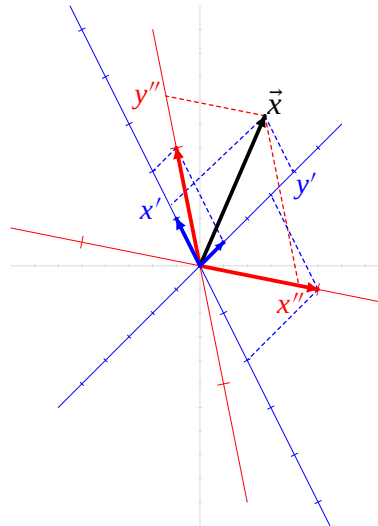
$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}'') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}'),$$

i X' i X'' les matrius-columna de les components d'un vector $\vec{x}$ en les bases $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$, llavors

$$X' = C X''.$$

Exemple 3.43 L'expressió de les components (x', y') respecte la base $\mathcal{B}'$ d'un vector arbitrari $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$ en funció de les seves components (x'', y'') respecte la base $\mathcal{B}''$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \begin{cases} x' = -2x'' + 2y'' \\ y' = 3x'' + y'' \end{cases}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir

3.3 Subespais vectorials

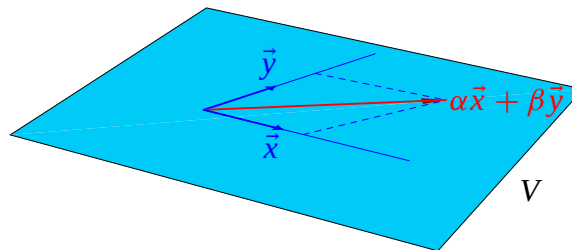
Definició 3.44 S'anomena **subespai vectorial** d'un espai a tot subconjunt V de l'espai que és **no buit** i **tancat per la suma i el producte per escalars**:

- (a) $\vec{x}, \vec{y} \in V \implies \vec{x} + \vec{y} \in V$.
 (b) $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in V \implies \alpha\vec{x} \in V$.

$\{\vec{0}\}$ és un subespai vectorial, que s'anomena **nul**. I l'espai n'és un altre, anomenat **total**.

Proposició 3.45 Un subconjunt no buit V d'un espai és un **subespai vectorial** si, i només si, **tota combinació lineal** de vectors de V és també de V .

En particular, tenim que **el conjunt de les combinacions lineals d'un conjunt de vectors qualsevol és un subespai vectorial**.



Observació 3.46 És important remarcar també que, en considerar el subespai vectorial de les combinacions lineals d'un conjunt de vectors **linealment independents**, no es pot **prescindir de cap d'ells**, ja que llavors el subespai obtingut no seria el mateix.

Definició 3.47 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ és un **sistema de generadors** d'un subespai vectorial V si, i només si, **tot vector de V és combinació lineal** d'ells. Direm també que V està **generat** per $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ i escriurem $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$.

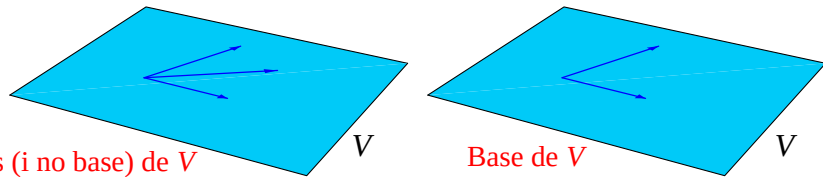
Proposició 3.48 Si $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$ i $W = \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_l \rangle$ són dos subespais d'un espai, llavors

$$V \subseteq W \text{ si i, només si, } \vec{v}_1 \in W, \vec{v}_2 \in W, \dots, \vec{v}_k \in W,$$

és a dir, els vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ són tots ells **combinació lineal dels vectors $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_l$** .

Definició 3.49 S'anomena **base** d'un subespai a tot **sistema de generadors** del subespai format per vectors **linealment independents**.

Els sistemes **linealment independents** són, en realitat, **bases del subespai que generen**.



S. de generadors (i no base) de V

Base de V

Exemple 3.50 $V = \langle (1, -2, 1), (2, -1, -1), (-1, -1, 2) \rangle$ és el subespai vectorial generat pel conjunt de vectors $\{(1, -2, 1), (2, -1, -1), (-1, -1, 2)\}$ que és, per tant, un sistema de generadors del subespai V .

I $\{(1, -2, 1), (2, -1, -1)\}$ n'és una **base**, ja que aquests dos vectors són **linealment independents** i $(-1, -1, 2) = (1, -2, 1) - (2, -1, -1)$.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Proposició 3.51 (a) Si C és la **matriu d'un sistema de generadors** d'un subespai V **diferent de l'espai** respecte de certa base $\mathcal{B}$, i X és la **matriu columna de les components d'un vector genèric** $\vec{x}$ de l'espai respecte d'aquesta mateixa base, llavors

$$\vec{x} \in V \text{ si i, només si, } \text{rang } C = \text{rang}(C|X).$$

(b) En imposar la condició $\text{rang } C = \text{rang}(C|X)$ anterior, s'obté un **sistema d'equacions lineals homogeni**.

Definició 3.52 Aquestes **equacions lineals homogènies** s'anomenen **equacions implícites** o **cartesianes** del subespai V respecte de la base $\mathcal{B}$.

Quan d'aquestes equacions no se'n pugui treure cap sense que el sistema deixi de ser equivalent, direm que les **equacions implícites** són **minimals**.

En el cas de **l'espai**, no s'obté cap condició i es diu que **no té equacions implícites**.

Exemple 3.53 Considerem la **base** $\{(1, -2, 1), (2, -1, -1)\}$ del **subespai** V d'abans.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & -1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & 2x + y \\ 0 & -3 & -x + z \end{array} \right) \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & 2x + y \\ 0 & 0 & x + y + z \end{array} \right).$$

Per tant, l'**equació implícita** de V respecte de la base canònica $\mathcal{B}_c$ és $x + y + z = 0$.

Observació 3.54 **Resolent el sistema de les equacions implícites**, s'obté **una base**.

Exemple 3.55 Si l'**equació implícita** respecte de la base canònica $\mathcal{B}_c$ d'un subespai és $x + y + z = 0$, llavors, resolent-la, tenim que $x = -y - z$ i, per tant,

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

és l'element genèric del subespai V , i $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ n'és, doncs, **una base**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 3.56 *Canvis de base en equacions implícites d'un subespai.*

Si $AX = 0$ és el sistema de les *equacions implícites respecte d'una base $\mathcal{B}$* d'un subespai vectorial V i

$$X = CX'$$

és la *fórmula de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$* , llavors

$$(AC)X' = 0$$

és el sistema de les *equacions implícites respecte de la base $\mathcal{B}'$* del subespai V .

Exemple 3.57 Considerem la base $\mathcal{B}' = \{(2, -1, 0), (0, 2, 1), (5, -2, 1)\}$.

La *fórmula del canvi de base* de $\mathcal{B}'$ a la base canònica $\mathcal{B}_c$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{cases} x = 2x' + 5z' \\ y = -x' + 2y' - 2z' \\ z = y' + z' \end{cases}$$

Per tant, *substituint* aquestes expressions en l'equació implícita de V respecte de $\mathcal{B}_c$

$$x + y + z = 0,$$

obtenim

$$(2x' + 5z') + (-x' + 2y' - 2z') + (y' + z') = 0,$$

és a dir,

$$x' + 3y' + 4z' = 0.$$

Aquesta és, doncs, l'*equació implícita del subespai vectorial V respecte de la base $\mathcal{B}'$* .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 3.58 *Teorema de les bases.*

Totes les **bases** d'un subespai vectorial tenen el **mateix nombre de vectors**.

Definició 3.59 S'anomena **dimensió** d'un subespai vectorial, $\dim(V)$, al **nombre comú de vectors** de les seves bases.

Si la **dimensió** de V és **1**, direm que V és una **recta vectorial**; si és **2**, un **pla vectorial**; i si és **$n - 1$** , un **hiperpla vectorial**.

Proposició 3.60 Siguin V i W dos subespais vectorials tals que $V \subseteq W$. Llavors:

(a) $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(b) $\dim(V) = \dim(W)$ si, i només si, $V = W$.

Proposició 3.61 (a) Si C és la **matriu d'un sistema de generadors** d'un subespai vectorial V respecte d'una base qualsevol $\mathcal{B}$, aleshores

$$\dim(V) = \text{rang}(C).$$

(b) Si $AX = 0$ són les **equacions implícites** d'un subespai vectorial V respecte d'una base qualsevol $\mathcal{B}$, llavors

$$\dim(V) = n - \text{rang}(A),$$

és a dir, el **nombre de graus de llibertat** del sistema.

Exemple 3.62 El subespai vectorial V dels exemples anteriors té **dimensió 2** i és, per tant, un **pla vectorial**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 3.63 S'anomena **rang** d'un conjunt de vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de l'espai a la **dimensió del subespai que generen**:

$$\text{rang} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = \dim \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle .$$

Proposició 3.64 El **rang** d'un conjunt de vectors és igual al **nombre màxim de vectors linealment independents** que conté.

Proposició 3.65 Un vector $\vec{x}$ és **combinació lineal** d'uns vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de l'espai si, i només si,

$$\text{rang} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}\} = \text{rang} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} .$$

Proposició 3.66 Si C és la **matriu del conjunt de vectors** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ respecte d'una base qualsevol $\mathcal{B}$, aleshores

$$\text{rang} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = \text{rang}(C) .$$

Observació 3.67 En particular, retrobem aquí la condició que ha de verificar un vector $\vec{x}$ per tal de ser **combinació lineal** d'uns vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$: que si X és la matriu columna de les components de $\vec{x}$ en la base $\mathcal{B}$ i C és la **matriu del conjunt de vectors** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ respecte d'aquesta base $\mathcal{B}$, aleshores

$$\text{rang}(C|X) = \text{rang}(C) .$$

Exemple 3.68 Els vectors $\{(1, -2, 1), (2, -1, -1), (-1, -1, 2)\}$ tenen rang igual a 2, ja que **generen el subespai V** anterior que, tal com hem vist, té **dimensió 2**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

3.4 Recapitulació

Exemple 3.69 Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una certa base de $\mathbb{R}^3$ i considerem els vectors

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned} \right\}.$$

Veiem si el vector $\vec{e}'_3$ és **combinació lineal** dels vectors $\vec{e}'_1$ i $\vec{e}'_2$.

Les **components** del vector $\vec{e}'_1$ respecte de la base $\mathcal{B}$ són $(2, -1, 0)$, les de $\vec{e}'_2$ són $(0, 2, 1)$ i les de $\vec{e}'_3$ són $(5, -2, 1)$.

Cal veure, doncs, si **existeixen** **escalars** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tals que

$$(5, -2, 1) = \alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 2, 1).$$

Igualant component a component, obtenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha &= 5 \\ -\alpha + 2\beta &= -2 \\ \beta &= 1 \end{aligned} \right\}$$

que, evidentment, és **incompatible** i, per tant, el vector $\vec{e}'_3$ **no és combinació lineal** dels vectors $\vec{e}'_1$ i $\vec{e}'_2$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.70 Considerem de nou els vectors $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ de l'exemple anterior.

Treballant novament amb les components d'aquests vectors respecte de la base $\mathcal{B}$, tenim que la condició de **dependència o independència lineal** és

$$\alpha(2, -1, 0) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(5, -2, 1) = (0, 0, 0).$$

D'aquí s'obté el sistema homogeni

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha + 5\gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta - 2\gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

i, aplicant el mètode de Gauss, obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{F_2 \sim 2F_2 + F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Aleshores, com que aquest sistema homogeni és compatible determinat, es dedueix que **té la solució trivial només** i, per tant, els vectors $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ són **linealment independents**.

En particular, com que tenim **tres vectors linealment independents en un espai vectorial de dimensió també tres**, resulta que

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$$

és una altra **base** de $\mathbb{R}^3$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.71 Donades les bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ d'abans, la **matriu de canvi de base** de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ és

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, aquesta matriu és **directa**, ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Per tant, es tracta d'un **canvi de base** que **conserva l'orientació**.

Finalment, tenim que la **fórmula del canvi de base** que dona l'**expressió** de les components (x, y, z) d'un vector qualsevol de l'espai en la base $\mathcal{B}$ **en funció** de les components (x', y', z') del mateix vector en la base $\mathcal{B}'$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{cases} x = 2x' + 5z' \\ y = -x' + 2y' - 2z' \\ z = y' + z'. \end{cases}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 3.72 Considerem ara la **matriu de canvi de base** de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$, que sabem que és la **inversa** de la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Això significa que l'**expressió** dels vectors de la base $\mathcal{B}$ **en funció** dels de la base $\mathcal{B}'$ és

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{3}(4\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 - \vec{e}'_3) \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{3}(5\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3) \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{3}(-10\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 + 4\vec{e}'_3) \end{aligned} \right\}$$

i que la **fórmula del canvi de base** que dóna l'**expressió** de les components (x', y', z') respecte de la base $\mathcal{B}'$ d'un vector qualsevol de l'espai **en funció** de les seves components (x, y, z) respecte de la base $\mathcal{B}$ és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1}{3}(4x + 5y - 10z) \\ y' &= \frac{1}{3}(x + 2y - z) \\ z' &= \frac{1}{3}(-x - 2y + 4z). \end{aligned} \right.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 3.73 Sigui ara V el subespai vectorial generat pel conjunt de vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ tals que

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{v}_2 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{aligned} \right\},$$

on $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és la base dels exemples anteriors.

Calculem les equacions implícites de V respecte de la base $\mathcal{B}$.

En primer lloc, tenim que les components dels vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ respecte de la base $\mathcal{B}$ són

$$(1, -2, 1) \quad \text{i} \quad (2, -1, -1)$$

respectivament. Aleshores, notant per

$$(x, y, z)$$

les components d'un vector genèric de l'espai respecte d'aquesta mateixa base $\mathcal{B}$, obtenim:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & -1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right) & \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & 2x + y \\ 0 & -3 & -x + z \end{array} \right) \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{\simeq} \\ & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 3 & 2x + y \\ 0 & 0 & x + y + z \end{array} \right). \end{aligned}$$

Per tant, l'equació implícita de V respecte de la base $\mathcal{B}$ és

$$x + y + z = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Exemple 3.74 Considerem la base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ introduïda anteriorment.

Volem trobar l'equació implícita del subespai vectorial V respecte d'aquesta base $\mathcal{B}'$.

Tal com hem vist abans, la fórmula del canvi de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{cases} x = 2x' + 5z' \\ y = -x' + 2y' - 2z' \\ z = y' + z' \end{cases}$$

Aleshores, substituint aquestes expressions en l'equació implícita de V respecte de $\mathcal{B}$

$$x + y + z = 0,$$

obtenim

$$(2x' + 5z') + (-x' + 2y' - 2z') + (y' + z') = 0$$

que, operant, es transforma en

$$x' + 3y' + 4z' = 0$$

que és, doncs, l'equació implícita del subespai vectorial V respecte de la base $\mathcal{B}'$.

Observació 3.75 També es podria haver trobat aquesta equació implícita calculant les components dels vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ respecte de la base $\mathcal{B}'$ i aplicant Gauss llavors a aquestes. Però és obvi que aquesta forma de procedir és més lenta.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

4 L'espai vectorial euclidià

4.1 L'espai vectorial euclidià

Definició 4.1 El **producte escalar** de $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ és:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, diem que $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són **ortogonals** o **perpendiculars**, i escrivim $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Proposició 4.2 (a) Definida positiva: $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ i $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

(b) Simètrica: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.

(c) Compatible amb el producte per escalars: $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y})$.

(d) Distributiva respecte de la suma: $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$.

Definició 4.3 En general, s'anomena **producte escalar** en un espai vectorial E a tota operació com l'anterior que tingui aquestes mateixes propietats.

Proposició 4.4 (a) $\vec{0} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{0} = 0$.

(b) $\vec{x} \cdot (-\vec{y}) = -(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (-\vec{x}) \cdot \vec{y}$.

Exemple 4.5 Si $\vec{x} = (-2, 1, 0)$ i $\vec{y} = (8, -1, 3)$, llavors

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = -2 \cdot 8 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = -17.$$

En particular, doncs, $\vec{x}$ i $\vec{y}$ **no són ortogonals**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 4.6 La **norma, mòdul o longitud** d'un vector $\vec{x}$ és el número real

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

Els vectors de **norma 1** s'anomenen **unitaris**.

Proposició 4.7 Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, aleshores

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Proposició 4.8 (a) $\|\vec{x}\| \geq 0$ i $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$.

(c) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ (desigualtat de Schwarz).

(d) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualtat triangular).

En particular, **dividint un vector per la seva norma** s'obté un **vector unitari**.

Exemple 4.9 En el cas dels vectors d'abans $\vec{x} = (-2, 1, 0)$ i $\vec{y} = (8, -1, 3)$:

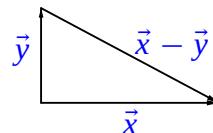
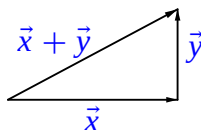
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} \quad \text{i} \quad \|\vec{y}\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{74}.$$

I els vectors $\frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$ i $\frac{1}{\|\vec{y}\|} \cdot \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{74}}(8, -1, 3)$ són, doncs, **unitaris**.

Proposició 4.10 **Teorema de Pitàgores.**

(a) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ si, i només si, $\vec{x} \perp \vec{y}$.

(b) $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ si, i només si, $\vec{x} \perp \vec{y}$.



Imprimir

Tancar

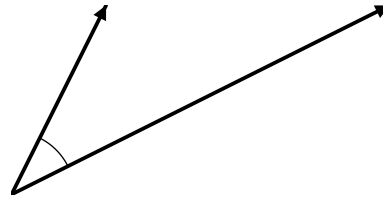
Sortir

Definició 4.11 L'**angle (no orientat)** entre dos vectors **no nuls** $\vec{x}$ i $\vec{y}$ és el nombre real entre 0 i π

$$\widehat{\vec{x}\vec{y}} = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Cal observar que aquesta definició té sentit per la **desigualtat de Schwarz**, ja que en virtut d'aquesta el quocient anterior té mòdul menor o igual que 1 i pren valors, per tant, **entre -1 i 1** . En particular, obtenim així la “**fórmula clàssica**” del producte escalar:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \widehat{\vec{x}\vec{y}}.$$



Exemple 4.12 Amb els vectors $\vec{x} = (-2, 1, 0)$ i $\vec{y} = (8, -1, 3)$ d'abans, tenim:

$$\widehat{\vec{x}\vec{y}} = \arccos \frac{-17}{\sqrt{5}\sqrt{74}} = \arccos \frac{-17\sqrt{370}}{370} = 152.10^\circ.$$

Proposició 4.13 Dos vectors **no nuls** $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són **ortogonals** si, i només si, $\widehat{\vec{x}\vec{y}} = \frac{\pi}{2}$.

Proposició 4.14 **Teorema del cosinus.**

- (a) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \widehat{\vec{x}\vec{y}}.$
 (b) $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \widehat{\vec{x}\vec{y}}.$



Imprimir

Tancar

Sortir

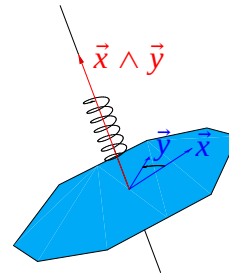
Definició 4.15 El **producte vectorial** de $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representa la base canònica de $\mathbb{R}^3$, és útil la “**regla nemotècnica**” següent:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & x_1 & y_1 \\ \vec{j} & x_2 & y_2 \\ \vec{k} & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Proposició 4.16 (a) $\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$.
(b) $(\alpha\vec{x}) \wedge \vec{y} = \alpha(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{x} \wedge (\alpha\vec{y})$.
(c) $(\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z}$ i $\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}$.
(d) $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{0}$ si, i només si, $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són **linealment dependents**.
(e) Si $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són **linealment independents**, $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}\}$ és una **base positiva** de $\mathbb{R}^3$.
(f) $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \widehat{\vec{x}\vec{y}}$.
(g) $\vec{x} \wedge \vec{y}$ és **ortogonal** a $\vec{x}$ i $\vec{y}$.



Exemple 4.17 El producte vectorial dels vectors $\vec{x} = (-2, 1, 0)$ i $\vec{y} = (8, -1, 3)$ és

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (-2, 1, 0) \wedge (8, -1, 3) = (3, 6, -6).$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Pàgina 79 de 194

Definició 4.18 Una **base ortogonal** de l'espai és la formada per vectors **ortogonals** dos a dos. Una **base ortonormal** és una **base ortogonal** de vectors **unitaris**.

Proposició 4.19 Si $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són vectors **ortogonals** de $\mathbb{R}^3$, llavors $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}\}$ és una **base ortogonal positiva** de $\mathbb{R}^3$.

Proposició 4.20 Les fórmules del **producte escalar**, la **norma** i l'**angle no orientat** són les **mateixes** si es treballa amb **components respecte de bases ortonormals**.

Exemple 4.21 Considerem els vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ que, en certa **base ortonormal** $\mathcal{B}$, tenen components $(-2, 1, 0)$ i $(8, -1, 3)$ respectivament. Aleshores:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = -2 \cdot 8 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = -17$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{74}$$

$$\widehat{\vec{x}\vec{y}} = \arccos \frac{-17}{\sqrt{5}\sqrt{74}} = \arccos \frac{-17\sqrt{370}}{370} = 152.10^\circ.$$

Proposició 4.22 Les fórmules del **producte vectorial** són les **mateixes** si es treballa amb **components respecte de bases ortonormals positives**.

Exemple 4.23 Si en el cas anterior la base ortonormal és també **positiva**, el **producte vectorial** dels vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ és:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (-2, 1, 0) \wedge (8, -1, 3) = (3, 6, -6).$$



Àlgebra Lineal

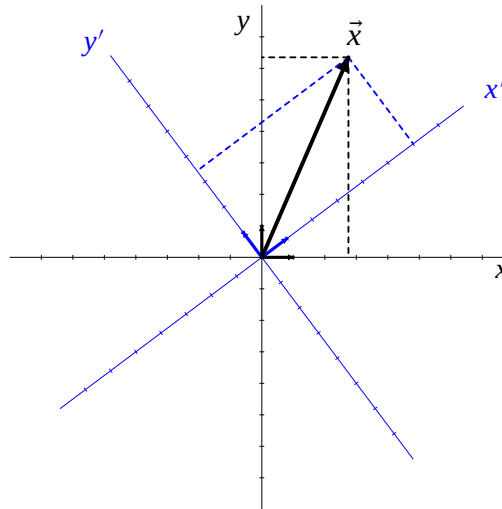
Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 4.24 Si $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ és una **base** de l'espai i C és la **matriu de canvi de base** de $\mathcal{B}'$ a una altra **base ortonormal** $\mathcal{B}$ qualsevol, aleshores
(a) $\mathcal{B}'$ és una **base ortogonal** de $\mathbb{R}^n \iff C^t C$ és una matriu **diagonal**.
(b) $\mathcal{B}'$ és una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^n \iff C^t C = I$, és a dir, C és **ortogonal**.

Exemple 4.25 La base $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{5}(4, 3), \frac{1}{5}(-3, 4)\}$ és **ortonormal**, ja que la seva **matriu de canvi de base** C a la base canònica –que és ortonormal– és **ortogonal**:

$$C^t C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = I.$$

Definició 4.26 Els **canvis de base** entre dues **bases ortonormals** s'anomenen **canvis ortogonals de base**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

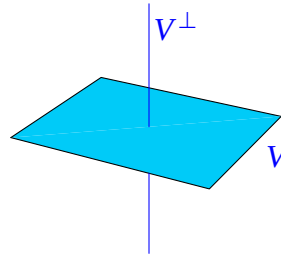
Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tànduri

4.2 Subespais vectorials de l'espai vectorial euclidià

Proposició 4.27 El conjunt de vectors de l'espai que són **ortogonals a tots els vectors** d'un subespai donat V formen un altre subespai vectorial $V^\perp$.

Definició 4.28 $V^\perp$ se'n diu **subespai ortogonal** o **suplementari ortogonal** de V .

Proposició 4.29 $(V^\perp)^\perp = V$ i $\dim(V^\perp) = n - \dim(V)$.



Proposició 4.30 Donat un sistema de generadors d'un subespai V , $V^\perp$ és el conjunt de vectors de l'espai que són **ortogonals a tots els generadors** de V .

Exemple 4.31 Considerem el subespai $V = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$. El seu **subespai ortogonal** $V^\perp$ té, llavors, equacions implícites $x + y = 0$ i $x + z = 0$.

Observació 4.32 El **procés invers** és també **vàlid**.

Exemple 4.33 L'**ortogonal** del subespai d'equacions $x + y = 0$ i $x + z = 0$ és el generat per $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$.

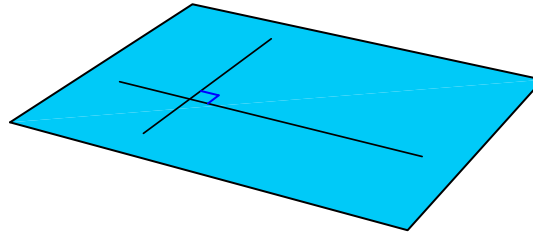


Imprimir

Tancar

Sortir

Definició 4.34 Es diu que dos subespais vectorials V i W són **ortogonals** si, i només si, $\vec{x} \perp \vec{y}$ per a tot $\vec{x} \in V$ i tot $\vec{y} \in W$.



Proposició 4.35 Dos subespais V i W són **ortogonals** si, i només si, *cadascun dels generadors de V és ortogonal a cadascun dels generadors de W .*

Proposició 4.36 (a) $V^\perp$ és el **major** subespai d'entre els **ortogonals** a V .
(b) Dos subespais vectorials V i W són **ortogonals** si, i només si,

$$V \subseteq W^\perp \quad i \quad W \subseteq V^\perp.$$

Exemple 4.37 Els subespais vectorials $V = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$ i $W = \langle (1, -1, -1) \rangle$ són **ortogonals**, ja que

$$(1, 1, 0) \cdot (1, -1, -1) = 0$$

$$(1, 0, 1) \cdot (1, -1, -1) = 0.$$

De fet, resolent les equacions de $V^\perp$ trobades anteriorment, és fàcil comprovar que $V^\perp = W$ en aquest cas.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 4.38 Donats un subespai V i un vector qualsevol $\vec{x}$ de l'espai:

(a) Existeix un **únic** vector $\vec{x}' \in V$ tal que $\vec{x}'' = \vec{x} - \vec{x}' \in V^\perp$.

(b) $\vec{x}'$ és el vector de V tal que el valor $\|\vec{x}''\| = \|\vec{x} - \vec{x}'\|$ és el **mínim**.

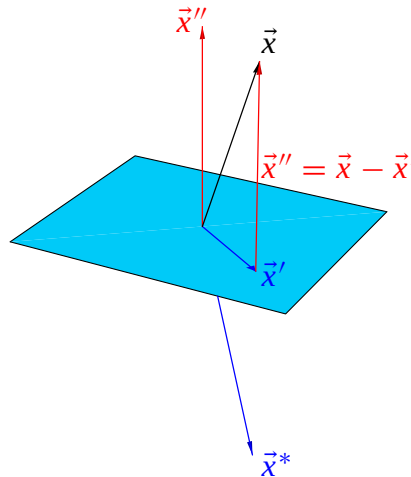
Definició 4.39 Al vector $\vec{x}'$ se l'anomena la **projecció ortogonal** de $\vec{x}$ sobre V o la **millor aproximació** de $\vec{x}$ en V .

I el **simètric** de $\vec{x}$ respecte a V es defineix com

$$\vec{x}^* = 2\vec{x}' - \vec{x} = \vec{x}' - \vec{x}'' = \vec{x} - 2\vec{x}''.$$

Proposició 4.40 (a) $\vec{x}' = \vec{x} \iff \vec{x} \in V$ i $\vec{x}' = \vec{0} \iff \vec{x} \in V^\perp$.

(b) $\vec{x}^* = \vec{x} \iff \vec{x} \in V$ i $\vec{x}^* = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{0}$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Teorema 4.41 Si $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \rangle$, la **projecció ortogonal** de $\vec{x}$ sobre V és
 $\vec{x}' = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k$,

on $x_1, x_2, \dots, x_k$ són **solucions** del sistema lineal –que **sempre és compatible**–

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_k \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{v}_k \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{x} \\ \dots \\ \vec{v}_k \cdot \vec{x} \end{pmatrix}.$$

I $x_1, x_2, \dots, x_k$ són **úniques** si, i només si, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ és una **base** de V .

Exemple 4.42 Si prenem ara $\vec{x} = (-5, 8, 4)$ i $V = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$, queda:

$$\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) & (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) \\ (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0) & (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1, 0) \cdot (-5, 8, 4) \\ (1, 0, 1) \cdot (-5, 8, 4) \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que té solució $x = \frac{7}{3}$ i $y = -\frac{5}{3}$. Per tant,

$$\vec{x}' = \frac{7}{3} \cdot (1, 1, 0) - \frac{5}{3} \cdot (1, 0, 1) = \frac{1}{3}(2, 7, -5)$$

$$\vec{x}^* = 2\vec{x}' - \vec{x} = \frac{2}{3}(2, 7, -5) - (-5, 8, 4) = \frac{1}{3}(19, -10, -22).$$

Observació 4.43 Quan hi ha **un sol generador** $\vec{v}_1$, queda la fórmula: $\vec{x}' = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{x}}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1$.

Proposició 4.44 $\vec{x}'' = \vec{x} - \vec{x}'$ és la **projecció ortogonal** de $\vec{x}$ sobre l'**ortogonal** $V^\perp$.

Exemple 4.45 En el mateix exemple d'abans, com que $V^\perp = \langle (1, -1, -1) \rangle$, tenim:

$$\vec{x}'' = \frac{(1, -1, -1) \cdot (-5, 8, 4)}{(1, -1, -1) \cdot (1, -1, -1)} (1, -1, -1) = -\frac{17}{3} \cdot (1, -1, -1)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}'' = (-5, 8, 4) - \left(-\frac{17}{3} \cdot (1, -1, -1)\right) = \frac{1}{3}(2, 7, -5).$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 4.46 Una **base ortogonal** d'un subespai V és la que té els vectors **ortogonals dos a dos**. I una **base ortonormal** és una **base ortogonal** de vectors **unitaris**.

Observació 4.47 El concepte de **projecció ortogonal** permet construir una **base ortogonal** $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k$ a partir d'una altra base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$: **només cal restar** a cada vector –a partir del segon– la seva **projecció ortogonal sobre el subespai** generat pels anteriors. Aquest és l'anomenat **mètode d'ortogonalització de Gram–Schmidt**.

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \vec{v}'_k \quad (k = 2, \dots, m),$$

on $\vec{v}'_k$ és la projecció ortogonal del vector $\vec{v}_k$ sobre el subespai

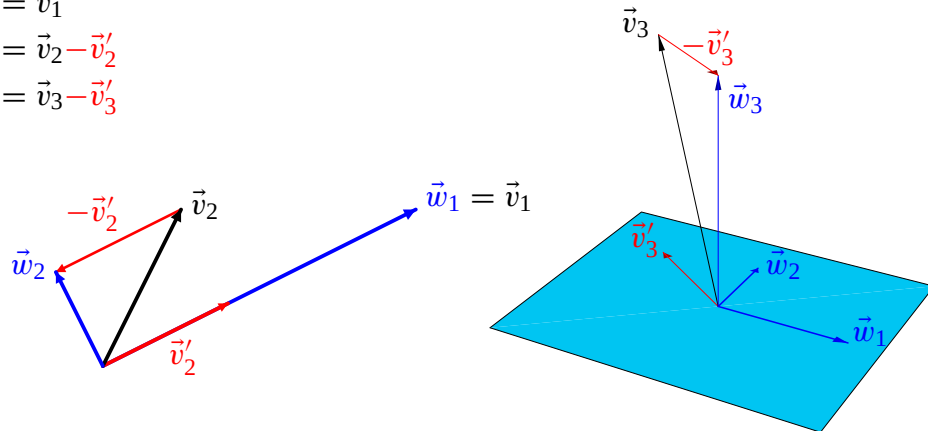
$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{k-1} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1} \rangle.$$

Per exemple, els tres primers vectors s'obtenen així:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}'_2$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \vec{v}'_3$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Proposició 4.48 Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ és una **base ortogonal** de V , aleshores

$$\vec{x}' = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{x}}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{x}}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{x}}{\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k} \cdot \vec{v}_k.$$

Teorema 4.49 **Fórmula explícita del mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt.**

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ és una **base** d'un subespai vectorial V , llavors els vectors

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1$$

...

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \left(\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{v}_k}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 + \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_k}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \cdot \vec{w}_2 + \dots + \frac{\vec{w}_{k-1} \cdot \vec{v}_k}{\vec{w}_{k-1} \cdot \vec{w}_{k-1}} \cdot \vec{w}_{k-1} \right)$$

formen una **base ortogonal** $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ de V .

Exemple 4.50 Amb la base $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ del subespai V anterior, tenim:

$$\vec{w}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{w}_2 = (1, 0, 1) - \frac{(1,1,0)(1,0,1)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, 2) \simeq (1, -1, 2).$$

Per tant, $\{(1, 1, 0), (1, -1, 2)\}$ és una **base ortogonal** de V . I, dividint cada vector per la seva norma, obtenim una **base ortonormal** de V : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \right\}$.

Observació 4.51 Si disposem d'una **base ortogonal** d'un subespai, podem aplicar la fórmula de la proposició anterior per trobar més fàcilment la **projecció ortogonal**.

Exemple 4.52 Així, en el nostre cas, tenim:

$$\vec{x}' = \frac{(1,1,0)(-5,8,4)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1, 1, 0) + \frac{(1,-1,2)(-5,8,4)}{(1,-1,2)(1,-1,2)}(1, -1, 2) = \frac{1}{3}(2, 7, -5).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Todorí

A partir d'aquests errors “parcials”, disposem de moltes maneres de definir un error “global”. El més utilitzat, anomenat **quadràtic**, és el següent:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \sqrt{\epsilon_1^2 + \dots + \epsilon_m^2} \\ &= \sqrt{|a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n - b_1|^2 + \dots + |a_m^1 x_1 + \dots + a_m^n x_n - b_m|^2} \\ &= \sqrt{(a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n - b_1)^2 + \dots + (a_m^1 x_1 + \dots + a_m^n x_n - b_m)^2}.\end{aligned}$$

Aleshores, “interpretant” com a vectors les columnes $A^1, A^2, \dots, A^n$ de la matriu A i les matrius-columna X i B , ens queda

$$\epsilon = \|AX - B\|.$$

Exemple 4.54 Considerem el sistema d'equacions anterior

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors, amb els valors $x = 1$, $y = 0$ d'abans, es té que

$$AX - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i, en conseqüència, l'error quadràtic és

$$\epsilon = \|(0, 0, 1)\| = 1.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

En general, el **mètode dels mínims quadrats** consisteix en trobar els valors de X que **minimitzen** l'**error quadràtic**.

Proposició 4.55 Els valors de X que **minimitzen** l'error quadràtic són les solucions del sistema lineal

$$AX = B',$$

on B' és la **projecció ortogonal** del vector-columna B sobre el subespai generat pels vectors-columna $A^1, A^2, \dots, A^n$ de la matriu A .

Exemple 4.56 Considerem el sistema lineal d'abans

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cal trobar, en conseqüència, la **projecció ortogonal** del vector $(2, 1, 0)$ sobre el subespai $V = \langle (2, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$. Aplicant la fórmula corresponent, ens queda el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} (2, 1, 1) \cdot (2, 1, 1) & (2, 1, 1) \cdot (1, 1, 2) \\ (1, 1, 2) \cdot (2, 1, 1) & (1, 1, 2) \cdot (1, 1, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2, 1, 1) \cdot (2, 1, 0) \\ (1, 1, 2) \cdot (2, 1, 0) \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Observació 4.57 Observem que el sistema obtingut no és cap altre que $A^t AX = A^t B$. Aquest fet és general i el que s'hauria de fer, llavors, és resoldre aquest sistema i, amb les solucions $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ trobades, resoldre el nou sistema $AX = \bar{x}_1 A^1 + \dots + \bar{x}_n A^n$. Però $\bar{x}_1 A^1 + \dots + \bar{x}_n A^n = A\bar{X}$ —on $\bar{X}$ és la matriu-columna formada per $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ — i, per tant, ens queda el sistema $AX = A\bar{X}$, la solució del qual és, òbviament, $X = \bar{X}$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Llavors, tenint en compte aquestes consideracions, obtenim el resultat central següent:

Teorema 4.58 Donat un sistema lineal $AX = B$, els valors que *minimitzen l'error quadràtic* són les solucions del sistema –que *sempre és compatible*–
 $A^t AX = A^t B$.

Exemple 4.59 Considerem de nou el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicant la fórmula anterior, queda

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que, tal com hem vist en l'exemple anterior, es transforma en el sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

que és compatible determinat i té solució

$$x = \frac{15}{11}, \quad y = -\frac{7}{11}.$$

I l'error quadràtic és

$$\epsilon = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{15}{11} - \frac{7}{11} - 2\right)^2 + \left(\frac{15}{11} - \frac{7}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{15}{11} - 2 \cdot \frac{7}{11} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{11}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 4.60 La solució obtinguda en aplicar el mètode dels mínims quadrats a un sistema d'equacions lineals $AX = B$ és *única* si, i només si, el **rang d' A és igual al nombre d'incògnites**. I, en cas contrari, **l'error quadràtic és el mateix per totes les solucions del sistema**.

Exemple 4.61 Considerem el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 2 \\ -x + 2y = 0 \end{array} \right\} \text{ o bé } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que és clarament incompatible. Si apliquem el mètode dels mínims quadrats obtenim

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix},$$

que és compatible indeterminat –en aquest cas, es té que $\text{rang } A = 1$, però el nombre d'incògnites és $n = 2$ – i té solució general

$$x = 1 + 2y.$$

Aleshores, per calcular l'error quadràtic prenem una qualsevol de les seves solucions –per exemple, $x = 1, y = 0$ – i tenim que

$$\epsilon = \sqrt{(1 - 2 \cdot 0 - 2)^2 + (-1 + 2 \cdot 0 - 0)^2} = \sqrt{2}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 4.62 Fins ara, ens hem limitat a aplicar el mètode dels mínims quadrats a sistemes incompatibles. Evidentment, si el sistema és **compatible**, els valors obtinguts en aplicar el mètode dels mínims quadrats són les solucions **exactes** del sistema original i, en tal cas, l'error quadràtic és **zero**.

Exemple 4.63 Apliquem el mètode dels mínims quadrats al sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que, evidentment, és compatible determinat i té solució

$$x = 1, \quad y = 1.$$

S'obté el nou sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que, òbviament, té la mateixa solució

$$x = 1, \quad y = 1.$$

I si calculem l'error quadràtic tenim que

$$\epsilon = \sqrt{(1 - 1 - 0)^2 + (1 + 1 - 2)^2} = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



4.4 Recapitulació

Quan treballem amb **components** de vectors respecte d'una **base qualsevol**, el que s'ha de fer és **determinar tots els productes escalars** entre els vectors de la base.

Exemple 4.64 Els vectors de la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ compleixen que $\|\vec{e}_1\| = 1$ i $\|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 4$. A més a més, $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ formen un **angle** de 60° , $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_3$ de 120° , i $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ són **ortogonals**.

Siguin $\vec{x}$ i $\vec{y}$ els vectors que tenen **components** $(-2, 1, 0)$ i $(8, -1, 3)$ en la base $\mathcal{B}$.

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -2$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 16$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 16$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = -16 + 4 + 12 + 16 - 16 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} \\ &= \sqrt{4 - 4 - 4 + 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{y}\| &= \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}} = \sqrt{(8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \cdot (8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)} \\ &= \sqrt{64 - 16 - 48 - 16 + 16 + 0 - 48 + 0 + 144} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\widehat{\vec{x}\vec{y}} = \arccos \frac{0}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

Observem que, en particular, $\vec{x}$ i $\vec{y}$ són **ortogonals**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

L'anterior càlcul amb **components respecte d'una base qualsevol** es pot aplicar també per a la **resta de qüestions ja vistes**.

Exemple 4.65 Veiem com es poden trobar una **base ortogonal** i una **base ortonormal** de l'espai en funció d'una base donada, fent servir les mateixes dades de l'exemple precedent.

Aplicant la **fórmula del mètode d'ortogonalització de Gram–Schmidt**, tenim:

$$\vec{w}_1 = \vec{e}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{e}_2 - \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{e}_2}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 = \vec{e}_2 - \frac{2}{1} \vec{w}_1 = -2\vec{w}_1 + \vec{e}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_3 &= \vec{e}_3 - \left(\frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{e}_3}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 + \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{e}_3}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \cdot \vec{w}_2 \right) \\ &= \vec{e}_3 - \left(\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \cdot \vec{e}_1 + \frac{(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3}{(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \right) \\ &= \vec{e}_3 - \left(\frac{-2}{1} \vec{e}_1 + \frac{4+0}{4-4-4+16} (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \right) = \vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - \frac{1}{3}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= \frac{1}{3}(8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \simeq 8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Per tant, $\{\vec{e}_1, -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, 8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3\}$ és una **base ortogonal de $\mathbb{R}^3$** .

Llavors, per ortonormalitzar-la, només queda dividir cadascun d'aquests vectors per la seva corresponent norma. Però, com que $\vec{w}_1 = \vec{e}_1$ i $\vec{w}_2$ i $\vec{w}_3$ són, precisament, els vectors $\vec{x}$ i $\vec{y}$ de l'exemple anterior, tenim que la **base ortonormal de $\mathbb{R}^3$** buscada és

$$\left\{ \vec{e}_1, \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{4\sqrt{6}}(8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 4.66 Amb les mateixes dades d'aquests darrers exemples, sigui V el **subespai vectorial generat** pels vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ que, en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ d'abans, tenen **components** respectives $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$. Veiem com es pot calcular el seu subespai ortogonal $V^\perp$.

Un vector qualsevol $\vec{x}$ de l'espai de components genèriques (x, y, z) respecte a $\mathcal{B}$ pertany a $V^\perp$ si, i només si, és **ortogonal** a cadascun dels generadors de V . Per tant, imposant que els **productes escalars** del vector $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ amb els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ **siguin 0**, s'obtenen les condicions

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) &= 0 \\(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) &= 0.\end{aligned}$$

I, fent el producte escalar terme a terme, queda

$$\left. \begin{aligned}x + 2y - 2z + 2x + 16y + 0z &= 0 \\x + 2y - 2z - 2x + 0y + 16z &= 0\end{aligned} \right\},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned}3x + 18y - 2z &= 0 \\-x + 2y + 14z &= 0\end{aligned} \right\},$$

que té solució $x = \frac{32}{3}z$ i $y = -\frac{5}{3}z$.

Per tant, $V^\perp$ està generat, per exemple, pel vector que té **components** $(32, -5, 3)$ respecte de la base $\mathcal{B}$:

$$V^\perp = \langle 32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \rangle.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 4.67 Novament, amb les mateixes dades dels exemples precedents, considerem el **vector** $\vec{x}$ que té **components** $(-5, 8, 4)$ respecte de la base $\mathcal{B}$ d'abans i el subespai V generat pels vectors de components $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$ en la mateixa base $\mathcal{B}$.

Hem trobat ja que l'ortogonal del subespai vectorial V és el subespai generat pel vector $\vec{v}$ de components $(32, -5, 3)$ respecte de la base $\mathcal{B}$. Aleshores, la **projecció ortogonal** del vector $\vec{x}$ sobre el **subespai ortogonal del subespai V** és:

$$\begin{aligned}\vec{x}'' &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \vec{v} = \frac{(32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \cdot (-5\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)}{(32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \cdot (32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)} (32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \\ &= \frac{-160 + 512 - 256 + 50 - 640 - 0 + 30 + 0 + 192}{1024 - 320 - 192 - 320 + 400 + 0 - 192 + 0 + 144} (32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \\ &= \frac{-272}{544} (32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = -\frac{1}{2} (32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3).\end{aligned}$$

En conseqüència, la **projecció ortogonal** i el **simètric** del vector $\vec{x}$ respecte del subespai vectorial V són, respectivament:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \vec{x}'' = (-5\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) - \left(-\frac{1}{2}(32\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)\right) \\ &= \frac{1}{2}(22\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3) \\ \vec{x}^* &= 2\vec{x}' - \vec{x} = 2 \cdot \frac{1}{2}(22\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3) - (-5\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) \\ &= 27\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3.\end{aligned}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 4.68 Volem trobar la recta $y = ax + b$ que “*millor aproxima*” la taula

x	-2	1	2	4	5	7
y	1	-2	2	0	3	3

Imposant que la recta passi pels punts, s’obté el sistema incompatible següent:

$$\left. \begin{array}{l} -2a + b = 1 \\ a + b = -2 \\ 2a + b = 2 \\ 4a + b = 0 \\ 5a + b = 3 \\ 7a + b = 3 \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad AX = B, \quad \text{amb} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicant la fórmula $A^t A X = A^t B$ del mètode dels mínims quadrats i operant, queda:

$$\begin{pmatrix} 99 & 17 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La solució d’aquest sistema i la recta corresponent obtinguda són

$$a = \frac{97}{305}, \quad b = \frac{81}{305} \quad \text{i} \quad y = \frac{97x + 81}{305}$$

respectivament. I l’error quadràtic és

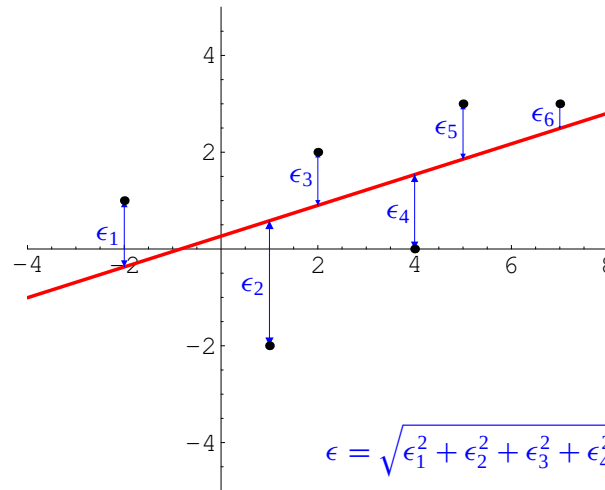
$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{\left(-\frac{113}{305} - 1\right)^2 + \left(\frac{178}{305} + 2\right)^2 + \left(\frac{55}{61} - 2\right)^2 + \left(\frac{469}{305} - 0\right)^2 + \left(\frac{566}{305} - 3\right)^2 + \left(\frac{152}{61} - 3\right)^2} \\ &= 12\sqrt{\frac{29}{305}}. \end{aligned}$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 + \epsilon_5^2 + \epsilon_6^2} = \|AX - B\|.$$

Observació 4.69 Aquest exemple és una il·lustració del que s'anomena **ajust d'una corba a un núvol de punts**. En aquest cas, la corba era una recta concretament, però es pot fer el mateix amb una paràbola, etc. Un cas com aquest molt important es dona en Estadística en considerar la **recta de regressió**.

Cal remarcar, però, que estem parlant d'**aplicacions del mètode dels mínims quadrats**, el qual ve referit sempre a un sistema d'equacions lineals qualsevol en general.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

5 Transformacions lineals

5.1 Transformacions lineals

Definició 5.1 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és una **transformació lineal** si, i només si,

(a) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ per tot $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

(b) $f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$ per tot $\alpha \in \mathbb{R}$ i tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Com a exemple genèric, tenim la **transformació lineal nul·la**

$$0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

que és la definida per

$$0(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{per tot } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

és a dir,

$$0(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) \quad \text{per tot } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proposició 5.2 *Definició explícita.*

Les **transformacions lineals** són les que consten d'**expressions lineals** en totes les components de la imatge d'un vector genèric.

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n, \dots, a_m^1 x_1 + \dots + a_m^n x_n).$$

Exemple 5.3 L'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ següent, per exemple, és **lineal**:

$$f(x, y, z) = (3x - 2y - 2z, x - 3y + 4z).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 5.4 Una transformació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és **lineal** si, i només si, **transforma combinacions lineals de vectors en combinacions lineals de les seves imatges amb els mateixos escalars**.

Proposició 5.5 En tota transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- (a) les **imatges de vectors linealment dependents** de $\mathbb{R}^n$ són **vectors linealment dependents** de $\mathbb{R}^m$.
- (b) la **imatge d'un subespai** de $\mathbb{R}^n$ és un **subespai** de $\mathbb{R}^m$ i l'**antiimatge d'un subespai** de $\mathbb{R}^m$ és un **subespai** de $\mathbb{R}^n$.
- (c) les **imatges d'un sistema de generadors d'un subespai** de $\mathbb{R}^n$ formen un **sistema de generadors del seu subespai imatge** de $\mathbb{R}^m$.

Proposició 5.6 **Definició per les imatges d'una base.**

Si coneixem les imatges dels vectors d'una base, queda determinada la imatge de qualsevol altre vector: només cal expressar-lo com a combinació lineal dels vectors de la base i, aleshores, **la seva imatge és la combinació lineal de les imatges dels vectors de la base amb els mateixos escalars**.

Exemple 5.7 La transformació lineal f anterior pot ser definida també com la que

$$\left. \begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (3, 1) \\ f(0, 1, 0) &= (-2, -3) \\ f(0, 0, 1) &= (-2, 4) \end{aligned} \right\} .$$

Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Definició 5.8 S'anomena **matriu associada** a la transformació lineal f en les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^m$ a la matriu $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$ que té per **columnes les components de les imatges dels vectors de la base $\mathcal{B}_1$ respecte de la base $\mathcal{B}_2$** .

Teorema 5.9 *Imatges i antiimatges.*

Si X és la matriu-columna de les **components d'un vector qualsevol $\vec{x}$ en una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$** , $\bar{X}$ és la matriu-columna de les **components de la seva imatge $f(\vec{x})$ en una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^m$** i A és la **matriu de la transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en aquestes bases**, llavors

$$\bar{X} = AX.$$

Exemple 5.10 Això significa que en l'exemple anterior es té que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x} = 3x - 2y - 2z \\ \bar{y} = x - 3y + 4z \end{array} \right\},$$

on (x, y, z) i $(\bar{x}, \bar{y})$ són les **components canòniques** respectives d'un vector qualsevol $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^3$ i de la seva imatge $f(\vec{x})$ en $\mathbb{R}^2$. Així, **la imatge** del vector $(1, 1, 2)$ s'obté de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

d'on $f(1, 1, 2) = (-3, 6)$, mentre que resolent el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{array} \right)_{F_2 \sim 3F_2 - F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 14 & -7 \end{array} \right),$$

obtenim que **les antiimatges** del vector $(1, -2)$ formen el conjunt

$$f^{-1}(1, -2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + 2z, y = 1 + 2z\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Teorema 5.11 *Fórmula del canvi de base general.*

Donada una transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, si $A = M_{B_1, B_2}(f)$ és la matriu de f en les bases B_1 i B_2 i $A' = M_{B'_1, B'_2}(f)$ és la matriu de f en les bases B'_1 i B'_2 , llavors

$$A' = C_2^{-1} A C_1,$$

on C_1 és la *matriu de canvi de base de B'_1 a B_1* i C_2 la de *canvi de base de B'_2 a B_2* :

$$(\mathbb{R}^n, B'_1) \xrightarrow{C_1} (\mathbb{R}^n, B_1) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^m, B_2) \xrightarrow{C_2^{-1}} (\mathbb{R}^m, B'_2)$$

$A' = C_2^{-1} A C_1$

Observació 5.12 Podem escriure també la *fórmula del canvi de base* en la forma

$$M_{B'_1, B'_2}(f) = M(B_2, B'_2) M_{B_1, B_2}(f) M(B'_1, B_1).$$

Exemple 5.13 Considerem les bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ $B'_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ i $B'_2 = \{(1, -2), (2, -1)\}$. L'esquema corresponent és

$$(\mathbb{R}^3, B'_1) \xrightarrow{C_1} (\mathbb{R}^3, B_c) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^2, B_c) \xrightarrow{C_2^{-1}} (\mathbb{R}^2, B'_2)$$

$A' = C_2^{-1} A C_1$

amb

$$C_1 = M(B'_1, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C_2 = M(B'_2, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la *matriu de la transformació lineal f anterior en les bases B'_1 i B'_2* és

$$M_{B'_1, B'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 5.14 S'anomena **nucli** d'una transformació lineal f – $\text{Nuc}(f)$ – al conjunt de vectors de $\mathbb{R}^n$ tals que **la seva imatge és el vector nul**. I s'anomena **imatge** de f – $\text{Im}(f)$ – al conjunt de vectors de $\mathbb{R}^m$ que **són imatge d'algun vector de $\mathbb{R}^n$** .

Proposició 5.15 (a) $\text{Nuc}(f)$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$ i $\text{Im}(f)$ és un subespai de $\mathbb{R}^m$.
(b) Les **imatges de sistemes de generadors** de $\mathbb{R}^n$ són **sistemes de generadors** de $\text{Im } f$.
(c) $\dim \text{Nuc}(f) + \dim \text{Im}(f) = n$.

Teorema 5.16 Sigui A la matriu de f respecte de les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^m$.
(a) $AX = 0$ formen un sistema d'**equacions implícites** de $\text{Nuc}(f)$ en la base $\mathcal{B}_1$.
(b) Les **columnes** de A són les **components** en la base $\mathcal{B}_2$ d'un **sistema de generadors** de $\text{Im}(f)$.

Definició 5.17 Donada una matriu A , s'anomena **nucli** d' A al conjunt de vectors $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tals que **$AX = 0$** , on X és la matriu-columna de $\vec{x}$.

Exemple 5.18 En la transformació lineal f anterior, les **equacions implícites del nucli** són

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases},$$

mentre que $\{(3, 1), (-2, -3), (-2, 4)\}$ és un **sistema de generadors de la imatge** de f .

Observació 5.19 Podem trobar **una base del nucli** i **equacions implícites de la imatge**. Així, $\text{Nuc}(f) = \langle (2, 2, 1) \rangle$ i $\text{Im}(f)$ no té equacions implícites, ja que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Definició 5.20 Se'n diu **rang** d'una transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a:
 $\text{rang}(f) = \dim \text{Im}(f)$.

Proposició 5.21 Si A és matriu d'una transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$:
(a) $\text{rang}(f) = \text{rang } A$.
(b) $\dim \text{Nuc}(f) = n - \text{rang}(f) = n - \text{rang } A$.

Proposició 5.22 Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformació lineal.
(a) Si f és **exhaustiva**, llavors les **imatges** dels vectors d'una **base** de $\mathbb{R}^n$ formen un **sistema de generadors** de $\mathbb{R}^m$.
(b) Si f és **injectiva**, llavors les **imatges** dels vectors d'una **base** de $\mathbb{R}^n$ formen un sistema de vectors **linealment independents** de $\mathbb{R}^m$.

Proposició 5.23 Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformació lineal.
(a) f és **exhaustiva** si, i només si, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$.
(b) f és **injectiva** si, i només si, $\text{Nuc}(f) = \{\vec{0}\}$.

Proposició 5.24 Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformació lineal.
(a) f és **exhaustiva** si, i només si, $\text{rang}(f) = m$.
(b) f és **injectiva** si, i només si, $\text{rang}(f) = n$.

Exemple 5.25 En el nostre exemple, $\text{rang}(f) = \text{rang } A = 2$ i, en conseqüència, f **no és injectiva**, però **sí exhaustiva**.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tànduri

5.2 Endomorfismes

Definició 5.26 Una transformació lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ s'anomena un **endomorfisme** de $\mathbb{R}^n$.

Un exemple genèric molt important d'endomorfisme és la **identitat**, que es defineix com l'endomorfisme

$$I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

$$I(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{per tot } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

és a dir,

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{per tot } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 5.27 Podem considerar, per exemple, l'**endomorfisme** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que compleix

$$\left. \begin{aligned} f(1, 2, -2) &= (1, 2, 3) \\ f(2, 3, -4) &= (-2, 1, -4) \\ f(2, -1, -3) &= (1, -1, 1) \end{aligned} \right\},$$

o sigui, el que té **matriu associada**

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

en les bases $\mathcal{B} = \{(1, 2, -2), (2, 3, -4), (2, -1, -3)\}$ i canònica de $\mathbb{R}^3$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 5.28 Un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és **bijectiu** si, i només si, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$ i $\text{Nuc}(f) = \{\vec{0}\}$.

Proposició 5.29 Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un endomorfisme **bijectiu**, llavors les **imatges** dels vectors d'una base de $\mathbb{R}^n$ formen **una altra base de $\mathbb{R}^n$** .

Proposició 5.30 Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és un endomorfisme, llavors f és **bijectiu** si, i només si, **rang(f) = n** .

En particular, si **A és la matriu d'un endomorfisme respecte de dues bases qualssevol**, es verifica que f és **bijectiu** si, i només si, A és **regular**.

Exemple 5.31 La matriu de l'endomorfisme de l'exemple precedent en les bases $\mathcal{B} = \{(1, 2, -2), (2, 3, -4), (2, -1, -3)\}$ i **canònica de $\mathbb{R}^3$** era

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicant el mètode de Gauss, tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 3F_1}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el **rang de la matriu és 3**, és a dir, és **regular** i, en conseqüència, l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ considerat és **bijectiu**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Definició 5.32 S'anomena **matriu associada** a un endomorfisme f en la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ a la seva matriu associada en les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Evidentment, la matriu de tot endomorfisme –encara que sigui en bases diferents– és sempre **quadrada**.

Proposició 5.33 La matriu associada a l'**endomorfisme identitat** en qualsevol base és la **matriu identitat**.

Exemple 5.34 Calculem la **matriu associada** a l'**endomorfisme** f anterior en la base $\mathcal{B}$. L'esquema corresponent és ara

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{I} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_C) \xrightarrow{C^{-1}} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$

$A' = C^{-1}AI = C^{-1}A$

amb

$$C = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conseqüència, la **matriu associada** a l'**endomorfisme** f en la base $\mathcal{B}$ és

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -56 & 19 \\ -25 & 35 & -12 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.35 *Fórmula del canvi de base per a endomorfismes.*

Considerem un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i dues bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Si $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ és la matriu de f en la base $\mathcal{B}$ i $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ és la matriu de f en la base $\mathcal{B}'$, aleshores

$$A' = C^{-1}AC,$$

on C és la *matriu de canvi de base* de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$:

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}) \xrightarrow{C^{-1}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}')$$

$A' = C^{-1}AC$

Observació 5.36 Podem escriure ara també la *fórmula del canvi de base* en la forma

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')M_{\mathcal{B}}(f)M(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Exemple 5.37 Calculem ara la *matriu en la base canònica de l'endomorfisme f* dels exemples precedents. L'esquema és ara

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \xrightarrow{C^{-1}} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c)$$

$A' = CAC^{-1}$

amb

$$C = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

I, per tant, la *matriu en la base canònica de l'endomorfisme f* , $M_{\mathcal{B}_c}(f)$, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & -56 & 19 \\ -25 & 35 & -12 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 31 & 4 & 19 \\ 16 & 3 & 10 \\ 73 & 10 & 45 \end{pmatrix}.$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 5.38 El **determinant** de qualsevol matriu associada a un endomorfisme és invariant per canvis de base.

Definició 5.39 S'anomena **determinant** d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ al **determinant**, $\det(f)$, de qualsevol de les seves matrius associades en alguna base.

Proposició 5.40 $\det(f) \neq 0$ si, i només si, $\text{rang}(f) = n$, és a dir, si és **bijectiu** i, per tant, **transforma bases de $\mathbb{R}^n$ en bases de $\mathbb{R}^n$** .

Definició 5.41 Els endomorfismes amb **determinant positiu** s'anomenen **directes**; i els de **determinant negatiu**, **inversos**.

Proposició 5.42 (a) Un endomorfisme és **directe** si, i només si, **conserva l'orientació de les bases**, és a dir, si **transforma bases positives en bases positives i negatives en negatives**.

(b) Un endomorfisme és **invers** si, i només si, **canvia l'orientació de les bases**, és a dir, si **transforma bases positives en negatives i viceversa**.

Exemple 5.43 En l'exemple anterior, el **determinant** de l'endomorfisme f és

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 31 & 4 & 19 \\ 16 & 3 & 10 \\ 73 & 10 & 45 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_1 \sim 3F_1 - 4F_2 \\ F_3 \sim 3F_3 - 10F_2 \end{matrix} = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 29 & 0 & 17 \\ 16 & 3 & 10 \\ 59 & 0 & 35 \end{vmatrix} = \frac{3}{9} \begin{vmatrix} 29 & 17 \\ 59 & 35 \end{vmatrix} = 4.$$

Per tant, l'endomorfisme f és **directe**, ja que $\det(f) > 0$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 5.44 S'anomena **polinomi característic** d' A a $p(x) = \det(A - xI)$.

Proposició 5.45 El **polinomi característic** de qualsevol matriu associada a un endomorfisme és **invariant per canvis de base** i

$$p(x) = (-1)^n (x^n - \text{tr}_1(A)x^{n-1} + \text{tr}_2(A)x^{n-2} + \dots + (-1)^n \det(A)).$$

Definició 5.46 S'anomena **polinomi característic** d'un endomorfisme f al **polinomi característic** de qualsevol de les seves matrius associades en alguna base.

Proposició 5.47 Les **traces de qualsevol matriu associada** a un endomorfisme **no canvien en fer un canvi de base**.

Definició 5.48 S'anomena **traça d'ordre k** d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$, $\text{tr}_k(f)$, a la **traça d'ordre k** de qualsevol de les seves matrius associades en alguna base. En particular, la **traça d'ordre 1** se'n diu **traça** de f , $\text{tr}(f)$.

Exemple 5.49 En el cas de l'endomorfisme f dels exemples precedents, si considerem la seva **matriu associada en la base canònica**, tenim que la seva **traça d'ordre 2** és

$$\text{tr}_2(f) = \begin{vmatrix} 31 & 4 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 31 & 19 \\ 73 & 45 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 45 \end{vmatrix} = 29 + 8 + 35 = 72.$$

Anàlogament, la seva **traça d'ordre 1** o **traça** és

$$\text{tr}(f) = 31 + 3 + 45 = 79.$$

I, per tant, com que hem vist abans que $\det(f) = 4$, el **polinomi característic** de f és

$$p(x) = -x^3 + 79x^2 - 72x + 4.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

5.3 Diagonalització

Sigui f un endomorfisme que, en certa base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, té matriu associada A . Volem trobar alguna **base adequada** $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ en la que la matriu de f sigui **diagonal**:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Caldrà, doncs, que $f(\vec{e}'_i) = \lambda_i \vec{e}'_i$ per a $i = 1, 2, \dots, n$.

Definició 5.50 $\lambda \in \mathbb{R}$ és un **valor propi** de f si $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ per algun $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Proposició 5.51 Els **valors propis** són les **arrels del polinomi característic**.

De cada valor propi cal destacar la seva **multiplicitat** m_λ com a arrel del característic. Si $m_\lambda = 1$, direm que és **simple**; i, en cas contrari, **múltiple** (**doble** si $m_\lambda = 2$, etc).

Exemple 5.52 Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que en la base canònica té matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

El seu **polinomi característic** és

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & -4 & 6 \\ -1 & 3-x & -6 \\ -1 & 4 & -7-x \end{vmatrix} = -x^3 - 4x^2 - 5x - 2 = -(x+1)^2(x+2).$$

Per tant, els **valors propis de f** són $\lambda_1 = -1$, que és **doble**, i $\lambda_2 = -2$, que és **simple**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Definició 5.53 $\vec{x} \neq \vec{0}$ és un **vector propi** de f si $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposició 5.54 (a) Cada vector propi $\vec{x} \neq \vec{0}$ està associat a un **únic valor propi**.
 (b) Vectors propis de valors propis **diferents** són **linealment independents**.

Per la primera d'aquestes propietats, es parla de **vector propi de valor propi λ** .

Proposició 5.55 $\text{Nuc}(A - \lambda I)$ és el conjunt de tots els **vectors propis amb valor propi λ** afegint-hi el vector nul.

Definició 5.56 $V_\lambda = \text{Nuc}(A - \lambda I)$ se'n diu **subespai propi** de valor propi λ .

Proposició 5.57 (a) Si λ té multiplicitat m_λ i $d_\lambda = \dim V_\lambda$, llavors $1 \leq d_\lambda \leq m_\lambda$.
 (b) En particular, si el valor propi és **simple**, aleshores $d_\lambda = m_\lambda = 1$.

Exemple 5.58 Els **subespais propis** $V_{-1} = \text{Nuc}(A + I)$ i $V_{-2} = \text{Nuc}(A + 2I)$ de l'exemple d'abans venen donats per

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right) \text{ i } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \sim 2F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 + F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right),$$

i són, doncs, respectivament,

$$\left. \begin{array}{l} V_{-1} : x - 4y + 6z = 0 \\ V_{-2} : \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \end{array} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 5.59 Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ és **diagonalitzable** si, i només si, existeix una base en la que la seva matriu associada és **diagonal**.

Teorema 5.60 *Primera condició suficient de diagonalització.*

*Si un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ té n valors propis diferents –és a dir, si tots els valors propis són **simples**–, aleshores és **diagonalitzable**.*

Definició 5.61 Es diu que una matriu quadrada A és **diagonalitzable** si, i només si, existeix una matriu regular C tal que $D = C^{-1}AC$ és una **matriu diagonal**.

Proposició 5.62 *Si A és la matriu d'un endomorfisme f en certa base, es verifica que f és **diagonalitzable** si, i només si, A és **diagonalitzable**.*

En conseqüència, les **diagonalitzacions d'endomorfismes i de matrius** són anàlogues.

Teorema 5.63 *Segona condició suficient de diagonalització.*

*Tota matriu **simètrica** és **diagonalitzable**.*

Exemple 5.64 En el nostre exemple, és clar que la matriu **no és simètrica** i, per tant, **no podem aplicar la segona condició suficient de diagonalització**.

Però, a més a més, hem vist que **hi havia un valor propi doble** i, en conseqüència, **tampoc no podem aplicar la primera condició suficient de diagonalització**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Teorema 5.65 *Condició necessària i suficient de diagonalització.*

Un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ és **diagonalitzable** si, i només si,

(a) El polinomi característic es descompon totalment en factors lineals —és a dir, té totes les arrels reals—:

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}.$$

(b) La **multiplicitat** de tots els valors propis és igual a la **dimensió** del seu subespai propi corresponent:

$$m_{\lambda_i} = d_{\lambda_i},$$

per a tot $i = 1, 2, \dots, k$.

Observem que la segona condició **només cal comprovar-la pels valors propis múltiples**, ja que es verifica automàticament pels simples.

Exemple 5.66 En el nostre exemple, tenim que el **polinomi característic descomposa en factors lineals** i, a més, per l'únic valor propi múltiple —que és $\lambda = -1$ — es verifica que

$$d_{-1} = \dim \text{Nuc}(f + I) = 3 - 1 = 2 = m_{-1}.$$

En conseqüència, això significa que l'endomorfisme f considerat en el nostre exemple és **diagonalitzable**.

Queda, doncs, només, **diagonalitzar-lo**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 5.67 *Diagonalització d'endomorfismes i matrius diagonalitzables.*

Si un endomorfisme f de $\mathbb{R}^n$ és **diagonalitzable**, aleshores:

- (a) La **matriu diagonal** D té els **valors propis** a la diagonal principal, escrits tantes vegades com indiqui la seva multiplicitat.
- (b) La **base de vectors propis** s'obté **reunint bases** de cada subespai propi.
- (c) La **matriu del canvi de base** C –que s'obté escrivint en columna les components dels vectors nous en funció dels vells **en el mateix ordre** que els corresponents valors propis a D – verifica que

$$D = C^{-1}AC, \quad AC = CD \quad i \quad A = CDC^{-1}.$$

Exemple 5.68 En primer lloc, com que els valors propis eren el **-1 (doble)** i el **-2 (simple)**, tenim que la **matriu diagonal** és

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, resolent els sistemes de les equacions implícites dels subespais propis, es veu fàcilment que $V_{-1} = \text{Nuc}(A + I) = \langle (4, 1, 0), (-6, 0, 1) \rangle$ i $V_{-2} = \text{Nuc}(A + 2I) = \langle (-1, 1, 1) \rangle$ i, per tant, **una base de vectors propis** és

$$B = \{(4, 1, 0), (-6, 0, 1), (-1, 1, 1)\}.$$

Finalment, la **matriu del canvi de base** corresponent és

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i és fàcil comprovar, per exemple, que es verifica que **$AC = CD$** .



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 5.69 Potències d'una matriu diagonalitzable.

Si A és **diagonalitzable** amb **matriu diagonal** D i **matriu de canvi de base** C , aleshores

$$A^k = C D^k C^{-1}$$

per a cada $k \in \mathbb{N}$, on

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.70 En el cas d'abans tenim que, per a cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & & \\ & (-1)^k & \\ & & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1)^k & -6 \cdot (-1)^k & -(-2)^k \\ (-1)^k & 0 & (-2)^k \\ 0 & (-1)^k & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^k - (-2)^k & -4 \cdot (-1)^k + 4 \cdot (-2)^k & 6 \cdot (-1)^k - 6 \cdot (-2)^k \\ -(-1)^k + (-2)^k & 5 \cdot (-1)^k - 4 \cdot (-2)^k & -6 \cdot (-1)^k + 6 \cdot (-2)^k \\ -(-1)^k + (-2)^k & 4 \cdot (-1)^k - 4 \cdot (-2)^k & -5 \cdot (-1)^k + 6 \cdot (-2)^k \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} + (-2)^k \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & -4 & 6 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

5.4 Recapitulació

Exemple 5.71 Siguin $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$ i considerem la transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= 2\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 \\ f(\vec{e}_2) &= -4\vec{e}'_1 + 9\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3 \\ f(\vec{e}_3) &= 6\vec{e}'_1 - 12\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \end{aligned} \right\}.$$

La matriu de f en les bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ és

$$A' = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, per trobar la imatge del vector $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ fem

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d'on

$$f(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 4\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3,$$

mentre que l'antiimatge del vector $4\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3$ s'obté resolent el sistema lineal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 4 \\ -3 & 9 & -12 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)_{F_2 \sim 2F_2 + 3F_1} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right),$$

que té solució $x = 4 - z$ i $y = 1 + z$ i, en conseqüència,

$$f^{-1}(4\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3) = \{(4 - z)\vec{e}_1 + (1 + z)\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad \text{amb } z \in \mathbb{R}\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 5.72 Amb les mateixes dades de l'exemple anterior, anem a calcular ara **simultàniament bases i equacions implícites del nucli** i de la **imatge** de f en termes de les bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ respectivament.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array} \right) \underset{F_2 \sim 2F_2 + 3F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x' \\ 3x' + 2y' \\ z' \end{array} \right) \underset{F_3 \sim 6F_3 + F_2}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} x' \\ 3x' + 2y' \\ 3x' + 2y' + 6z' \end{array} \right).$$

Aleshores, del sistema lineal homogeni format per la matriu del sistema i la primera de les columnes del final –la dels zeros–, es dedueix que les **equacions implícites del nucli respecte de la base $\mathcal{B}$** són

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

És clar que la solució d'aquest sistema és $x = -z$, $y = z$ i, com que una de les solucions és $x = -1$, $y = 1$ i $z = 1$, es dedueix que una **base del nucli** és

$$\{-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}.$$

Finalment, de la triangulació de la matriu del sistema es té que una **base de la imatge** és

$$\{2\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2, -4\vec{e}'_1 + 9\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3\}.$$

I de la matriu del sistema i de la darrera de les columnes obtenim que l'**equació implícita de la imatge respecte de la base $\mathcal{B}'$** és

$$3x' + 2y' + 6z' = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 5.73 Suposem ara que, amb les dades dels exemples precedents, es verifica, a més a més, que

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_3 \end{aligned} \right\}.$$

Veiem quina és la matriu de f en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Considerem l'esquema corresponent, que ara és

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{I} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{A'} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$

$A = CA'I = CA'$

on la matriu de f en les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ és

$$A' = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i les **matrius de canvi de base** són

$$C = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la **matriu de f en la base $\mathcal{B}$** és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 9 & -12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Todorí

Exemple 5.74 Considerem ara una nova base $\mathcal{B}'' = \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$. Volem calcular la matriu de f en aquesta nova base.

Ara l'esquema corresponent és

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'') \xrightarrow{C} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \xrightarrow{C^{-1}} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'')$$

$A'' = C^{-1}AC$

on la matriu de f en la base $\mathcal{B}$ és la d'abans

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

i la **matriu de canvi de base** de la base $\mathcal{B}''$ a la base $\mathcal{B}$ és

$$C = M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la **matriu de f en la base $\mathcal{B}''$** és

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ -3 & 9 & 2 \\ 9 & -21 & -4 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Exemple 5.75 Anem a analitzar si l'endomorfisme f definit anteriorment és o no diagonalitzable.

Cal partir, doncs, de la seva matriu associada en una certa base. Anteriorment, hem trobat aquesta matriu respecte de dues bases diferents $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}''$. Agafant, per exemple, la corresponent a la base $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$p(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & -4 & 6 \\ -1 & 5-x & -6 \\ -1 & 4 & -5-x \end{vmatrix} = -x(x-1)^2.$$

Per tant, els valors propis de f són $\lambda_1 = 0$, que és simple, i $\lambda_2 = 1$, que és doble. Cal, doncs, analitzar si per a aquest últim –que és l'únic múltiple– la seva multiplicitat és també 2.

Però les equacions implícites de $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$ corresponen al sistema lineal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right).$$

I com que, evidentment, $d_1 = \dim \text{Nuc}(A - I) = 3 - \text{rang}(A - I) = 3 - 1 = 2 = m_1$, es dedueix que, efectivament, l'endomorfisme f és diagonalitza.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 5.76 Finalment, **diagonalitzarem** el nostre endomorfisme f .

D'una banda, cal trobar una base de $V_0 = \text{Nuc}(A - 0I) = \text{Nuc}(A)$. Però això ja ho havíem fet –i, a més a més, respecte de la base $\mathcal{B}$ – i havíem obtingut que

$$V_0 = \text{Nuc}(A) = \text{Nuc}(f) = \langle -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle.$$

D'una altra banda, en analitzar la diagonalització de f , havíem trobat que les equacions implícites de $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$ corresponien al sistema lineal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 4 & -6 & 0 \end{array} \right),$$

la solució del qual és òbviament $x = 4y - 6z$. Aleshores, una base de V_1 està formada pels **vectors de components** $(4, 1, 0)$ i $(-6, 0, 1)$ respecte de la base $\mathcal{B}$. Per tant:

$$V_1 = \text{Nuc}(A - I) = \langle 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -6\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \rangle.$$

En conseqüència, la **base de vectors propis** és

$$\{-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -6\vec{e}_1 + \vec{e}_3\},$$

la matriu **diagonal** i la de **canvi de base** són

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivament i es té, doncs, que

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 5 & -6 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

6 Transformacions lineals de l'espai vectorial euclidià

6.1 Endomorfismes simètrics i diagonalització ortogonal

Definició 6.1 Un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és **simètric** si, i només si,

$$f(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot f(\vec{y})$$

per a qualssevol $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Proposició 6.2 Si $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$, aleshores un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és **simètric** si, i només si,

$$f(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot f(\vec{e}_j)$$

per a tot $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Proposició 6.3 Sigui A la matriu d'un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ respecte d'una **base ortonormal** qualsevol. Aleshores:

f és simètric si, i només si, A és simètrica.

Exemple 6.4 L'endomorfisme que en la base canònica —que és **ortonormal**— té matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és **simètric** per ser A **simètrica**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

El resultat següent es dedueix de la darrera proposició i la **segona condició suficient de diagonalització**.

Proposició 6.5 Els **endomorfismes simètrics** són **diagonalitzables**.

Exemple 6.6 **Diagonalitzem** l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit en l'exemple anterior.

El seu **polinomi característic** és

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-x & 4-x & 4-x \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \\
 &= (4-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (4-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (4-x)(1-x)^2
 \end{aligned}$$

i els valors propis són, doncs, **1 (doble)** i **4 (simple)**. A més, els subespais propis obtinguts són $\text{Nuc}(A - I) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$ i $\text{Nuc}(A - 4I) = \langle (1, 1, 1) \rangle$. En conseqüència,

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

és una **base de vectors propis** i les **matrius de canvi de base i diagonal** són

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

respectivament i es té, doncs, que

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Proposició 6.7 *Vectors propis corresponents a valors propis diferents d'un endomorfisme simètric són ortogonals.*

Com que es pot considerar que una matriu representa un endomorfisme en una base qualsevol, podem agafar una ortonormal —per exemple, la canònica— i “transportar” els resultats anteriors.

Proposició 6.8 *Vectors propis corresponents a valors propis diferents d'una matriu simètrica són ortogonals.*

Exemple 6.9 Observem que, efectivament, en l'endomorfisme anterior que en la base canònica tenia matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

els vectors propis $(1, 0, -1)$ i $(0, 1, -1)$ —que són de valor propi 1— són ortogonals al vector propi $(1, 1, 1)$ —que és de valor propi 4—.

Observació 6.10 En general, és important remarcar que en diagonalitzar qualsevol matriu simètrica —encara que no representi la matriu d'un endomorfisme simètric respecte d'una base ortonormal—, s'ha de verificar la propietat anterior i, per tant, els vectors propis obtinguts per diferents valors propis han de ser forçosament ortogonals.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Todorí

Com que els vectors propis de valor propi diferent són **ortogonals**, només cal **ortogonalitzar** les bases de cada subespai propi per a obtenir una **base ortogonal** de vectors propis.

Proposició 6.11 Un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ admet una **base ortogonal de vectors propis** si, i només si, és **simètric**.

Proposició 6.12 Una matriu quadrada admet una **base ortogonal de vectors propis** si, i només si, és **simètrica**.

Exemple 6.13 En el nostre exemple, només cal aplicar Gram-Schmidt a $\text{Nuc}(f - I)$, ja que $\dim \text{Nuc}(f - 4I) = 1$. Tenim:

$$\vec{w}_1 = (1, 0, -1)$$

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (0, 1, -1) - \frac{(0,1,-1) \cdot (1,0,-1)}{(1,0,-1) \cdot (1,0,-1)} \cdot (1, 0, -1) = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) \\ &= \frac{1}{2}(-1, 2, -1) \simeq (-1, 2, -1).\end{aligned}$$

Per tant, $\{(1, 0, -1), (-1, 2, -1), (1, 1, 1)\}$ és una **base ortogonal de vectors propis**.

Observació 6.14 Cal observar que la nova matriu de canvi de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica ara que $P^t P$ és una matriu **diagonal**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Pàgina 127 de 194

Definició 6.15 Es diu que un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **diagonalitza en base ortonormal** o que és **ortogonalment diagonalitzable** si, i només si, admet una base ortonormal de vectors propis.

Teorema 6.16 *Teorema espectral.*

Un endomorfisme és **ortogonalment diagonalitzable** si, i només si, és **simètric**.

Definició 6.17 Es diu que una matriu quadrada A és **ortogonalment diagonalitzable** o que **diagonalitza en base ortonormal** si, i només si, existeix una matriu ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP = P^tAP$.

Teorema 6.18 *Teorema espectral generalitzat.*

Una matriu quadrada és **ortogonalment diagonalitzable** si, i només si, és **simètrica**.

Exemple 6.19 Per tant, com que hem vist ja que l'endomorfisme dels exemples precedents que en la base canònica té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

és **simètric**, es dedueix que és **ortogonalment diagonalitzable**. I, en particular, ho és també la matriu simètrica A .



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Teorema 6.20 *Diagonalització ortogonal de matrius i endomorfismes simètrics.*

- (a) La **matriu diagonal** s'obté com en la **diagonalització ordinària**: escrivint els **valors propis** en la diagonal principal tantes vegades com indiqui la seva multiplicitat.
- (b) La **base ortonormal de vectors propis** s'obté **reunint bases ortonormals dels subespais propis**.
- (c) La **matriu del canvi de base** P és **ortogonal**, és a dir,

$P^t P = I$ o $P^{-1} = P^t$,
 i verifica que

$$D = P^{-1}AP = P^tAP \quad i \quad A = PDP^{-1} = PDP^t.$$

Exemple 6.21 En l'exemple anterior, una **base ortonormal de vectors propis** és ara

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\},$$

la corresponent **matriu ortogonal de canvi de base** és

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

i es verifica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

6.2 Projectcions ortogonals, simetries i rotacions

Definició 6.22 S'anomena **projectió ortogonal** sobre un subespai V de $\mathbb{R}^n$ a l'aplicació $P_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ li associa la seva **projectió ortogonal** sobre V :

$$P_V(\vec{x}) = \vec{x}'.$$

Si $V = \mathbb{R}^n$ s'obté la **identitat** ($P_V = I$); i si $V = \{\vec{0}\}$, l'**endomorfisme nul** ($P_V = 0$). Si $V \neq \mathbb{R}^n, \{\vec{0}\}$ se'n diu **estricta** (**axial** si V és una **recta**, **plana** si V és un **pla**,...).

Teorema 6.23 *Diagonalització ordinària i ortogonal d'una projectió ortogonal.*

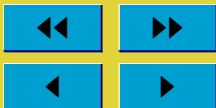
(a) Les **projectcions ortogonals** són **endomorfismes simètrics**.

(b) Els **subespais propis** de P_V són $V_1 = V$ i $V_0 = V^\perp$. Per tant, si $\dim V = k$, la **matriu diagonal** en la base —o base ortonormal— de **vectors propis** obtinguda **reunint bases** —o bases ortonormals respectivament— de V i $V^\perp$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.24 Si $V = \langle (1, 1, 1) \rangle$, com que $V^\perp = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$, la **matriu diagonal** de P_V en la base de vectors propis $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir

Proposició 6.25 (a) $\text{Nuc}(P_V) = V^\perp$ i $\text{Im}(P_V) = V$.

(b) $P_V(P_V(\vec{x})) = P_V(\vec{x})$, per tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) $P_V(\vec{x}) + P_{V^\perp}(\vec{x}) = \vec{x}$, per tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposició 6.26 Si A' i A'' són les matrius de P_V i $P_{V^\perp}$ en la mateixa base, llavors:

(a) $A'^2 = A'$.

(b) $A' + A'' = I$.

A partir de la matriu de diagonalització d'una projecció ortogonal es pot trobar la seva matriu en una altra base qualsevol mitjançant un canvi de base.

Exemple 6.27 La imatge de la projecció ortogonal anterior és $V = \langle (1, 1, 1) \rangle$, mentre que el nucli és $V^\perp = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$. I, mitjançant el canvi de base següent,

$$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c)$$

amb $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $M_{\mathcal{B}'}(P_V) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

obtenim que la matriu de la projecció ortogonal axial P_V en la base canònica és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observació 6.28 A' és simètrica, com correspon a la matriu d'un endomorfisme simètric en una base ortonormal —la canònica en aquest cas—. I, efectivament, $A'^2 = A'$.



Definició 6.29 S'anomena **simetria** respecte d'un subespai V de $\mathbb{R}^n$ a l'aplicació $S_V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ li associa el seu **simètric** respecte de V :

$$S_V(\vec{x}) = \vec{x}^*.$$

Si $V = \mathbb{R}^n$ és la **identitat** ($S_V = I$); i si $V = \{\vec{0}\}$ queda **menys la identitat** ($S_V = -I$).
Si $V \neq \mathbb{R}^n, \{\vec{0}\}$ se'n diu **estricta** (**axial** si V és una **recta**, **plana** si V és un **pla**,...).

Teorema 6.30 *Diagonalització ordinària i ortogonal d'una simetria.*

(a) Les **simetries** són **endomorfismes simètrics**.

(b) Els **subespais propis** de S_V són $V_1 = V$ i $V_{-1} = V^\perp$. Per tant, si $\dim V = k$, la **matriu diagonal** en la base —o **base ortonormal**— de **vectors propis** obtinguda **reunint bases** —o **bases ortonormals** respectivament— de V i $V^\perp$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.31 Si $V = \langle (1, 1, 1) \rangle$, aplicant el mètode de Gram-Schmidt a la base $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ de $V^\perp$ i normalitzant, es té que la **matriu diagonal** de S_V en la base ortonormal de vectors propis $\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \right\}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Proposició 6.32 (a) Les *simetries* són endomorfismes *bijectius*.

(b) $S_V(S_V(\vec{x})) = \vec{x}$, per tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) $S_V(\vec{x}) = 2P_V(\vec{x}) - \vec{x}$, per tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposició 6.33 Si A' i A^* són les *matrius* de P_V i S_V en la mateixa base, llavors:

(a) $A^{*2} = I$.

(b) $A^* = 2A' - I$.

Anàlogament al cas d'una projecció ortogonal, a partir de la *matriu de diagonalització d'una simetria* es pot trobar també la seva *matriu en una altra base* qualsevol mitjançant un *canvi de base*.

Exemple 6.34 Calculem la *matriu en la base canònica* de la *simetria axial* respecte del subespai $V = \langle (1, 1, 1) \rangle$ anterior.

Aprofitant ara la *matriu de la projecció ortogonal en la base canònica* calculada en un exemple anterior, tenim que

$$A^* = 2A' - I = 2 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observació 6.35 També en aquest exemple la matriu A^* és *simètrica*, ja que torna a ser la matriu d'un *endomorfisme simètric en una base ortonormal* —la canònica una altra vegada—. I, anàlogament, es verifica també que $A^{*2} = I$.



Imprimir

Tancar

Sortir

Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2}\}$ un sistema ortonormal de $\mathbb{R}^n$ i $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2} \rangle$.

Definició 6.36 La **rotació** $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'angle α al voltant de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2}$ és:

$$R(\vec{x}) = \vec{x}' + (\cos \alpha) \vec{x}'' + (\sin \alpha) \vec{x}''^\perp, \text{ per tot } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

on $\vec{x}'$ i $\vec{x}''$ són les projeccions ortogonals respectives de $\vec{x}$ sobre V i $V^\perp$, $\vec{x}''^\perp \in V^\perp$ és ortogonal a $\vec{x}''$ i d'igual norma i la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2}, \vec{x}'', \vec{x}''^\perp\}$ és positiva.

Si $\alpha = 0$ és I ; i si $\alpha = \pi$, una simetria respecte de V . Si $\alpha \neq 0, \pi$ se'n diu **estRICTA**.

Definició 6.37 La **composició** $C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de rotació R d'angle α al voltant de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2}$ i simetria plana $S_{V^\perp}$ de pla ortogonal $V^\perp$ és:

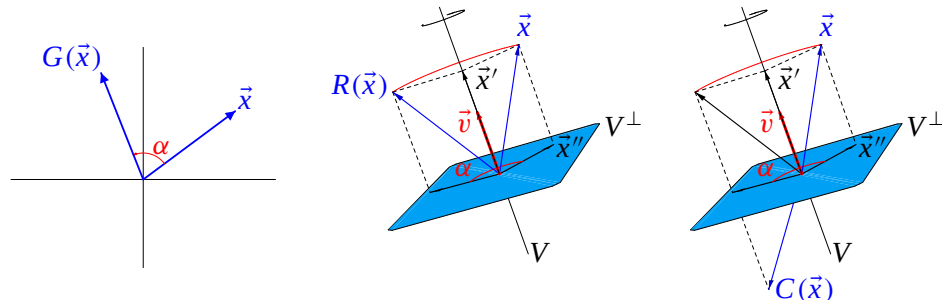
$$C(\vec{x}) = S_{V^\perp}(R(\vec{x})), \text{ per tot } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\alpha = 0$ és una simetria respecte de $V^\perp$; i si $\alpha = \pi$, $-I$. Si $\alpha \neq 0, \pi$ se'n diu **estRICTA**.

Proposició 6.38 (a) Les **rotacions** i les **composicions** són endomorfismes **bijectius**.

(b) $C(\vec{x}) = R(S_{V^\perp}(\vec{x}))$, per tot $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

A $\mathbb{R}^2$ és $V = \{\vec{0}\}$, les **rotacions** i **composicions** són iguals i en diem **girs** G d'angle α . I a $\mathbb{R}^3$ hi ha un **únic vector** $\vec{v}$ que, per comoditat, se sol donar **sense normalitzar**.





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Teorema 6.39 (a) Els subespais propis respectius de R i C són $V_1 = V$ i $V_{-1} = V$.
 (b) En tota base ortonormal positiva $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ obtinguda afegint una base ortonormal $\{\vec{v}_{n-1}, \vec{v}_n\}$ de $V^\perp$ a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-2}$, les matrius respectives de R i C són

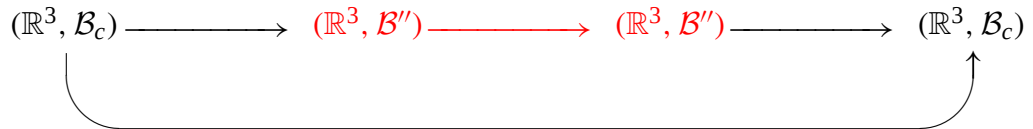
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (n-2) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & & & & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (n-2) & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & & & & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant, mitjançant canvis de base, es pot trobar també la matriu en una base qualsevol.

Exemple 6.40 La matriu de la rotació d'angle $\frac{4\pi}{3}$ al voltant de $(1, 1, 1)$ en la base ortonormal positiva $\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \right\}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aleshores, a partir de l'esquema de canvi de base següent



on la matriu de canvi de base de la base $\mathcal{B}''$ a la base canònica $\mathcal{B}_c$ és ortogonal perquè les dues bases són ortonormals, es té que la seva matriu en la base canònica és

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

6.3 Isometries lineals

Definició 6.41 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una **isometria lineal** si, i només si, **conserva els productes escalars**:

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \text{per tot } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

La **identitat** I i **menys la identitat** $-I$ són **isometries**. Les altres se'n diuen **estRICTES**.

Proposició 6.42 *Determinació.*

(a) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una **isometria** si, i només si, **conserva els productes escalars dels vectors d'una base** $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ qualsevol:

$$f(\vec{e}_i) \cdot f(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad \text{per a tot } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

(b) En particular, ho és si **transforma una base ortonormal en una altra ortonormal**.

Proposició 6.43 (a) Les **isometries** són **endomorfismes bijectius**.

(b) Sigui A la matriu d'un endomorfisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en una **base ortonormal**.

f és una isometria si, i només si, A és ortogonal.

Exemple 6.44 L'**endomorfisme** que en la **base canònica** —que és **ortonormal**— té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

és una **isometria**, perquè

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 6.45 Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una **isometria**. Llavors:

- (a) f **conserva les normes** dels vectors.
- (b) f **conserva els angles no orientats** entre vectors.
- (c) f **conserva l'ortogonalitat** de vectors.
- (d) Si V és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$, aleshores $f(V^\perp) = [f(V)]^\perp$.
- (e) Si V i W són subespais **ortogonals**, llavors $f(V)$ i $f(W)$ són també **ortogonals**.

Per tant, si tenim les **equacions implícites** d'un subespai respecte d'una **base ortonormal**, podem aprofitar el fet que els seus coeficients són **components de vectors ortogonals al subespai respecte d'aquesta mateixa base** per calcular la **imatge del subespai**.

Exemple 6.46 Calculem la **imatge del pla d'equació $x = 0$** per la **isometria f** donada per la **matriu en base canònica** anterior

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En primer lloc, l'**ortogonal d'aquest pla** és la recta generada pel vector **$(1, 0, 0)$** :

$$\langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Aleshores, com que la **imatge d'aquest vector** és el vector

$$f(1, 0, 0) = (0, -1, 0),$$

tenim que l'**ortogonal del pla imatge** és la recta generada pel vector **$(0, -1, 0)$** :

$$\langle (0, -1, 0) \rangle.$$

Aleshores, la **imatge del pla d'equació $x = 0$** és el **pla d'equació $-y = 0$** , és a dir,

$$y = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 6.47 El *determinant* d'una isometria és sempre igual a **1** o **-1**.

Per tant, les de **determinant 1** són les **directes**; i les de **determinant -1**, les **inverses**.

Proposició 6.48 Les isometries **directes** de $\mathbb{R}^3$ **conserven el producte vectorial**, mentre que les **inverses** el **transformen en el seu oposat**.

Proposició 6.49 Si A és la matriu d'una isometria $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ respecte d'una **base ortonormal** qualsevol, aleshores:

- (a) f és **isometria directa** si i, només si, A és **ortogonal directa**.
- (b) f és **isometria inversa** si i, només si, A és **ortogonal inversa**.

Recordem que les matrius ortogonals **directes** són les que tenen determinant igual a **1** i les **inverses**, les de determinant igual a **-1**.

Proposició 6.50 El *polinomi característic* d'una **isometria** és del tipus

$$p(x) = (x - 1)^r (x + 1)^s (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{t_k},$$

on els **factors quadràtics** tenen **arrels complexes conjugades de mòdul 1**.

Exemple 6.51 La **isometria** f anterior és **inversa**, ja que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 6.52 Les *simetries*, les *rotacions* i les *composicions* són *isometries*.

Suposant que els endomorfismes següents són tots **estrictes**, s'obté el quadre següent:

	Endomorfismes simètrics	Isometries lineals
Projeccions ortogonals	SI	NO
Simetries	SI	SI
Rotacions	NO	SI
Composicions	NO	SI

En particular, podem descriure les **isometries** de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ introduïdes fins al moment. Fent servir les diferents "**matrius reduïdes**" obtingudes per cadascuna d'elles i suposant $\alpha \neq 0, \pi$ per evitar duplicitats, tenim:

$$\mathbb{R}^2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

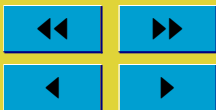
identitat menys identitat simetries axials girs estrictes

$$\mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

identitat simetries axials rotacions estrictes

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

menys identitat simetries planes composicions estrictes



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Les matrius de I i $-I$ en qualsevol base són **identitat** i **menys identitat**, respectivament. Per a les **isometries estrictes** de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, es pot determinar el seu **tipus** de dues formes: a partir de la seva **matriu en qualsevol base** o de la seva **matriu en una base ortonormal**.

Teorema 6.53 *Classificació d'isometries estrictes de $\mathbb{R}^2$: tipus.*

Sigui f una isometria estricta de $\mathbb{R}^2$ i $A \neq I, -I$ la seva matriu en una base $\mathcal{B}$.

<i>Polinomi característic de A</i>	<i>A matriu en base $\mathcal{B}$ ortonormal</i>	<i>Tipus</i>
$(x - 1)(x + 1)$	$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ (amb $a^2 + b^2 = 1$)	<i>Simetria axial</i>
$x^2 + px + q$	$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (amb $a^2 + b^2 = 1$)	<i>Gir estricte</i>

Teorema 6.54 *Classificació d'isometries estrictes de $\mathbb{R}^3$: tipus.*

Sigui f una isometria estricta de $\mathbb{R}^3$ i $A \neq I, -I$ la seva matriu en una base $\mathcal{B}$.

<i>Polinomi característic de A</i>	<i>A matriu en base $\mathcal{B}$ ortonormal</i>	<i>Tipus</i>
$(x - 1)(x + 1)^2$	<i>Simètrica i directa</i>	<i>Simetria axial</i>
$(x - 1)^2(x + 1)$	<i>Simètrica i inversa</i>	<i>Simetria plana</i>
$(x - 1)(x^2 + px + q)$	<i>No simètrica i directa</i>	<i>Rotació estricta</i>
$(x + 1)(x^2 + px + q)$	<i>No simètrica i inversa</i>	<i>Composició estricta</i>

Exemple 6.55 La isometria anterior és una **composició de rotació estricta i simetria plana**, perquè en base canònica —que és **ortonormal**— té matriu **no simètrica i inversa**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

A més del **tipus**, calen també els **elements característics** que defineixen la **isometria**.

Teorema 6.56 *Classificació d'isometries estrictes de $\mathbb{R}^2$: elements característics.*
Sigui f una **isometria estricta** de $\mathbb{R}^2$ i t la traça de la seva matriu A en una base $\mathcal{B}$.

Tipus	Elements característics
Simetria axial	Eix de simetria: $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$
Gir estricte	Angle: $\cos \alpha = \frac{t}{2}$ i $\sin \alpha$ d'igual signe que $\{\vec{x}, f(\vec{x})\}$ (on $\vec{x} \neq 0$)

Teorema 6.57 *Classificació d'isometries estrictes de $\mathbb{R}^3$: elements característics.*
Sigui f una **isometria estricta** de $\mathbb{R}^3$ i t la traça de la seva matriu A en una base $\mathcal{B}$.

Tipus	Elements característics
Simetria axial	Eix de simetria: $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$
Simetria plana	Pla de simetria: $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$
Rotació estricta	Vector de gir: $\vec{v} \in V_1 - \{\vec{0}\} = \text{Nuc}(A - I) - \{\vec{0}\}$ Angle: $\cos \alpha = \frac{t-1}{2}$ i $\sin \alpha$ d'igual signe que $\{\vec{v}, \vec{x}, f(\vec{x})\}$ (on $\vec{x} \notin \langle \vec{v} \rangle$)
Composició de rotació estricta i simetria plana	Vector de gir: $\vec{v} \in V_{-1} - \{\vec{0}\} = \text{Nuc}(A + I) - \{\vec{0}\}$ Angle: $\cos \alpha = \frac{t+1}{2}$ i $\sin \alpha$ d'igual signe que $\{\vec{v}, \vec{x}, f(\vec{x})\}$ (on $\vec{x} \notin \langle \vec{v} \rangle$) Pla de simetria: $V_{-1}^\perp = \text{Nuc}(A + I)^\perp$

Exemple 6.58 Calculem els **elements característics** de la **composició estricta** anterior. Com que $V_{-1} = \text{Nuc}(A + I) = \langle (1, 1, 1) \rangle$, el **vector de gir** és $\vec{v} = (1, 1, 1)$. A més, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. I com que $(1, 0, 0) \notin \langle (1, 1, 1) \rangle$, $f(1, 0, 0) = (0, -1, 0)$ i la base $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, -1, 0)\}$ és **negativa**, es té $\sin \alpha < 0$ i l'**angle** és, doncs, $\alpha = \frac{5\pi}{3}$. Finalment, el **pla de simetria** ve donat per $V_{-1}^\perp$ i és, en conseqüència, $x + y + z = 0$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

6.4 Recapitulació

Exemple 6.59 Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}$, $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ formen un angle de 60° i $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ i $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ són ortogonals.

Analitzem si és **simètric** l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que, en la base $\mathcal{B}$, té matriu

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 2$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$
$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 2$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 3$

Com que la **base no és ortonormal**, fem els productes escalars de cadascun dels vectors de $\mathcal{B}$ amb cadascuna de les seves imatges. De fet, només cal fer-ho pels corresponents a vectors diferents, ja que en els altres casos és obvi que la condició es verifica sempre.

$$\vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot (-\vec{e}_2) = -1$$

$$\vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 \cdot \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \frac{1}{3} \cdot (1 - 4 + 0) = -1$$

$$\vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \frac{1}{3}(4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \frac{1}{3} \cdot (8 - 2 - 0) = 2$$

$$\vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \frac{1}{3} \cdot (0 - 0 + 6) = 2$$

$$\vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \frac{1}{3} \cdot (4 - 4 + 0) = 0$$

$$\vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 \cdot (-\vec{e}_2) = 0.$$

Per tant, l'endomorfisme f és **simètric**, ja que

$$\vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \cdot f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_1) \text{ i } \vec{e}_2 \cdot f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot f(\vec{e}_2).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 6.60 Amb les mateixes dades de l'exemple anterior, anem a **diagonalitzar** l'endomorfisme f i a trobar una **base de vectors propis**, una **base ortogonal de vectors propis** i una **base ortonormal de vectors propis**.

$$p(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - x & 0 & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 - x & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} - x \end{vmatrix} = -(x-1)(x+1)^2 \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Els subespais propis V_1 i V_{-1} venen donats per les equacions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \quad \text{i} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

respectivament, i tenen solució $x = 2z$, $y = -z$ en el primer cas i $x = -z$ en el segon. En conseqüència, la **base de vectors propis** és

$$\{2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_3\}.$$

Apliquem ara Gram-Schmidt a la base de V_{-1} : $\vec{w}_1 = \vec{e}_2$

$$\vec{w}_2 = (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) - \frac{\vec{w}_1 \cdot (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \cdot \vec{w}_1 = (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) - \frac{-1+0}{2} \vec{e}_2 \simeq -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Llavors, la **base ortogonal de vectors propis** és

$$\{2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2, -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\}.$$

Finalment, com que $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$ i

$$(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 8 - 2 + 0 - 2 + 2 - 0 + 0 - 0 + 3 = 9$$

$$(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 8 - 2 - 0 - 2 + 2 + 0 - 0 + 0 + 12 = 18,$$

la **base ortonormal de vectors propis** és

$$\left\{ \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \frac{1}{\sqrt{18}}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 6.61 Amb la mateixa base dels exemples precedents, anem a calcular ara una base de vectors propis, una base ortogonal de vectors propis i una base ortonormal de vectors propis, així com la matriu diagonal corresponent a la projecció ortogonal i a la simetria respecte del subespai vectorial $V = \langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle$.

Com que hem de reunir bases de V i $V^\perp$, cal trobar primer una base d'aquest darrer. Cal, doncs, que

$$(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = 0,$$

d'on $4x + 2y - x - 2y + 3z = 0$, és a dir, $3x + 3z = 0$. La solució és, per tant, $x = -z$ i, en conseqüència, $V^\perp = \langle \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \rangle$. Així, la base de vectors propis és

$$B' = \{2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_3\}.$$

Observem que aquesta base és la mateixa que la trobada en el darrer exemple. I com que ara caldria ortogonalitzar la base de $V^\perp$ —que es correspon amb el subespai propi de valor propi -1 d'abans— i normalitzar-la després, que és justament el que s'havia fet en l'exemple d'abans, tenim que la base ortogonal de vectors propis és

$$\{2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_2, -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\},$$

la base ortonormal de vectors propis és

$$\left\{ \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \frac{1}{\sqrt{18}}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \right\}$$

i les matrius diagonals de P_V i S_V són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 6.62 Continuem amb el mateix exemple i calculem ara la **matriu de la projecció ortogonal i la simetria** anteriors en la base $\mathcal{B}$.

Considerem l'esquema següent referit a P_V :



on

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_{\mathcal{B}'}(P_V) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

En conseqüència, la **matriu de P_V en la base $\mathcal{B}$** és

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, la **matriu de S_V en la base $\mathcal{B}$** és

$$2 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observem que, com era d'esperar, aquesta última és la matriu inicial de f respecte de la base $\mathcal{B}$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 6.63 Considerem de nou l'exemple inicial amb la base $\mathcal{B}$ i l'endomorfisme f definits llavors. Ens proposem esbrinar si aquest és una **isometria lineal**.

Com que la base $\mathcal{B}$ **no és ortonormal**, cal comprovar si es **conserven els productes escalars** dels vectors de la base:

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_1) &= \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \\&= \frac{1}{9} \cdot (2 - 2 + 0 - 2 + 8 - 0 + 0 - 0 + 12) = 2\end{aligned}$$

$$f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_2) = (-\vec{e}_2) \cdot (-\vec{e}_2) = 2$$

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_3) &= \frac{1}{3}(4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \cdot \frac{1}{3}(4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \\&= \frac{1}{9} \cdot (32 - 8 - 0 - 8 + 8 + 0 - 0 - 0 + 3) = 3\end{aligned}$$

$$f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_2) = \frac{1}{3} \cdot (-1 + 4 - 0) = 1$$

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_3) &= \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot \frac{1}{3}(4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \\&= \frac{1}{9} \cdot (8 - 2 - 0 - 8 + 8 + 0 + 0 - 0 - 6) = 0\end{aligned}$$

$$f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_3) = (-\vec{e}_2) \cdot \frac{1}{3}(4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \frac{1}{3} \cdot (-4 + 4 + 0) = 0.$$

En conseqüència, com que

$$\begin{aligned}f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_1) &= 2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_2) = 2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_3) = 3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3, \\f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) &= 1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2, \quad f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_3) = 0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \quad \text{i} \quad f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_3) = 0 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3,\end{aligned}$$

l'endomorfisme f sí és una **isometria lineal**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Observació 6.64 En l'exemple d'abans, hem comprovat que l'endomorfisme f és una isometria lineal. Això ja ho sabem, perquè en els exemples anteriors havíem vist que es tracta d'una **simetria**, les quals són sempre isometries. Però, fins i tot en l'exemple següent, prescindirem d'aquest fet i veurem que, a partir de la seva classificació com a isometria, arribem a la mateixa conclusió.

Exemple 6.65 Continuant amb les dades de l'exemple anterior, **classifiquem** la isometria lineal f .

Ara la base en la que ve donada la matriu associada a la isometria **no és ortonormal** i, per tant, hem de fer servir el **teorema de classificació de les isometries de $\mathbb{R}^3$ per a bases arbitràries**.

Com que ja hem vist anteriorment que el **polinomi característic** era

$$p(x) = -(x - 1)(x + 1)^2,$$

deduïm que es tracta d'una **simetria axial**.

Finalment, l'**eix de simetria** és $V_1 = \text{Nuc}(A - I)$ que, tal i com havíem calculat ja en exemples anteriors, és el subespai vectorial

$$\langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle.$$

Resumint, doncs, tenim que f és la **simetria axial respecte de la recta vectorial**

$$\langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

7 Geometria lineal

7.1 L'espai afí

Definició 7.1 S'anomena **espai afí** a un conjunt A amb una operació de la forma

$$A \times E \xrightarrow{+} A$$
$$(p, \vec{x}) \mapsto p + \vec{x}$$

—on E és un **espai vectorial**—, que verifica:

(a) **Associativitat**: Per tot $p \in A$ i tot $\vec{x}, \vec{y} \in E$, $(p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$.

(b) **Determinació**: Donats $p, q \in A$ existeix un únic $\vec{x} \in E$ tal que $p + \vec{x} = q$.

I s'anomena **dimensió** de l'espai afí A a la **dimensió** de l'espai vectorial E .

L'exemple més important és l'**espai afí usual** $\mathbb{R}^n$, amb la **suma** $+$ d'espai vectorial.

Definició 7.2 Els elements de A s'anomenen **punts** i els de E , **vectors**. I l'**únic** vector $\vec{x} = \overrightarrow{pq}$ tal que $p + \overrightarrow{pq} = p + \vec{x} = q$, **vector lliure** d'**origen** p i **extrem** q .

$$\begin{array}{l} q = p + \vec{x} = p + \overrightarrow{pq} \\ \vec{x} = \overrightarrow{pq} \end{array}$$

Proposició 7.3 Per a qualssevol $p, q, r \in A$ es compleix que:

(a) $\overrightarrow{pq} = \vec{0}$ si, i només si, $p = q$.

(b) $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.

(c) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.4 S'anomena **baricentre** de k punts $p_1, p_2, \dots, p_k$ d'un espai afí A al punt $p_0 \in A$ tal que

$$\overrightarrow{p_0 p_1} + \overrightarrow{p_0 p_2} + \dots + \overrightarrow{p_0 p_k} = \vec{0}.$$

Proposició 7.5 Donats els punts $p_1 = (p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^n)$, $p_2 = (p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^n)$, $\dots$, $p_k = (p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^n)$ de $\mathbb{R}^n$, el seu **baricentre** és el punt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ obtingut a partir de les **mitjanes aritmètiques**:

$$p_0 = \left(\frac{p_1^1 + p_2^1 + \dots + p_k^1}{k}, \frac{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_k^2}{k}, \dots, \frac{p_1^n + p_2^n + \dots + p_k^n}{k} \right).$$

Definició 7.6 Al **baricentre** de dos punts se l'anomena **punt mitjà**.

Proposició 7.7 Donats els punts $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ i $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ de $\mathbb{R}^n$, el seu **punt mitjà** és el punt $m \in \mathbb{R}^n$ obtingut a partir de les **semisumes**:

$$m = \left(\frac{p_1 + q_1}{2}, \frac{p_2 + q_2}{2}, \dots, \frac{p_n + q_n}{2} \right).$$

Exemple 7.8 El **punt mitjà** dels punts $(2, 6)$ i $(3, 2)$ és el punt

$$m = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 4 \right).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Donat que, fixat un punt de l'espai afí, qualsevol altre punt es correspon a un únic vector, és natural referir-nos a un punt arbitrari a partir d'un altre punt i d'un **sistema de generadors** de l'espai. El cas més important és quan aquest és una **base**.

Definició 7.9 Una **referència cartesiana o afí** $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ d'un espai afí A és un conjunt format per un punt $O \in A$ i una base $\mathcal{B}$ de E .

O s'anomena **origen de coordenades** i els vectors de $\mathcal{B}$, **vectors de la referència**.

L'exemple més important és la **referència canònica**, formada pel punt $(0, 0, \dots, 0)$ com a **origen de coordenades** i per la **base canònica** $\mathcal{B}_c$:

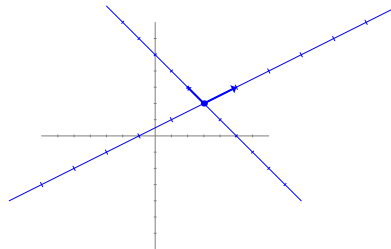
$$\mathcal{R}_c = \{(0, 0, \dots, 0); (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Definició 7.10 Es diu que **dues referències afins** són **de la mateixa** o **de diferent orientació** segons ho siguin les corresponents bases.

Les d'**igual orientació** que la canònica se'n diuen **positives** i les de **diferent**, **negatives**.

Exemple 7.11 $\mathcal{R}' = \{(3, 2); (2, 1), (-1, 1)\}$ és una **referència cartesiana** de $\mathbb{R}^2$, ja que $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ és una **base**. I és **positiva**, ja que $\mathcal{B} = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ també ho és, perquè

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.12 S'anomena **coordenades** de p respecte de $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ a les **components** del vector $\vec{Op}$ en la base $\mathcal{B}$. I aquest vector $\vec{Op}$ se'n diu **vector de posició**.

Així, les coordenades de l'**origen de coordenades** O són $(0, 0, \dots, 0)$ i les de $O + \vec{e}_1$, $O + \vec{e}_2, \dots, O + \vec{e}_n$ són $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$, respectivament. I en la **referència canònica** $\mathcal{R}_c$, tot punt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ té **coordenades** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Proposició 7.13 (a) Les **coordenades del punt** $p + \vec{x}$ s'obtenen **sumant** les **coordenades** del punt p amb les **components** del vector $\vec{x}$.

(b) Les **components del vector lliure** $\vec{pq}$ s'obtenen **restant** les **coordenades** del punt p de les **coordenades** del punt q .

Això permet, fixada una referència, treballar amb **coordenades** en lloc de **punts**.

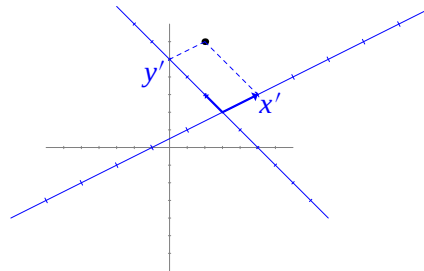
Proposició 7.14 Les **coordenades** d'un punt $p \in A$ són els valors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tals que

$$p = O + x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Exemple 7.15 Calculem les **coordenades** de $(2, 6)$ respecte de la referència $\mathcal{R}'$ anterior. De

$$(2, 6) = (3, 2) + x'(2, 1) + y'(-1, 1),$$

s'obté que $x' = 1$ i $y' = 3$. Per tant, el punt $(2, 6)$ té coordenades $(1, 3)$ respecte $\mathcal{R}'$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Teorema 7.16 *Fórmula del canvi de referència.*

Siguin $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ i $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}'\}$ dues referències. Si B és la **columna de coordenades de O' respecte $\mathcal{R}$** i C la **matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$** , llavors, representant per X i X' les **columnes de coordenades d'un punt qualsevol p en $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ respectivament**, es té que

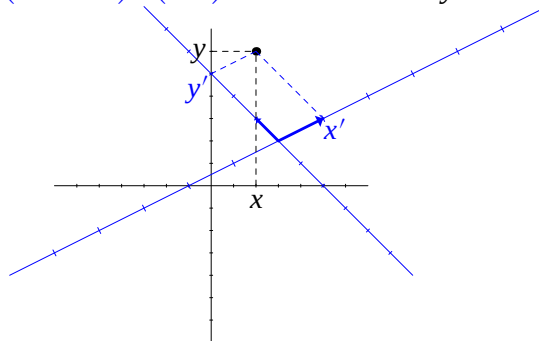
$$X = B + CX'.$$

Definició 7.17 Es parla, en tal cas, de **canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$** . I es diu que és **directe** o **invers**, segons ho sigui el corresponent **canvi de base**.

Proposició 7.18 Els canvis **directes conserven l'orientació** i els **inversos la canvien**.

Exemple 7.19 Considerem novament la referència $\mathcal{R}' = \{(3, 2); (2, 1), (-1, 1)\}$. Si (x, y) són les coordenades canòniques d'un punt qualsevol i (x', y') les seves coordenades en la referència $\mathcal{R}'$, el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_c$ és **directe** i ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \left. \begin{array}{l} x = 3 + 2x' - y' \\ y = 2 + x' + y' \end{array} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Observació 7.20 De la **fórmula del canvi de referència**, cal destacar-ne dos casos: si $C = I$, no hi ha canvi dels vectors de la base, i es diu que hi ha hagut una **translació d'eixos**; i si $B = 0$, no hi ha canvi d'origen de coordenades, i es parla de **canvi d'eixos** —que equival, de fet, a un **canvi de base** entre els vectors de les referències—.

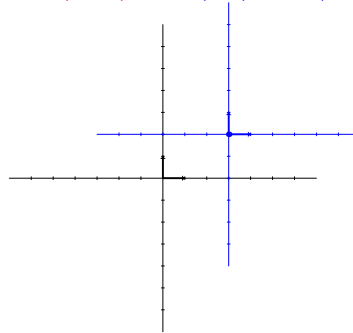
Proposició 7.21 Tot **canvi de referència** de $\mathcal{R}' = \{O'; B'\}$ a $\mathcal{R} = \{O; B\}$ es pot descomposar en **una translació de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}$** i **un canvi d'eixos de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$** , amb $\mathcal{R}'' = \{O'; B\}$ —o **viceversa**, però amb $\mathcal{R}'' = \{O; B'\}$ —.

Exemple 7.22 En l'exemple anterior, si $\mathcal{R}'' = \{(3, 2); (1, 0), (0, 1)\}$, el canvi de referència de $\mathcal{R}' = \{(3, 2); (2, 1), (-1, 1)\}$ a $\mathcal{R}_c$ es descomposa en la translació de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}_c$ tal que

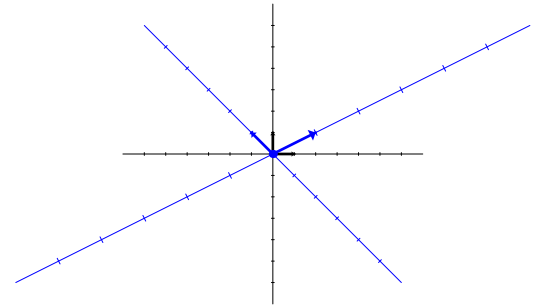
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

i el canvi d'eixos de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ donat per

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$



translació d'eixos



canvi d'eixos



Imprimir

Tancar

Sortir

7.2 Varietats lineals

Definició 7.23 Una **varietat lineal** és un conjunt de punts de la forma

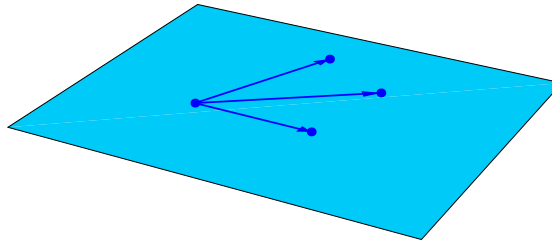
$$L = p + V,$$

on p és un punt i V és un **subespai vectorial** d' E anomenat **direcció** o **subespai director** de L .

Els vectors de V s'anomenen **vectors directors** de L i es diu que L **passa** per p .

Proposició 7.24 (a) $x \in L = p + V$ si, i només si, $\overrightarrow{px} \in V$.

(b) $L = p + V \subseteq L' = p' + V'$ si, i només si, $V \subseteq V'$ i $p \in L'$.



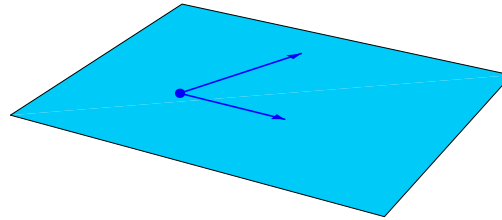
Exemple 7.25 Donats el punt $p = (1, 0, 1)$ i el subespai vectorial

$$V = \langle (0, 1, 1), (-1, 2, 0) \rangle,$$

la **varietat lineal** L que **passa** per p i té **direcció** associada V és

$$L = (1, 0, 1) + \langle (0, 1, 1), (-1, 2, 0) \rangle.$$

En particular, una varietat lineal queda determinada donant un **punt de pas** i un **sistema de generadors** de la seva direcció. El cas més important és quan aquest és una **base** i, llavors, se'n diu **referència** de la varietat lineal.



Definició 7.26 La **dimensió** d'una **varietat lineal** L és la de la seva **direcció** V :

$$\dim(L) = \dim(V).$$

Si la dimensió és **1**, en diem **recta**; si és **2**, **pla**; i si és $n - 1$, **hiperplà**.

Els **punts** són, de fet, les varietats lineals de **dimensió 0**, ja que $p = p + \{\vec{0}\}$.

Proposició 7.27 Siguin L i L' dues varietats lineals tals que $L \subseteq L'$. Llavors:

- (a) $\dim L \leq \dim L'$.
- (b) $\dim L = \dim L'$ si, i només si, $L = L'$.

Exemple 7.28 En l'exemple d'abans, la **referència** de la varietat lineal està formada pel **punt de pas** $(1, 0, 1)$ i la **base** $\{(0, 1, 1), (-1, 2, 0)\}$. I, en particular, es tracta d'un **pla**, perquè **la seva direcció té dimensió 2**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Es poden definir i calcular els diferents **típus d'equacions** d'una varietat lineal de forma anàloga al cas dels subespais vectorials. Cal remarcar, però, que ara les equacions implícites o cartesianes **no són homogènies** en general.

Proposició 7.29 (a) La **dimensió** d'una varietat lineal és el **nombre de graus de llibertat** de les seves **equacions implícites**.

(b) El **sistema homogeni** associat a les **equacions implícites** d'una varietat lineal respecte d'una referència dóna les **equacions implícites de la direcció** de la varietat lineal respecte de la **base de la referència**.

Exemple 7.30 Donats el pla anterior i la referència canònica $\mathcal{R}_c$, tenim en primer lloc

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(-1, 2, 0),$$

que és l'**equació paramètrica vectorial** o **equació vectorial** simplement. Llavors, podem posar

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \beta \\ y &= \alpha + 2\beta \\ z &= 1 + \alpha \end{aligned} \right\}$$

i obtenim, així, les **equacions paramètriques escalars** o **equacions paramètriques** només. Per tant, **imposant la compatibilitat d'aquest sistema**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & x - 1 \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & z - 1 \end{array} \right),$$

s'obté que la seva **equació implícita** en aquest cas és

$$2x + y - z - 1 = 0.$$

I, en particular, l'**equació implícita** en la base canònica de la seva **direcció** és

$$2x + y - z = 0.$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Observació 7.31 La **fórmula del canvi de referència** permet trobar també les **equacions implícites** d'una varietat lineal en una altra referència de forma totalment anàloga al cas dels subespais.

Exemple 7.32 Considerem la referència $\mathcal{R}' = \{(0, 1, -1); (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Aplicant la **fórmula del canvi de referència** de $\mathcal{R}'$ a la referència canònica $\mathcal{R}_c$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + y' + z' \\ y &= 1 + x' + y' \\ z &= -1 + x' \end{aligned} \right\},$$

queda

$$2(x' + y' + z') + (1 + x' + y') - (-1 + x') - 1 = 0$$

que, agrupant i substituint, dona

$$2x' + 3y' + 2z' + 1 = 0.$$



Imprimir

Tancar

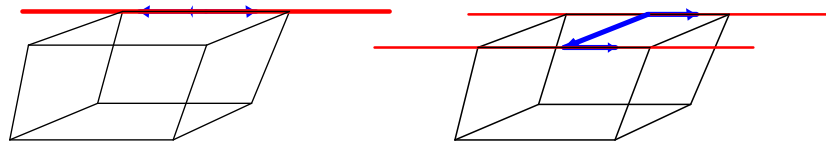
Sortir

Definició 7.33 Direm que dues varietats lineals $L = p + V$ i $L' = p' + V'$ són **paraleles**, $L \parallel L'$, si i només si,

$$V \subseteq V' \quad \text{o} \quad V' \subseteq V.$$

Si són **paraleles** i **no incloses una en l'altra**, en diem **estrictament paraleles**.

En particular, dues varietats lineals de la **mateixa dimensió** són **paraleles** si **les seves direccions coincideixen**. I, llavors, o són **paraleles estrictes** o **iguals**.



coincidentes

paraleles estrictes

Proposició 7.34 Si les **equacions implícites** de dues varietats lineals de la **mateixa dimensió** són les **mateixes excepte els termes independents**, llavors són **paraleles**.

En particular, donat **qualsevol punt** x , $L' = x + V$ és **paralela** a L i **passa per** x .

Exemple 7.35 El pla **paralel** a l'anterior que passa per $(1, 2, -5)$ té equació

$$2x + y - z + D = 0,$$

amb $2 \cdot 1 + 2 - (-5) + D = 0$. Per tant, $D = -9$ i el pla és

$$2x + y - z - 9 = 0.$$



Imprimir

Tancar

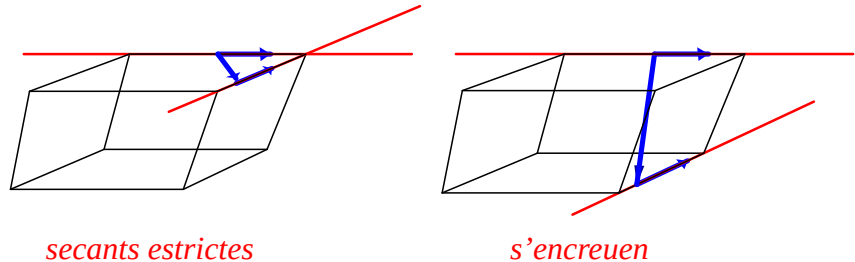
Sortir

Definició 7.36 Es diu que dues varietats lineals $L = p + V$ i $L' = p' + V'$ són **secants** o que **es tallen** si, i només si, la seva intersecció és no buida.

Si són **secants**, però **no incloses una en l'altra**, direm que són **estrictament secants** o que **es tallen estrictament**.

I quan **no siguin ni paral·leles ni secants** direm que **s'encreuen**.

Definició 7.37 Al vector $\overrightarrow{pp'}$ l'anomenarem **vector de posició relativa** de L i L' .



Exemple 7.38 La recta

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + \alpha(1, 1, 1)$$

i el pla anterior

$$2x + y - z - 1 = 0$$

són **estrictament secants**, ja que la seva intersecció s'obté d'imposar

$$2(2 + \alpha) + (1 + \alpha) - (2 + \alpha) - 1 = 0,$$

que dona $\alpha = -1$, i és, per tant, el punt $(1, 0, 1)$.



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

7.3 L'espai afí euclidià

Definició 7.39 S'anomena **espai afí euclidià** a tot **espai afí** A associat a l'**espai vectorial euclidià** $\mathbb{R}^n$.

Novament, l'exemple més important és l'**espai afí** $\mathbb{R}^n$ amb la seva estructura d'**espai vectorial euclidià**.

Definició 7.40 Es defineix la **distància entre dos punts** qualssevol p i q d'un **espai afí euclidià** com:

$$d(p, q) = \| \vec{pq} \|.$$

Proposició 7.41 Per a qualssevol $p, q, r \in A$, es compleix que:

- (a) $d(p, q) = 0$ si, i només si, $p = q$.
- (b) $d(q, p) = d(p, q)$.
- (c) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (desigualtat triangular).

Exemple 7.42 Donats els punts $p = (0, 7, 1)$ i $q = (2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$, es té que

$$\vec{pq} = (2, -6, 2)$$

i, per tant, la **distància** entre ells és

$$d(p, q) = \| \vec{pq} \| = \| (2, -6, 2) \| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.43 Si A és un espai afí euclidià i $\mathcal{B}$ és una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^n$, direm que la referència $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ és **rectangular** o **euclidiana**.

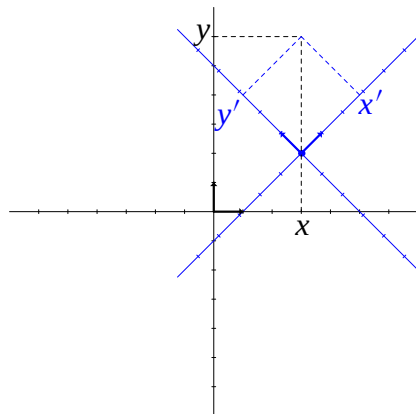
Proposició 7.44 La **distància** entre dos punts p i q de coordenades $(p_1, \dots, p_n)$ i $(q_1, \dots, q_n)$ respecte d'una **referència euclidiana** qualsevol és

$$d(p, q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}.$$

En particular, els **canvis de referència** entre **referències euclidianes** venen donats per **canvis de base** entre **bases ortonormals**, és a dir, **canvis de base ortogonals**.

Definició 7.45 En aquest cas, direm que el **canvi de referència** és **ortogonal**.

Exemple 7.46 El **canvi de referència** de $\mathcal{R}' = \left\{ (3, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \right\}$ a $\mathcal{R}_c$ és **ortogonal directe**:



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

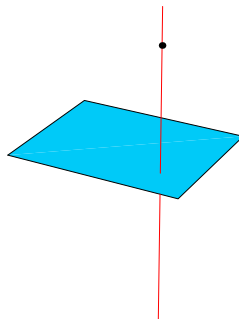
Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 7.47 Si $L = p + V$, el subespai ortogonal $V^\perp$ de V , s'anomena **subespai associat** o **normal** a L . I els seus vectors, **vectors associats** o **normals**.

Proposició 7.48 En referència euclidiana, els *coeficients dels termes no independents de les equacions implícites* d'una varietat lineal són les *components d'un sistema de generadors* del seu *subespai associat* i viceversa.

Definició 7.49 Dues varietats lineals $L = p + V$ i $L' = p' + V'$ són **perpendiculars**, $L \perp L'$, si i només si,

$$V^\perp \subseteq V' \quad \text{o} \quad V' \subseteq V^\perp.$$



En particular, donat qualsevol punt x , $L' = x + V^\perp$ és perpendicular a L i passa per x .

Exemple 7.50 Donat el pla $x - 3y + z - 2 = 0$, el vector $(1, -3, 1)$ és un **vector associat** seu i la **recta perpendicular** a aquest pla que passa per $(0, 7, 1)$ és

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 7}{-3} = \frac{z - 1}{1}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir

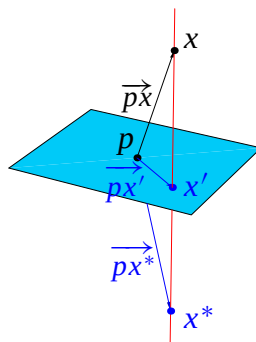
Definició 7.51 S'anomena **projecció ortogonal** i **simètric** d'un punt x sobre una varietat lineal $L = p + V$ als punts

$$x' = p + \overrightarrow{px'} \quad \text{i} \quad x^* = p + \overrightarrow{px^*},$$

on $\overrightarrow{px'}$ i $\overrightarrow{px^*}$ són la **projecció ortogonal** i el **simètric** del vector $\overrightarrow{px}$ sobre V .

Proposició 7.52 (a) La **projecció ortogonal** d'un punt x sobre una varietat lineal L és la **intersecció** de les varietats lineals $L = p + V$ i $L' = x + V^\perp$.

(b) El **simètric** d'un punt x respecte d'una varietat lineal $L = p + V$ és el punt $x^* = x + 2\overrightarrow{xx'} = x' + \overrightarrow{xx'}$.



Exemple 7.53 En l'exemple d'abans, la **intersecció de la recta perpendicular i el pla** s'obté substituint els valors de x , y i z a l'equació del pla:

$$\alpha - 3(7 - 3\alpha) + 1 + \alpha = 2, \quad \text{d'on} \quad \alpha = 2.$$

Per tant, la **projecció ortogonal** és el punt $(0, 7, 1) + 2 \cdot (1, -3, 1) = (2, 1, 3)$.

I el **simètric** és, doncs, $(0, 7, 1) + 2 \cdot (2, -6, 2) = (4, -5, 5)$.



Imprimir

Tancar

Sortir

Definició 7.54 La **distància entre dues varietats lineals** $L = p + V$ i $L' = p' + V'$ és el **mínim de les distàncies** entre punts de l'una i de l'altra:

$$d(L, L') = \min\{d(x, x') : x \in L, x' \in L'\}.$$

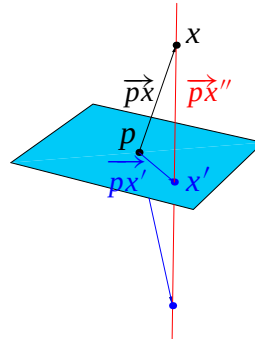
Evidentment, si L i L' són **secants**, la **distància** entre elles és **zero**.

Proposició 7.55 (a) Si $\vec{p}\hat{x}''$ és la **projecció ortogonal del vector $\vec{p}\hat{x}$ sobre el subespai $V^\perp$ associat a $L = p + V$** , aleshores

$$d(x, L) = \|\vec{p}\hat{x}''\|.$$

(b) Si en certa **referència euclidiana $\mathcal{R}$ el punt p té coordenades $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ i l'hiperplà H té equació $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + A_0 = 0$** , llavors

$$d(p, H) = \frac{|A_1p_1 + A_2p_2 + \dots + A_np_n + A_0|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2}}.$$



Exemple 7.56 La **distància** del punt $p = (0, 7, 1)$ al pla $P : x - 3y + z - 2 = 0$ és

$$d(p, P) = \frac{|0 - 3 \cdot 7 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{22}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11}.$$

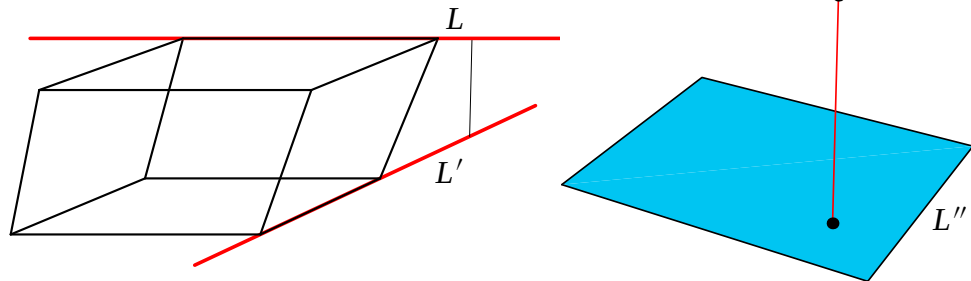
Proposició 7.57 (a) Siguin L i L' dues *varietats lineals* tals que $\dim(L) \leq \dim(L')$. Aleshores

$$d(L, L') = d(x, L''), \quad \text{per a tot } x \in L,$$

on L'' és la *mínima varietat lineal paral·lela a L que conté L'* .

(b) En particular, si L i L' són *paral·leles*, llavors

$$d(L, L') = d(x, L'), \quad \text{per a tot } x \in L.$$



Exemple 7.58 Com que el pla $P : x - 3y + z - 2 = 0$ i el pla $P' : x - 3y + z + 20 = 0$ són *paral·lels* i el punt $p = (0, 7, 1)$ pertany a aquest darrer, tenim que la *distància* entre tots dos és la mateixa que la del punt al primer d'ells que, tal com hem vist en l'exemple anterior, és

$$d(p, P) = 2\sqrt{11}.$$

Observació 7.59 Observem que aquesta distància *coincideix* amb la distància del punt $(0, 7, 1)$ a la seva *projecció ortogonal* $(2, 1, 3)$ sobre el pla $x - 3y + z - 2 = 0$.



Imprimir

Tancar

Sortir



7.4 Recapitulació

Exemple 7.60 Sigui $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una certa referència de $\mathbb{R}^3$ i considerem una altra referència $\mathcal{R}' = \{O + \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1\}$.

Volem **descomposar** el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ en una **translació** seguida d'un canvi d'eixos.

En primer lloc, considerem la nova referència $\mathcal{R}'' = \{O + \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Llavors, el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, que ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 + x' + y' + z' \\ y &= 2 + x' + y' \\ z &= -1 + x' \end{aligned} \right\},$$

es descompon en la translació de $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \left. \begin{aligned} x &= 1 + x'' \\ y &= 2 + y'' \\ z &= -1 + z'' \end{aligned} \right\},$$

i el canvi d'eixos de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \left. \begin{aligned} x'' &= x' + y' + z' \\ y'' &= x' + y' \\ z'' &= x' \end{aligned} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Exemple 7.61 Calculem ara el **canvi de referència invers** del de l'exemple anterior, és a dir, el que va de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

La matriu del canvi de base, en aquest cas, serà la matriu inversa de l'anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I les coordenades de l'origen O de la referència $\mathcal{R}$ respecte de la **referència $\mathcal{R}'$** surten de

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

d'on s'obté $x' = 1$, $y' = -3$ i $z' = 1$. Per tant, el canvi de referència buscat és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= 1 + z \\ y' &= -3 + y - z \\ z' &= 1 + x - y \end{aligned} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 7.62 Considerem ara la recta R' d'equacions implícites

$$\left. \begin{aligned} x' + y' + 2z' + 1 &= 0 \\ -x' + y' + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

respecte de la referència $\mathcal{R}'$ d'abans.

Anem a determinar les seves equacions implícites respecte de la referència inicial $\mathcal{R}$.

A partir del canvi de referència de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ trobat en l'exemple anterior

$$\left. \begin{aligned} x' &= 1 + z \\ y' &= -3 + y - z \\ z' &= 1 + x - y \end{aligned} \right\},$$

tenim que, substituint a les equacions de la recta respecte de la referència $\mathcal{R}'$ de l'enunciat, s'obté

$$\left. \begin{aligned} (1 + z) + (-3 + y - z) + 2(1 + x - y) + 1 &= 0 \\ -(1 + z) + (-3 + y - z) + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

i, per tant, les equacions implícites de la recta R' respecte de la referència $\mathcal{R}$ són

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ y - 2z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 7.63 Considerem ara una nova recta $\mathcal{R}$ d'equacions implícites

$$\left. \begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$$

respecte de la referència inicial $\mathcal{R}$ i la recta R' de l'exemple precedent.

Anem a determinar la seva posició relativa.

En primer lloc, resolent els sistemes de cadascuna de les rectes, és fàcil veure que les equacions paramètriques de R i R' són

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = \beta \\ z = -\beta \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{array} \right\}.$$

Per tant, R passa pel punt p de coordenades $(-1, 0, 0)$ respecte de la referència $\mathcal{R}$ i té vector director $\vec{v}$ de components $(0, 1, -1)$ respecte de la base de la referència $\mathcal{R}$; i R' passa pel punt p' de coordenades $(0, 1, 1)$ respecte de la mateixa referència i té vector director $\vec{v}'$ de components $(1, 2, 1)$ respecte de la seva base.

Aleshores, el vector de posició relativa $\overrightarrow{pp'}$ té components $(0, 1, 1) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. I com que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

es dedueix que els vectors $\overrightarrow{pp'}$, $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ són linealment independents i, en conseqüència, les dues rectes s'encreuen.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí



Imprimir

Tancar

Sortir

Exemple 7.64 Suposem ara que, a més a més, la referència inicial $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és **euclidiana**. Anem a calcular la **recta perpendicular secant comuna** R'' a les dues rectes anteriors R i R' .

Llavors, podem agafar el vector $\vec{w}$ de **components** $(0, 1, -1) \wedge (1, 2, 1) = (3, -1, -1)$ en la **base ortonormal** $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de la referència com a **vector director** de la recta R'' (ja que, encara que la referència no sigui positiva, el producte vectorial serà, en tot cas, el seu oposat; i tots dos serveixen com a vector director de la recta).

Per tant, aquesta recta és la **intersecció** del **pla** P que passa pel punt de **coordenades** $(-1, 0, 0)$ respecte de la referència $\mathcal{R}$ i té vectors directores de **components** $(0, 1, -1)$ i $(3, -1, -1)$ respecte de la base ortonormal $\mathcal{B}$ de la referència

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & x+1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -1 & z \end{array} \right)$$

i del **pla** P' que passa pel punt de **coordenades** $(0, 1, 1)$ respecte de la mateixa referència $\mathcal{R}$ i té vectors directores de **components** $(1, 2, 1)$ i $(3, -1, -1)$ en la mateixa base $\mathcal{B}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y-1 \\ 1 & -1 & z-1 \end{array} \right).$$

Aleshores, fent els càlculs corresponents, s'obtenen les **equacions implícites** de cadascun d'aquests dos plans P i P' , que resulten ser $2x+3y+3z+2=0$ i $x-4y+7z-3=0$ respectivament. Per tant, la **recta perpendicular secant comuna** R'' a R i R' és la d'**equacions implícites**

$$R'' : \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 3z + 2 = 0 \\ x - 4y + 7z - 3 = 0 \end{array} \right\}.$$



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Exemple 7.65 Calculem ara la **distància** entre les rectes R i R' d'abans i **els corresponents punts** de cadascuna d'elles que estan a aquesta distància.

Com que R i R' **no són paral·leles** i **tenen la mateixa dimensió**, la **distància** entre ambdues és igual a la **distància d'un punt d'una d'elles al pla paral·lel seu que conté l'altra**.

Així, un **vector $\vec{w}$ associat** al pla pot ser el **producte vectorial dels vectors directors** de les rectes, que era el de **components $(3, -1, -1)$** respecte de la base ortonormal de $\mathcal{R}$.

Llavors, la **projecció ortogonal** del **vector $\overrightarrow{pp'}$** sobre el **subespai associat** a aquest pla és

$$\overrightarrow{pp'}'' = \frac{\overrightarrow{pp'} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \cdot \vec{w} = \frac{(1, 1, 1) \cdot (3, -1, -1)}{(3, -1, -1) \cdot (3, -1, -1)} \cdot (3, -1, -1) = \frac{1}{11}(3, -1, -1)$$

i, en conseqüència, la **distància entre ambdues rectes** és

$$d(R, R') = \|\overrightarrow{pp'}''\| = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$

Finalment, per trobar els punts de R' i R'' que estan a aquesta distància, només cal determinar els punts d'intersecció de la seva recta perpendicular comuna amb cadascuna d'elles

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 3z + 2 = 0 \\ x - 4y + 7z - 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 3z + 2 = 0 \\ x - 4y + 7z - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$$

que, resolent, resulten ser els punts que, en la referència $\mathcal{R}$, tenen **coordenades** respectives

$$\left(\frac{-8}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{3}{11} \right) \quad \text{i} \quad \left(-1, \frac{-4}{11}, \frac{4}{11} \right).$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

8 Còniques i quàdriques

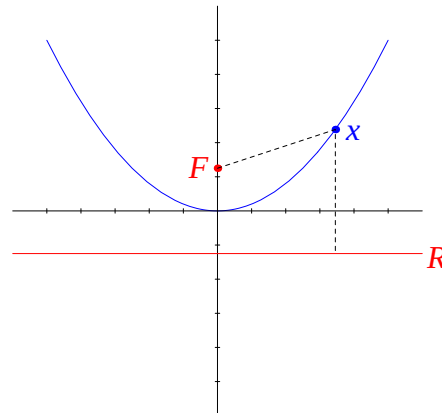
8.1 Paràbola, el·lipse i hipèrbola

Definició 8.1 Definició mètrica de paràbola.

Donats un punt F i una recta R del pla afí euclidià tal que $F \notin R$, s'anomena **paràbola** determinada per aquest punt i aquesta recta al conjunt de punts del pla que **equidisten** de tots dos:

$$d(x, F) = d(x, R).$$

Definició 8.2 El punt F s'anomena **focus**; la recta R , **directriu**; la distància del focus a la directriu, **paràmetre**; el punt mig del focus i de la seva projecció ortogonal sobre la directriu, **vèrtex**; i les rectes paral·lela i perpendicular a la directriu que passen pel vèrtex, **eixos principal i secundari**, respectivament.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 8.3 En la *referència euclidiana* $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ formada pel *vèrtex* O' i dos *vectors directors unitaris* respectius $\vec{e}'_1$ i $\vec{e}'_2$ dels eixos principal i secundari, es té —segons $\vec{e}'_2$ tingui el sentit de la directriu al focus o viceversa—:

(a) el *focus* té coordenades $\pm \left(0, \frac{p}{2}\right)$ i l'equació de la directriu és

$$y' = \mp \frac{p}{2},$$

on p és el *paràmetre*;

(b) l'equació de la paràbola és

$$y' = \pm \frac{x'^2}{a^2}, \quad \text{amb } a = +\sqrt{2p}.$$

Definició 8.4 La referència $\mathcal{R}'$ se'n diu **principal**; i l'equació anterior, **reduïda**.

Exemple 8.5 Considerem la *paràbola* formada pels punts que *equidisten* del punt $(2, 2)$ i de la recta $x - y + 4 = 0$.

La intersecció d'aquesta recta i de la seva perpendicular pel focus és el punt $(0, 4)$ i, per tant, el *vèrtex* és el punt mig de tots dos: $(1, 3)$. I prenent *un vector unitari de la directriu i el seu ortogonal en el sentit de la directriu al focus*, la *referència principal* és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, 3); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \right\}.$$

A més, el *paràmetre* o distància del punt a la recta és

$$p = \frac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

d'on s'obté que la seva *equació reduïda* és

$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{2}}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

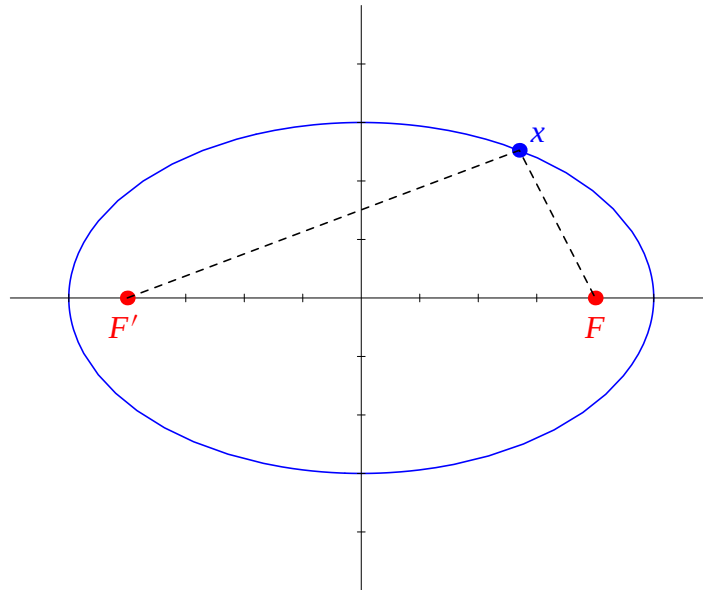
Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Todorí

Definició 8.6 Definició mètrica d'el·lipse.

Donats dos punts diferents F i F' del pla afí euclidià, s'anomena **el·lipse** determinada per aquests dos punts al conjunt de punts del pla tals que la **suma de les seves distàncies a F i F' és constant**:

$$d(x, F) + d(x, F') = k, \quad \text{amb } k > d(F, F').$$

Definició 8.7 F i F' s'anomenen **focus**; la distància entre ells, **distància focal**; el seu punt mig, **centre**; la recta que els uneix, **eix principal**; la perpendicular a aquesta pel centre, **eix secundari**; i les interseccions amb els eixos, **vèrtexs**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Proposició 8.8 En la **referència euclidiana** $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ formada pel **centre** O' i dos **vectors directors unitaris** respectius $\vec{e}'_1$ i $\vec{e}'_2$ dels eixos principal i secundari,

(a) els **focus** tenen coordenades $(c, 0)$ i $(-c, 0)$ i la **distància focal** és $2c$;

(b) l'**equació de l'el·lipse** és

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \text{amb} \quad a = \frac{k}{2} \quad \text{i} \quad b = +\sqrt{a^2 - c^2};$$

(c) els **vèrtexs** són els punts de coordenades $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ i $(0, -b)$.

Definició 8.9 La referència $\mathcal{R}'$ s'anomena **principal**; l'equació anterior, **reduïda**; i a i b , **semieixos major i menor**, respectivament.

Quan $F = F'$, l'**el·lipse** se'n diu **circumferència**. En aquest cas, els dos semieixos coincideixen i s'anomenen **radi**: $r = a = b$. A més a més, podem agafar com eixos dos qualssevol perpendiculars que passin pel centre. I l'equació és, aleshores:

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Exemple 8.10 Considerem l'**el·lipse** tal que la **suma de les distàncies** dels seus punts als punts $(2, 1)$ i $(0, 3)$ és 8.

La **referència principal** consta del punt mig $(1, 2)$ dels dos focus i dels vectors unitaris corresponents al vector $(2, -2)$ que els uneix i al seu ortogonal $(2, 2)$:

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\}.$$

I com que $2c = d((2, 1), (0, 3)) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, es té que

$$a = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{i} \quad b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 2 = 14$$

i l'**equació reduïda** és, doncs,

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{14} = 1.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

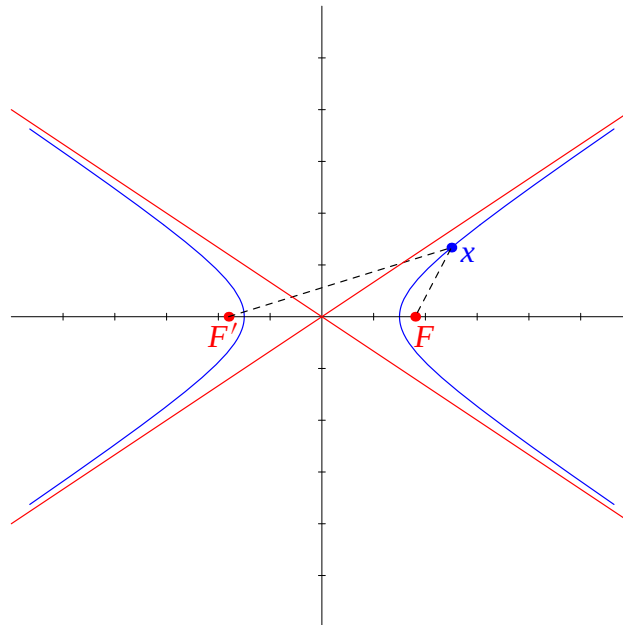
Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 8.11 Definició mètrica d'hipèrbola.

Donats dos punts diferents F i F' del pla afí euclidià, s'anomena **hipèrbola** determinada per aquests dos punts al conjunt de punts del pla tals que el **valor absolut de la diferència de les seves distàncies a F i F'** és constant:

$$|d(x, F) - d(x, F')| = k, \quad \text{amb } k < d(F, F').$$

Definició 8.12 F i F' s'anomenen **focus**; la distància entre ells, **distància focal**; el seu punt mig, **centre**; la recta que els uneix, **eix principal**; la seva perpendicular pel centre, **eix secundari**; i les interseccions amb els eixos, **vèrtexs**.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Proposició 8.13 En la **referència euclidiana** $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ formada pel **centre** O' i dos **vectors directors unitaris** respectius $\vec{e}'_1$ i $\vec{e}'_2$ dels eixos principal i secundari,

(a) els **focus** tenen coordenades $(c, 0)$ i $(-c, 0)$ i la **distància focal** és $2c$;

(b) l'**equació de la hipèrbola** és

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \text{amb} \quad a = \frac{k}{2} \quad \text{i} \quad b = +\sqrt{c^2 - a^2};$$

(c) hi ha dos **vèrtexs**: els punts de coordenades $(a, 0)$ i $(-a, 0)$.

Definició 8.14 La referència $\mathcal{R}'$ s'anomena **principal**; l'equació anterior, **reduïda**; a i b , **semieixos real i imaginari**; i les rectes $y' = \frac{b}{a}x'$ i $y' = -\frac{b}{a}x'$, **asímtotes**.

Si $a = b$, les asímtotes són **perpendiculars** i la hipèrbola se'n diu **equilàtera**.

Observació 8.15 La **referència principal** i l'**equació reduïda** caracteritzen les **paràboles**, les **el·lipses** i les **hipèrboles**, ja que a partir d'elles es pot trobar també la seva **definició**.

Exemple 8.16 Considerem la **hipèrbola** que en la **referència principal**

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\},$$

té **equació reduïda**

$$x'^2 - y'^2 = 1.$$

Aleshores, com que $a = 1$, es té que els **vèrtexs** són els punts

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{i} \quad \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

I com que $b = 1$ també, es dedueix que $c = \sqrt{2}$ i, per tant, els **focus** són els punts

$$(2, 1) \quad \text{i} \quad (0, 3).$$

En particular, com que $k = 2a = 2$, aquesta hipèrbola és la formada pels punts tals que el **valor absolut de la diferència de les seves distàncies als punts** $(2, 1)$ i $(0, 3)$ és 2.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

8.2 Còniques

Si $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ és una referència del pla afí euclidià, notem per X la matriu-columna de les **coordenades** (x, y) d'un punt respecte de $\mathcal{R}$ i per V la matriu-columna de les **components** (v_1, v_2) d'un vector en la seva base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Definició 8.17 Una **cònica** és un conjunt de punts del pla afí euclidià que, en una referència $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, verifiquen una equació

$$F(x, y) = q_1^1 x^2 + 2q_1^2 xy + q_2^2 y^2 + 2l_1 x + 2l_2 y + t = 0$$

amb almenys un dels coeficients q_1^1 , q_1^2 o q_2^2 no nuls.

Cal observar que, en canviar de referència, varia la seva equació, però no la forma general d'aquesta. A més, ens limitarem només al cas de **referències euclidianes**.

Els **dosos** d'abans s'han introduït per simplificació de fórmules posteriors. Si els coeficients són enters, però algun d'aquests és senar, convé **multiplicar l'equació per 2**. Notant

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

l'equació anterior es pot representar en l'anomenada **forma matricial**

$$X^t Q X + 2L^t X + t = 0,$$

on Q és **simètrica** i se'n diu **part quadràtica**, L **part lineal** i t **terme independent**.

Exemple 8.18 La cònica que en la referència canònica té equació $xy + x - 2y - 3 = 0$ es pot escriure també en la forma $2xy + 2x - 4y - 6 = 0$ que, matricialment, és

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 6 = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tàndurí

Definició 8.19 S'anomena **centre de simetria** d'una cònica a tot punt tal que el **simètric** de qualsevol punt de la cònica respecte d'ell pertanyi també a la cònica. I **eix de simetria** a tota recta tal que el **simètric** de qualsevol punt de la cònica respecte d'ella sigui també de la cònica.

I se'n diu **vèrtexs** a les **interseccions** de la **cònica** amb els **eixos de simetria**.

Proposició 8.20 (a) Els **centres de simetria** són les solucions del sistema lineal

$$QX + L = 0.$$

(b) Si $\vec{v}$ és **vector propi de valor propi no nul** de Q , el següent és un **eix de simetria**:

$$V^t \cdot (QX + L) = 0.$$

(c) La **intersecció** de dos **eixos de simetria** és un **centre de simetria**.

Exemple 8.21 En la cònica $2xy + 2x - 4y - 6 = 0$ anterior, de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 1 \\ x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

s'obté que $x = 2$ i $y = -1$ i, per tant, el **centre de simetria** és el punt $(2, -1)$. A més, els valors propis de Q són 1 i -1 —que són **no nuls**— i els seus vectors propis respectius $(1, 1)$ i $(-1, 1)$. I de

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} y + 1 \\ x - 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad (1 \ -1) \begin{pmatrix} y + 1 \\ x - 2 \end{pmatrix} = 0,$$

obtenim els seus **eixos de simetria**: $x + y - 1 = 0$ i $x - y - 3 = 0$.

Finalment, fent la intersecció d'aquests amb la cònica, s'obtenen punts imaginaris pel primer d'ells i els **vèrtexs** $(3, 0)$ i $(1, -2)$ en el cas del segon.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 8.22 Les còniques que **no tenen centre de simetria** s'anomenen **còniques sense centre** i les que **sí en tenen**, **còniques amb centre**.

Siguin λ_1 i λ_2 els **valors propis** de Q —on, si hi ha un **valor propi nul**, és $\lambda_2 = 0$ — i $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ una base ortonormal de vectors propis de la matriu simètrica Q .

Teorema 8.23 *Classificació de còniques: referència principal.*

(a) Les **còniques sense centre** tenen un **únic vèrtex** O' i, en la **referència euclidiana**

$$\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\},$$

la seva equació és del tipus $\lambda_1 x'^2 + 2l'y' = 0$, amb $l' = E_2'^t \cdot L$.

(b) En les **còniques amb centre**, si O' és un **centre de simetria** de la cònica, llavors en la **referència euclidiana**

$$\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\},$$

la seva equació és del tipus $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + t' = 0$, amb $t' = F(O')$.

Definició 8.24 Aquestes **referències euclidianes** s'anomenen **principals**.

Exemple 8.25 La cònica d'abans **tenia centre de simetria** i és, per tant, **amb centre**. I com que

$$t' = F(O') = F(2, -1) = -2,$$

es té que, en la **referència principal**

$$\mathcal{R}' = \left\{ (2, -1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \right\},$$

la seva **equació** és

$$x'^2 - y'^2 - 2 = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Todorí

Amb l'equació anterior, en funció de l'anul·lació o no dels seus coeficients i aïllant, es troba l'anomenada **equació reduïda** i, a partir d'ella, els diferents **tipus de còniques**:

Teorema 8.26 *Classificació de còniques: equació reduïda i tipus.*

Tipus d'equació	Equació reduïda	Tipus de cònica
$\lambda_1 x'^2 + 2l'y' = 0$	$y' = \pm \frac{x'^2}{a^2}$	<i>paràbola</i>
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + t' = 0$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	<i>el·lipse real</i> <i>hipèrbola</i> <i>el·lipse imaginària</i>
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$	$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = 0$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	<i>rectes secants imaginàries</i> <i>rectes secants reals</i>
$\lambda_1 x'^2 + t' = 0$	$\frac{x'^2}{a^2} = 1$ $-\frac{x'^2}{a^2} = 1$	<i>rectes paral·leles reals</i> <i>rectes paral·leles imaginàries</i>
$\lambda_1 x'^2 = 0$	$\pm \frac{x'^2}{a^2} = 0$ (o $x'^2 = 0$)	<i>recta doble</i>

I, a més de la **circumferència real** i la **hipèrbola equilàtera**, per l'el·lipse imaginària tenim la **circumferència imaginària** en la que, fent $r = a = b$, queda $x'^2 + y'^2 = -r^2$.

Exemple 8.27 Aïllant, a partir de l'equació $x'^2 - y'^2 - 2 = 0$, s'obté l'equació reduïda:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Per tant, és una **hipèrbola** —que és **equilàtera**, ja que $a = b = \sqrt{2}$ —.



Definició 8.28 Les còniques que no estan formades per parells de rectes se'n diuen **no degenerades**.

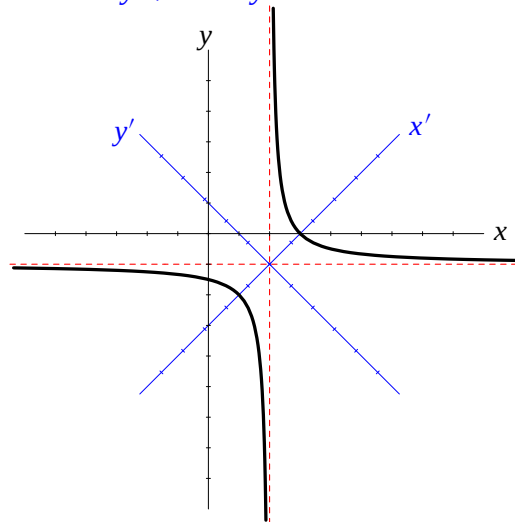
Proposició 8.29 Les **asímptotes** d'una hipèrbola d'equació $F(x, y) = 0$ formen un **parell de rectes secants reals** d'equació

$$F(x, y) - t' = 0,$$

on $t' = F(O')$ i O' és el centre de simetria de la hipèrbola.

Exemple 8.30 En la **hipèrbola** dels exemples precedents, s'ha vist que $O' = (2, -1)$ i $t' = F(O') = -2$. En conseqüència, l'equació del parell de rectes secants format per les dues asímptotes de la hipèrbola és $2xy + 2x - 4y - 6 - (-2) = 0$, és a dir,

$$xy + x - 2y - 2 = 0.$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 8.31 Les còniques formades per parells de rectes se'n diuen **degenerades**.

En les còniques degenerades el més interessant és **determinar les rectes que la formen**.

Exemple 8.32 En el cas del **parell de rectes** trobat en l'exemple anterior, de

$$xy + x - 2y - 2 = (ax + by + c)(a'x + b'y + c'),$$

s'obtenen les condicions

$$\left. \begin{array}{l} aa' = 0 \\ ab' + ba' = 1 \\ bb' = 0 \\ ac' + a'c = 1 \\ bc' + b'c = -2 \\ cc' = -2 \end{array} \right\}.$$

Aleshores, de la primera i tercera equacions, es dedueix que ha de ser $a' = b = 0$ o bé $a = b' = 0$ (els casos $a = a' = 0$ i $b = b' = 0$ no donen lloc a un parell de rectes). De fet, els dos casos són equivalents i prenent, per exemple, $a' = b = 0$, queda

$$\left. \begin{array}{l} ab' = 1 \\ ac' = 1 \\ b'c = -2 \\ cc' = -2 \end{array} \right\}.$$

Llavors, com que les expressions anteriors s'han de determinar excepte una constant, podem agafar $a = b' = 1$. I, substituint, s'obté $c = -2$ i $c' = 1$ i, en conseqüència, les **rectes que formen la cònica degenerada** —és a dir, les **asímtotes de la hipèrbola** anterior— són $x = 2$ i $y = -1$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

8.3 Quàdriques

Si $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és una referència del pla afí euclidià, notem per X la matriu-columna de les **coordenades** (x, y, z) d'un punt respecte de $\mathcal{R}$ i per V la matriu-columna de les **components** (v_1, v_2, v_3) d'un vector en la seva base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Definició 8.33 Una **quàdrica** és un conjunt de punts de l'espai afí euclidià tridimensional que, en una referència $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, verifiquen una equació

$$q_1^1 x^2 + q_2^2 y^2 + q_3^3 z^2 + 2q_1^2 xy + 2q_1^3 xz + 2q_2^3 yz + 2l_1 x + 2l_2 y + 2l_3 z + t = 0,$$

amb algun $q_i^j \neq 0$ almenys.

Cal observar que, en canviar de referència, varia la seva equació, però no la forma general d'aquesta. A més, ens limitarem només al cas de **referències euclidianes**.

Les consideracions sobre els **dosos** són les mateixes que per les còniques. I notant

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^2 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_1^3 & q_2^3 & q_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix},$$

l'equació anterior es pot representar en l'anomenada **forma matricial**

$$X^t Q X + 2L^t X + t = 0,$$

on Q és **simètrica** i se'n diu **part quadràtica**, L **part lineal** i t **terme independent**.

Exemple 8.34 La quàdrica $x^2 - 8y + 2z + 3 = 0$ s'escriu

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 3 = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 8.35 S'anomena **centre de simetria**, **eix de simetria** o **pla de simetria** d'una quàdrica a tot punt, recta o pla respectivament tal que el **simètric** de qualsevol punt de la quàdrica respecte d'ell hi pertanyi també a la quàdrica.

I els **vèrtexs** són les **interseccions** de la **quàdrica** amb els **eixos de simetria** si n'hi ha, o amb els **plans de simetria** en cas contrari.

Proposició 8.36 (a) Els **centres de simetria** són les solucions del sistema lineal

$$QX + L = 0.$$

(b) Si $\vec{v}$ és **vector propi de valor propi no nul** de Q , el següent és un **pla de simetria**:

$$V^t \cdot (QX + L) = 0.$$

(c) La **intersecció** de dos **eixos** o de dos **plans de simetria** és un **centre** o un **eix de simetria**, respectivament.

Exemple 8.37 En la quàdrica d'abans, l'equació dels **centres de simetria** és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que **no té solució**. A més, Q **ja està diagonalitzada**, els seus valors propis són $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i els vectors propis, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Així, el primer és un **vector propi de valor propi no nul**. I de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

es té que el **pla de simetria** és $x = 0$. Llavors, intersecant-lo amb la quàdrica, s'obté la **recta que conté els vèrtexs**, que és la que **passa per** $(0, \frac{3}{8}, 0)$ i té **vector director** $(0, 1, 4)$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Definició 8.38 Les quàdriques que **no tenen centre de simetria** s'anomenen **quàdriques sense centre** i les que sí en tenen, **quàdriques amb centre**.

Siguin λ_1 , λ_2 i λ_3 els **valors propis** de Q —on els **nuls**, si n'hi ha, són els **darrers**— i $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ una base ortonormal de vectors propis de la matriu simètrica Q .

Teorema 8.39 *Classificació de quàdriques: referència principal.*

(a) En les **quàdriques sense centre**, si O' és un vèrtex —i $\vec{e}'_2$ és un vector director unitari de la recta dels vèrtexs si n'hi ha—, es té que en la **referència euclidiana**

$$\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\},$$

la seva equació és del tipus $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2l'z' = 0$, amb $l' = E_3'^t \cdot L$.

(b) En les **quàdriques amb centre**, si O' és un centre de simetria, llavors en la **referència euclidiana**

$$\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\},$$

la seva equació és del tipus $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + t' = 0$, amb $t' = F(O')$.

Definició 8.40 Aquestes **referències euclidianes** s'anomenen **principals**.

Exemple 8.41 La quàdrica anterior és **sense centre**. Per tant, $\vec{e}'_3 = \vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 = (1, 0, 0) \wedge \frac{1}{\sqrt{17}}(0, 1, 4) = \frac{1}{\sqrt{17}}(0, -4, 1)$. I, com que

$$l' = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{17},$$

llavors, en la **referència principal**

$$\mathcal{R}' = \left\{ \left(0, \frac{3}{8}, 0\right); (1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{17}}(0, 1, 4), \frac{1}{\sqrt{17}}(0, -4, 1) \right\},$$

la seva equació és $x'^2 + 2\sqrt{17}z' = 0$.



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Tudurí

Com en les **còniques**, tenim les **equacions reduïdes** i **tipus de quàdriques** següents:

Teorema 8.42 *Classificació de quàdriques: equacions reduïdes i tipus.*

Tipus d'equació	Equació reduïda	Tipus de quàdrica
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2l'z' = 0$	$z' = \pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2}$ $z' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$	paraboloide el·líptic paraboloide hiperbòlic
$\lambda_1 x'^2 + 2l'z' = 0$	$z' = \pm \frac{x'^2}{a^2}$	cilindre parabòlic
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + t' = 0$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ $-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$	el·lipsoide real hiperboloide d'una fulla hiperboloide de dues fulles el·lipsoide imaginari
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0$	$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \pm \frac{z'^2}{c^2} = 0$ $\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \mp \frac{z'^2}{c^2} = 0$	con imaginari con real
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + t' = 0$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	cilindre el·líptic real cilindre hiperbòlic cilindre el·líptic imaginari
$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$	$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} = 0$ $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	plans secants imaginaris plans secants reals
$\lambda_1 x'^2 + t' = 0$	$\frac{x'^2}{a^2} = 1$ $-\frac{x'^2}{a^2} = 1$	plans paral·lels reals plans paral·lels imaginaris
$\lambda_1 x'^2 = 0$	$\pm \frac{x'^2}{a^2} = 0$ (o $x'^2 = 0$)	pla doble



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Definició 8.43 Les quàdriques que estan **formades per un parells de plans** se'n diuen **degenerades**; i les que **no ho estan**, **no degenerades**.

En les **quàdriques degenerades**, interessa especialment la **determinació dels dos plans que formen la quàdrica**, que es fa de forma anàloga al cas de les còniques.

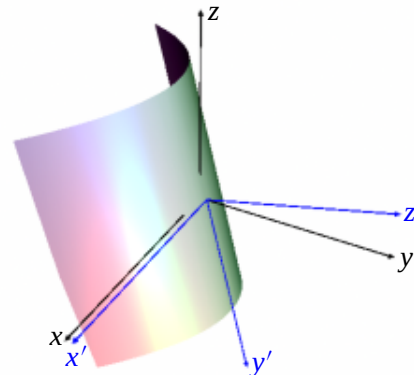
I en el de les **quàdriques no degenerades**, ens limitarem només a la seva **classificació**. Tanmateix, però, destacarem les de **revolució**—que són les que tenen **dos valors propis no nuls iguals**— i les **esferes**—que són els **el·lipsoïdes** que tenen els **tres valors propis iguals**—. Aquestes poden ser **reals** o **imaginàries**, es pot agafar com a eixos seus **tres perpendiculars qualssevol que passin pel centre** i, anomenant **radi** a $r = a = b = c$, la seva equació és:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \pm r^2.$$

Exemple 8.44 Si **aïllem** z' de l'equació obtinguda per a la quàdrica dels exemples anteriors, $x'^2 + 2\sqrt{17}z' = 0$, la seva **equació reduïda** queda

$$z' = -\frac{x'^2}{2\sqrt{17}}$$

i és, doncs, un **cilindre parabòlic**.



Imprimir

Tancar

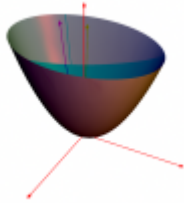
Sortir



Àlgebra Lineal

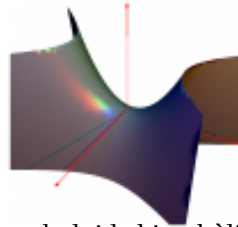
Rafel Amer
 Francesc Carreras
 José M. Moreno
 Vicenç Sales
 Josep Todorí

Aquests són els **gràfics en referència principal** de les **quàdriques no degenerades reals**:



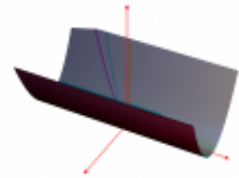
paraboloide el·líptic

$$z' = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}$$



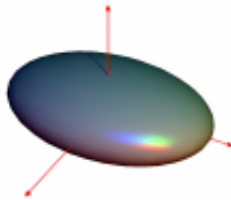
paraboloide hiperbòlic

$$z' = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}$$



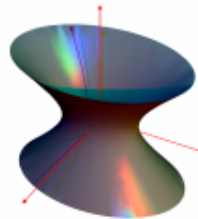
cilindre parabòlic

$$z' = \frac{x'^2}{a^2}$$



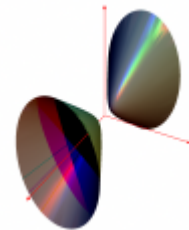
el·lipsoide real

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$



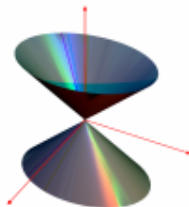
hiperboloide d'una fulla

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$



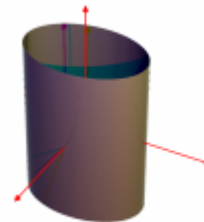
hiperboloide de dues fulles

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$



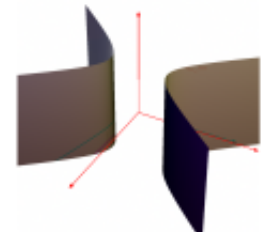
con real

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$$



cilindre el·líptic real

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



cilindre hiperbòlic

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

8.4 Recapitulació

Exemple 8.45 Sigui $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una referència euclidiana del pla. Anem a determinar la referència principal i l'equació reduïda de la paràbola formada pels punts que equidisten del punt de coordenades $(2, 2)$ i de la recta d'equació $x - y + 4 = 0$ en aquesta referència.

La projecció ortogonal del punt de coordenades $(2, 2)$ sobre la recta que en la referència $\mathcal{R}$ té equació $x - y + 4 = 0$ és la intersecció d'aquesta recta i de la seva perpendicular per aquest punt —que és la recta d'equació $x + y - 4 = 0$ respecte de $\mathcal{R}$ —, és a dir, el punt de coordenades $(0, 4)$. Per tant, el vèrtex és el punt mig d'aquest i del de coordenades $(2, 2)$, o sigui, el punt de coordenades $(1, 3)$.

Llavors, prenent el vector director unitari de la directriu i el seu vector ortogonal unitari en la direcció de la directriu al focus, s'obté que la referència principal és

$$\mathcal{R}' = \left\{ O + \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right\}.$$

A més, el paràmetre —o distància del focus a la recta directriu— és

$$p = \frac{|2 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

i, en conseqüència, l'equació reduïda és

$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{2}}.$$





Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 8.46 Recíprocament, trobarem ara el **focus**, l'**equació de la directriu** respecte de la referència $\mathcal{R}$ i la **definició mètrica** de la **paràbola** que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \left\{ O + \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right\}$$

té **equació reduïda**

$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{2}}.$$

En primer lloc, de l'**equació reduïda** es dedueix que el **paràmetre** és $p = 2\sqrt{2}$, ja que ha de ser $2p = 4\sqrt{2}$. Per tant, com que el **focus** té **coordenades** $(0, \frac{p}{2}) = (0, \sqrt{2})$ en la **referència principal**, les seves **coordenades en la referència $\mathcal{R}$** són $(2, 2)$ i, en conseqüència, és el punt

$$O + 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2.$$

Pel que fa a la **directriu**, en la **referència principal** la seva **equació** és $y' = -\frac{p}{2} = -\sqrt{2}$. I, tenint en compte que el canvi de referència de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

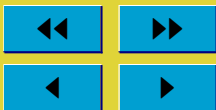
aïllant, es té que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}, \quad \text{és a dir,} \quad \left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 4) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 2) \end{aligned} \right\},$$

d'on, substituint a l'**equació reduïda** i operant, s'obté la seva **equació respecte de $\mathcal{R}$**

$$x - y + 4 = 0.$$

Finalment, obtenim que aquesta és la **paràbola formada pels punts que equidisten del punt de coordenades $(2, 2)$ i de la recta d'equació $x - y + 4 = 0$ en la referència $\mathcal{R}$.**



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer

Francesc Carreras

José M. Moreno

Vicenç Sales

Josep Tudurí

Exemple 8.47 Anem a trobar ara l'equació respecte de la referència euclidiana $\mathcal{R}$ anterior de la **paràbola** que en la **referència principal**

$$\mathcal{R}' = \left\{ O + \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right\}$$

té **equació reduïda**

$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{2}}.$$

En primer lloc, el canvi de referència de la referència

$$\mathcal{R}' = \left\{ O + \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right\}$$

a la referència $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

d'on, aïllant x' i y' , s'obté que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 4) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 2) \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, substituint aquestes expressions a l'**equació reduïda** i operant, s'obté l'equació buscada:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 16x = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 8.48 Recíprocament també a l'exemple anterior, considerem ara la **cònica** d'equació $x^2 + 2xy + y^2 - 16x = 0$ respecte de la referència anterior i **classifiquem-la**.

En primer lloc,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no té solució i, per tant, la cònica és **sense centre** i es tracta, doncs, d'una **paràbola**.

El polinomi característic de la matriu de la part quadràtica és

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x(x-2)$$

i els valors propis són, doncs, $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 0$.

A més a més, els subespais propis respectius tenen equacions $-x + y = 0$ i $x + y = 0$ i els vectors propis corresponents són, per tant, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ i $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$. Llavors

$$l' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\sqrt{2},$$

d'on s'obté l'equació $2x'^2 - 8\sqrt{2}y' = 0$. En conseqüència, l'**equació reduïda** és

$$y' = \frac{x'^2}{4\sqrt{2}}.$$

Finalment, l'**eix de simetria** ve donat per

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

és a dir, $2x + 2y - 8 = 0$ en la referència $\mathcal{R}$. I intersecant aquesta recta amb la paràbola s'obté el punt de coordenades **(1, 3)** i, en definitiva, la **referència principal** és

$$\mathcal{R}' = \left\{ O + \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) \right\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 8.49 Considerem una nova referència euclidiana $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Anem a trobar l'equació respecte d'aquesta referència del con real que en la referència principal

$$\mathcal{R}' = \{O - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

té equació reduïda

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0.$$

En primer lloc, el canvi de referència de la referència principal a la referència $\mathcal{R}$ —que, en aquest cas, és només una translació d'eixos— ve donat per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

d'on, aïllant x' , y' i z' , s'obté que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ y \\ z + 2 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + 2 \\ y' &= y \\ z' &= z + 2 \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, substituint aquestes expressions a l'equació reduïda i operant, s'obté l'equació buscada:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 4z = 0.$$



Imprimir

Tancar

Sortir



Àlgebra Lineal

Rafel Amer
Francesc Carreras
José M. Moreno
Vicenç Sales
Josep Tudurí

Exemple 8.50 De nou recíprocament a l'exemple anterior, anem a **classificar** ara la **quàdrica** d'equació $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 4z = 0$ en la referència $\mathcal{R}$ d'abans.

El sistema dels centres de simetria és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que té solució $x = -2$, $y = 0$ i $z = -2$ i, per tant, la quàdrica és **amb centre**, que és el punt de coordenades $(-2, 0, -2)$ respecte $\mathcal{R}$, és a dir,

$$O' = O - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3.$$

I, en particular, $t' = F(-2, 0, -2) = 0$.

D'altra banda, la matriu Q **ja està diagonalitzada** i els seus valors propis són, en conseqüència, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = -1$. Per tant, l'equació obtinguda –que ja és l'**equació reduïda** en aquest cas– és

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$$

i la quàdrica és, doncs, un **con real** i, en particular, és **no degenerada**. A més a més, aquest con és de **revolució**, ja que **Q té un valor propi doble: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$** .

Finalment, també pel fet de ja estar diagonalitzada la matriu Q , tenim que els vectors propis són els de components $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ en la referència $\mathcal{R}$, i la **referència principal** obtinguda és, doncs,

$$\mathcal{R}' = \{O - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$



Imprimir

Tancar

Sortir