

Àlgebra Lineal

Problemes resolts

Rafel Amer Ramon

Vicenç Sales i Inglès

Departament de Matemàtica Aplicada II

Escola Tècnica Superior d'Enginyeries

Industrial i Aeronàutica de Terrassa



Departament de Matemàtica Aplicada II
Escola Tècnica Superior d'Enginyeries
Industrial i Aeronàutica de Terrassa
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

© 2009 Rafel Amer i Vicenç Sales



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 2.5 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/legalcode.ca>

Escola Tècnica Superior d'Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa
Colom 11
08222 Terrassa

rafel.amer@upc.es

Introducció

Aquesta col·lecció de problemes d'àlgebra lineal és resultat de les classes impartides per la Secció de Terrassa del Departament de Matemàtica Aplicada II a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Terrassa des de la posada en marxa del nou pla d'estudis.

En el llibre s'han inclòs exemples explicats a classe per aconseguir una major comprensió dels conceptes teòrics desenvolupats i altres problemes d'un major grau de dificultat que intenten aclarir aquells punts en els quals hem constatat que els estudiants tenen més dificultats. No oblidem, però, que per aconseguir aquesta comprensió és imprescindible l'esforç i el treball personal, tant pel que fa a l'estudi d'aquests conceptes com a la resolució d'exercicis. Esperem que el llibre sigui d'utilitat als estudiants i els aconsellem que intentin resoldre els problemes abans de llegir la solució. En molts casos, segurament trobaran solucions alternatives a la proposada.

Els temes en què està dividit el llibre són habituals en qualsevol curs d'Àlgebra Lineal i s'ha dedicat especial atenció als aspectes geomètrics de l'Àlgebra Lineal; així, els dos últims capítols estan dedicats a la Geometria i a l'estudi de les còniques i quàdriques.

Encara que, inicialment, aquest llibre estigui pensat per a estudiants d'Escoles Tècniques Superiors d'Enginyeria, també pot ser útil als estudiants de Matemàtiques, Física i, en general, d'un curs elemental d'Àlgebra Lineal.

Es pot aconseguir l'última revisió d'aquesta obra en format PDF a l'adreça d'Internet <http://ruth.upc.es/algebra/algebra-lineal-problemes-resolts.pdf>.

RAFEL AMER I VICENÇ SALES

Índex

Introducció	3
Índex	5
1 Matrius i sistemes d'equacions lineals	7
1.1 Matrius	7
1.2 Sistemes d'equacions lineals	16
2 Determinants	31
2.1 Determinants	31
2.2 Aplicacions dels determinants	33
3 Espais vectorials	49
3.1 Espais vectorials	49
3.2 Subespais vectorials	65
4 L'espai vectorial euclidià	77
4.1 L'espai vectorial euclidià	77
4.2 Solucions aproximades d'un sistema lineal: mínims quadrats	92

5	Transformacions lineals	101
5.1	Transformacions lineals i endomorfismes	101
5.2	Diagonalització	124
6	Endomorfismes de l'espai vectorial euclidià	139
6.1	Endomorfismes simètrics i diagonalització ortogonal	139
6.2	Isometries lineals	155
7	Geometria lineal	169
7.1	L'espai afí	169
7.2	L'espai afí euclidià	184
8	Còniques i quàdriques	195
8.1	Còniques	195
8.2	Quàdriques	213

1

Matrius i sistemes d'equacions lineals**1.1 Matrius**

1. Calculeu el rang de les matrius següents:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

a) El rang d'una matriu és el nombre màxim de vectors-columna linealment independents. Aleshores, per calcular el rang hem de triangular la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ \bar{F}_3 \sim \bar{F}_3 - F_1}]{\quad} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Els pivots de la matriu triangulada corresponen a les columnes primera i tercera, per tant, el primer i el tercer vectors-columna de la matriu inicial són linealment independents i els altres tres són combinació d'aquests i el rang d'aquesta matriu és 2.

b) Triangulant la segona matriu de l'enunciat tenim que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 5F_1 \\ F_4 \sim F_4 - 7F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 \sim F_3 - 2F_2 \\ F_4 \sim F_4 - 2F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

És evident que els vectors-columna primer, segon i quart són linealment independents i que el tercer és combinació lineal dels dos primers. Per tant, el rang d'aquesta matriu és 3.

2. Calculeu el rang de la matriu següent segons els valors del paràmetre a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3 \\ 1 & a+1 & 1 & a^3+3a^2 \\ a+1 & 1 & 1 & a^2+3a \end{pmatrix}.$$

Solució

Triangulem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3 \\ 1 & a+1 & 1 & a^3+3a^2 \\ a+1 & 1 & 1 & a^2+3a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - (a+1)F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3 \\ 0 & a & -a & -a^4-2a^3+3a^2 \\ 0 & -a & -a^2-2a & -a^5-4a^4-3a^3+a^2+3a \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3 \\ 0 & a & -a & -a^4-2a^3+3a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-3a & -a^5-5a^4-5a^3+4a^2+3a \end{pmatrix}$$

Els coeficients de la diagonal principal d'aquesta matriu depenen del paràmetre a , aleshores, per calcular el rang de la matriu hem de distingir els casos següents:

- (a) Si $a \neq 0$ i $-a^2 - 3a \neq 0$, els tres primers vectors-columna són linealment independents i el quart és combinació lineal dels tres primers; per tant, el rang de la matriu és 3. Tenint en compte que $-a^2 - 3a = 0$ si, i només si, $a = 0$ o $a = -3$, resulta que si $a \neq -3$ i 0 el rang de la matriu és 3.

- (b) Si $a = 0$, la matriu inicial era

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i evidentment el rang d'aquesta matriu és 1.

- (c) Si $a = -3$ la matriu triangulada és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, els dos primers vectors-columna són linealment independents i els altres dos són combinació lineal d'aquests; per tant, el rang de la matriu és 2.

Resumint, si $a = 0$ el rang és 1, si $a = -3$ el rang és 2 i si $a \neq -3$ i 0 el rang és 3.

3. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

calculeu $(A - 2I)^3$.

Solució

En primer lloc tenim que

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (-1)(-1) - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & (-1)(-2) - 2(-4) + 1(-1) & -1 \cdot 1 - 2(-1) + 1 \cdot 0 \\ 3(-1) - 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 & 3(-2) - 4(-4) - 1(-1) & 3 \cdot 1 - 4(-1) - 1 \cdot 0 \\ 4(-1) - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 4(-2) - 1(-4) + 0(-1) & 4 \cdot 1 - 1(-1) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -19 & 11 & 7 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i finalment tenim que

$$\begin{aligned}
(A - 2I)^3 &= (A - 2I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 1 \\ -19 & 11 & 7 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 32 & -35 & -10 \\ 80 & -13 & -30 \\ 15 & 25 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Calculeu, si és possible, les inverses de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

Per calcular la inversa de la matriu A , hem de triangular la matriu següent:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1 \end{array} \\
&\simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \sim F_3 \\ F_3 \sim F_2 \end{array} \\
&\simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim 2F_1 + F_2 \\ F_4 \sim F_4 - F_2 \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim F_1 + F_3 \\ F_4 \sim F_4 - F_3 \end{array} \\
& \simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim 2F_1 + F_4 \\ F_2 \sim 2F_2 + F_4 \\ F_3 \sim 2F_3 + F_4 \end{array} \\
& \simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim \frac{1}{4}F_1 \\ F_2 \sim -\frac{1}{4}F_2 \\ F_3 \sim -\frac{1}{4}F_3 \\ F_4 \sim \frac{1}{4}F_4 \end{array} \\
& \simeq \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Per tant, la matriu A és invertible i la seva inversa és

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la mateixa manera, calculem la inversa de la matriu B :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1 \end{array} \\
& \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim 3F_1 + 7F_2 \\ F_3 \sim F_3 - F_2 \end{array} \\
& \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 2 & -18 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Els tres sistemes d'equacions que intervenen per calcular la inversa de la matriu B són incompatibles; per tant, la matriu B no és invertible.

5. Trobeu els valors de λ per als quals és invertible la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Solució

Sabem que una matriu d'ordre 3 és invertible si, i només si, el seu rang és 3. Aleshores, hem de trobar els valors de λ per als quals el rang d'aquesta matriu és 3.

Triangulant la matriu tenim que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} &\underset{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -2\lambda - 1 & \lambda + 2 \\ 0 & -\lambda + 10 & -5 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim 2F_3 - F_2}{\simeq} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -2\lambda - 1 & \lambda + 2 \\ 0 & 21 & -\lambda - 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_3 \\ F_3 \sim F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 21 & -\lambda - 12 \\ 0 & -2\lambda - 1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim 21F_3 + (2\lambda + 1)F_2}{\simeq} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 21 & -\lambda - 12 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2 - 4\lambda + 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenint en compte que $-2\lambda^2 - 4\lambda + 30 = 0$ si, i només si,

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 240}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{-4} = \frac{4 \pm 16}{-4} = \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases}.$$

resulta que el rang de la matriu és 3 i, per tant, és invertible si, i només si, $\lambda \neq -5$ i 3.

6. Trobeu una matriu X tal que $AX = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solució

Comprovem en primer lloc que la matriu A és invertible i calculem la seva inversa

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)_{F_2 \sim F_2 - 2F_1} &\simeq \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right)_{F_1 \sim 14F_1 + 5F_2} \\ &\simeq \left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 14 & -2 & 1 \end{array} \right)_{\substack{F_1 \sim \frac{1}{14}F_1 \\ F_2 \sim \frac{1}{14}F_2}} \simeq \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/14 & 5/14 \\ 0 & 1 & -2/14 & 1/14 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Per tant, la inversa de la matriu A és

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicant a l'esquerra els dos costats de la igualtat $AX = B$ per A^{-1} tenim que

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Aleshores,

$$X = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -16 \end{pmatrix} :$$

- (a) Comproveu que la matriu A no és invertible, però que l'equació $AX = B$ té solució.
 (b) Trobeu una matriu C tal que l'equació $AX = C$ no tingui solució.

Solució

a) Evidentment, la segona columna de la matriu A és múltiple de la primera, per tant, la matriu A té rang 1 i no és invertible. Aleshores, no podem resoldre l'equació $AX = B$ pel mateix mètode que a l'exercici 8.

Si posem

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

l'equació $AX = B$ es transforma en

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -16 \end{pmatrix}.$$

Igualant coeficient a coeficient, tenim un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - 2t = -8 \\ 2x - 4z = 2 \\ 2y - 4t = -16 \end{array} \right\}.$$

La tercera equació és el doble de la primera i la quarta és el doble de la segona; per tant, el sistema queda reduït a

$$\left. \begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y - 2t = -8 \end{array} \right\}.$$

És evident que aquest sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i la seva solució general és

$$\left. \begin{array}{l} x = 2z + 1 \\ y = 2t - 8 \end{array} \right\}.$$

Per tant, totes les matrius de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 2z + 1 & 2t - 8 \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \text{amb } z, t \in \mathbb{R},$$

són solució de l'equació inicial.

b) Sabem que en tota igualtat de matrius $AX = C$, les columnes de la matriu C són combinació lineal de les columnes de la matriu A . Aleshores, si volem que l'equació $AX = C$ no tingui solució, és suficient que alguna columna de la matriu C no sigui combinació lineal de les columnes de la matriu A , per exemple:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

8. Resoleu, és a dir, aïlleu la matriu incògnita X , les equacions matricials següents:

(a) $2X + A = B$.

(b) $XA + B = C$.

(c) $A^{-1}XA = B$.

(d) $AX^{-1}B = I$.

(e) $A^{-1}X^t + B = C$.

En tots els casos suposarem que les matrius que multipliquen a la X són regulars.

Solució

(a) En aquest cas, la matriu A , que està sumant a un costat de la igualtat, passa a l'altre costat restant i, el 2 passa dividint, és a dir, la solució és

$$X = \frac{1}{2}(B - A).$$

(b) De manera semblant, tenim que $XA = C - B$ i, en multiplicar els dos costats de la igualtat per A^{-1} a la dreta, tenim que $XAA^{-1} = (C - B)A^{-1}$. Aleshores, la solució és

$$X = (C - B)A^{-1}.$$

Observem que si una matriu regular està multiplicant en un costat d'una igualtat per l'esquerra, podem passar-la a l'esquerra de l'altre costat de la igualtat, multiplicant per la seva inversa. De la mateixa manera, si una matriu regular està multiplicant en un costat d'una igualtat per la dreta, podem passar-la a la dreta de l'altre costat de la igualtat, multiplicant per la seva inversa.

(c) En aquest cas també hem de tenir en compte que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Aleshores, pas a pas, tindrem que

$$A^{-1}XA = B$$

$$A^{-1}X = BA^{-1}$$

$$X = ABA^{-1}.$$

(d) De manera similar

$$AX^{-1}B = I$$

$$AX^{-1} = IB^{-1} = B^{-1}$$

$$X^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

$$X = (A^{-1}B^{-1})^{-1}$$

$$X = BA.$$

(e) Finalment, tenint en compte que $(A + B)^t = A^t + B^t$ i que $(AB)^t = B^t A^t$, tindrem que

$$A^{-1}X^t + B = C$$

$$A^{-1}X^t = C - B$$

$$X^t = A(C - B)$$

$$X = (A(C - B))^t$$

$$X = (C^t - B^t)A^t.$$

1.2 Sistemes d'equacions lineals

9. Analitzeu el caràcter del sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y = -1 \\ 3x - 5y + z = -2 \end{array} \right\}.$$

Solució

La matriu del sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu, fent transformacions elementals per files tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1 \\ F_4 \sim F_4 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_3 \sim 3F_3 - 4F_2 \\ F_4 \sim 3F_4 - F_2}} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4 \sim F_4 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array} \right). \end{aligned}$$

El sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ 3y + z = -4 \\ -7z = 7 \\ 0 = -27 \end{array} \right\}.$$

Evidentment, l'última igualtat és impossible, per tant, aquest sistema d'equacions és incompatible.

10. Resoleu el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = -2 \\ 3x + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{array} \right\}.$$

Solució

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right),$$

és a dir, la matriu que s'obté escrivint en columnes els coeficients de la x , els de la y , els de la z i els termes independents, respectivament.

El mètode de Gauss consisteix a fer transformacions elementals per files fins a obtenir una matriu triangularada i a partir d'aquesta resoldre el sistema d'equacions. Recordem que les transformacions elementals són les següents:

- (a) Permutar dues files.
- (b) Permutar dues columnes corresponents a les incògnites.
- (c) Multiplicar una fila per un nombre diferent de zero.
- (d) Substituir una fila per aquesta fila més un múltiple d'una altra.

El primer coeficient de la diagonal principal és diferent de zero, aleshores per aconseguir que els altres coeficients de la primera columna siguin zero fem les transformacions elementals següents:

Substituïm la segona fila per la segona fila menys el triple de la primera i substituïm la tercera fila per la tercera fila menys el doble de la primera.

És habitual representar aquestes transformacions elementals i la matriu obtinguda de la forma següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}]{} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 10 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & 7 \end{array} \right).$$

El segon coeficient de la diagonal principal és diferent de zero, aleshores per aconseguir que el coeficient que hi ha sota sigui zero fem la transformació elemental següent:

Substituïm la tercera fila per la tercera fila multiplicada per 6 menys la segona multiplicada per 5.

Com en el cas anterior representem aquesta transformació elemental i la matriu obtinguda de la forma següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 10 & 6 \\ 0 & -5 & 8 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 6F_3 - 5F_2} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{array} \right)$$

Aquesta última matriu ja està triangulada, aleshores el sistema d'equacions inicial és equivalent al que correspon a aquesta matriu, que és

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = -2 \\ -6y + 10z = 6 \\ -2z = 12 \end{array} \right\}.$$

Un sistema d'aquesta forma s'anomena triangular i es resol començant per l'última equació i substituint els resultats a les anteriors.

Observem que el sistema triangular té tres equacions i tres incògnites, aleshores el sistema d'equacions inicial és compatible determinat. Les solucions són

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3(-6) = -2 \\ -6y + 10(-6) = 6 \\ z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2(-11) - 3(-6) = -2 \\ y = -11 \\ z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -11 \\ z = -6 \end{array} \right\}.$$

Per tant, la solució del sistema és

$$x = 2, \quad y = -11 \quad \text{i} \quad z = -6.$$

11. Resoleu el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = -2 \\ 4x + 3y - z = 0 \end{array} \right\}.$$

Solució

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu, fent transformacions elementals per files tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

El sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \\ 5y - 7z = -8 \end{array} \right\}$$

i té dues equacions i tres incògnites, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat; és a dir, la solució general ve donada en posar dues de les incògnites en funció de la tercera. En aquest cas,

$$\left. \begin{array}{l} 2x - \frac{7z-8}{5} + 3z = 4 \\ y = \frac{7z-8}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-4z+6}{5} \\ y = \frac{7z-8}{5} \end{array} \right\}.$$

Per tant, la solució general és

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{-4z+6}{5} \\ y = \frac{7z-8}{5} \end{array} \right\}.$$

Observem que qualsevol solució particular del sistema d'equacions es pot obtenir donant un valor arbitrari a la z i calculant els valors de la x i de la y amb les igualtats de la solució general.

12. Resoleu el sistema d'equacions lineals homogeni següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 3x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x - 5y - 6z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Solució

Observem que quan el sistema d'equacions és homogeni, és a dir, tots els termes independents són nuls, en tot el procés de triangulació de la matriu aquests termes sempre són nuls, ja que cap de les transformacions elementals els fa variar.

Per aquest motiu, quan es triangula la matriu d'un sistema d'equacions homogeni, no és imprescindible posar la columna de termes independents. De tota manera, per recordar que resolem un sistema d'equacions homogeni, és convenient fer-ho.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \sim -F_3 + 2F_1]{F_2 \sim 2F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

El sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 4z &= 0 \\ 7y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\},$$

ja que els coeficients de la matriu són els coeficients de les incògnites i els termes independents són zero.

Aquest sistema té dues equacions i tres incògnites, per tant, el sistema inicial és compatible inde-

terminat amb un grau de llibertat. La solució general és

$$\left. \begin{array}{l} 2x + \frac{2z}{7} - 4z = 0 \\ y = \frac{2z}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{13z}{7} \\ y = \frac{2z}{7} \end{array} \right\}.$$

13. Resoleu el sistema d'equacions lineals homogeni següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ 2x + 9y + 6z = 0 \end{array} \right\}.$$

Solució

En aquest cas no posem els termes independents, però al final hem de recordar que aquests són tots nuls.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Triangulant aquesta matriu tenim que

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 - 2F_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

En aquesta matriu, el segon coeficient de la diagonal principal és zero; aleshores per continuar triangulant la matriu hem de permutar dues files de manera que el coeficient que ocupi aquest lloc sigui no nul:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 17 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_4 \\ F_4 \sim F_2}]{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 17 & 14 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim 17F_3 + 2F_2}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -142 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)_{F_4 \sim 71F_4 + F_3} \simeq \left(\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -142 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

El sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 5y + 2z = 0 \\ 17y + 14z = 0 \\ -142z = 0 \end{array} \right\}$$

i té tres equacions i tres incògnites. Per tant, el sistema inicial és compatible determinant.

L'única solució d'un sistema homogeni compatible determinat és la trivial, és a dir,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{i} \quad z = 0.$$

14. Analitzeu, pel mètode de Gauss, el caràcter del sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = -2 \\ -x + y + az = 1 \\ 2x + ay + 4z = -2 \end{array} \right\},$$

segons els valors del paràmetre a .

Solució

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & -2 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & -2 \end{array} \right)_{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & a+4 & 2 & 2 \end{array} \right)_{F_3 \sim F_3 + (a+4)F_2}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+5a+6 & -a-2 \end{array} \right).$$

Observem que $a^2 + 5a + 6 = 0$ si, i només si,

$$a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases};$$

aleshores, ja podem estudiar quan es compleix cada un dels casos de l'enunciat.

(a) El sistema és incompatible si alguna de les equacions del sistema triangular és de la forma $0 = \text{nombre diferent de zero}$. Evidentment, la tercera equació és d'aquesta forma quan $a = -3$.

(b) El sistema és compatible indeterminat si la tercera equació queda reduïda a $0 = 0$, és a dir, si $a = -2$.

(c) Finalment, és immediat que si $a \neq -2$ i -3 el sistema és compatible determinat.

15. Estudieu, segons els valors del paràmetre a , el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + 2z = -1 \\ x + (2a + 1)y + 8z = 0 \\ 2x + 3ay + (3a + 4)z = a - 2 \end{array} \right\}.$$

Solució

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 1 & 2a+1 & 8 & 0 \\ 2 & 3a & 3a+4 & a-2 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu fent transformacions elementals per files tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 1 & 2a+1 & 8 & 0 \\ 2 & 3a & 3a+4 & a-2 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & a+1 & 6 & 1 \\ 0 & a & 3a & a \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim (a+1)F_3 - aF_2} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & -1 \\ 0 & a+1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3a^2 - 3a & a^2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

En aquesta última transformació elemental hem multiplicat la tercera fila, que és la que hem substituït, per $a + 1$, aleshores si $a = -1$ aquesta transformació no és vàlida, ja que no es pot multiplicar una fila per zero. Per tant, quan estudiem el sistema per a $a = -1$, no ho podrem fer a partir d'aquesta última matriu, sinó que ho hauré de fer a partir de l'anterior.

Per estudiar el sistema d'equacions, hem de distingir els casos següents:

(a) Si $3a^2 - 3a \neq 0$ i $a + 1 \neq 0$, el sistema triangular corresponent a la matriu triangularada és

$$\left. \begin{aligned} x + ay + 2z &= -1 \\ (a + 1)y + 6z &= 1 \\ (3a^2 - 3a)z &= a^2 \end{aligned} \right\}$$

i té tres equacions i tres incògnites, per tant, el sistema és compatible determinat.

Observem que $3a^2 - 3a = 0$ si, i només si, $a = 0$ o $a = 1$; per tant, en aquest primer cas estem estudiant el sistema si $a \neq -1, 0$ i 1 , i quan calculem les solucions podrem simplificar entre a , $a + 1$ o $a - 1$.

Les solucions són

$$\left. \begin{aligned} x + ay + 2\frac{a}{3a-3} &= -1 \\ (a+1)y + 6\frac{a}{3a-3} &= 1 \\ z &= \frac{a}{3a-3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x + a\frac{-1}{a-1} + 2\frac{a}{3a-3} &= -1 \\ y &= \frac{-1}{a-1} \\ z &= \frac{a}{3a-3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-2a+3}{3a-3} \\ y &= \frac{-1}{a-1} \\ z &= \frac{a}{3a-3} \end{aligned} \right\}.$$

(b) Si $a = 0$ la matriu triangularada del sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

i el sistema triangular corresponent a aquesta matriu,

$$\left. \begin{aligned} x + 2z &= -1 \\ y + 6z &= 1 \end{aligned} \right\},$$

té dues equacions i tres incògnites; per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. La solució general és

$$\left. \begin{array}{l} x = -2z - 1 \\ y = -6z + 1 \end{array} \right\}.$$

(c) Si $a = 1$ la matriu triangularada del sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

i el sistema triangular corresponent a aquesta matriu,

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = -1 \\ 2y + 6z = 1 \\ 0 = 1 \end{array} \right\}.$$

conté una igualtat impossible. Per tant, el sistema és incompatible.

(d) Si $a = -1$, l'última transformació elemental que hem fet no és vàlida; per tant hem de continuar l'estudi del sistema a partir de la matriu anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \sim F_2]{F_2 \sim F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right).$$

El sistema triangular corresponent a aquesta matriu és

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = -1 \\ -y - 3z = -1 \\ 6z = 1 \end{array} \right\}$$

i té tres equacions i tres incògnites; per tant, el sistema és compatible determinat. La solució és

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2\frac{1}{6} = -1 \\ -y - 3\frac{1}{6} = -1 \\ z = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} + 2\frac{1}{6} = -1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{6} \end{array} \right\}.$$

Resumint, si $a \neq -1, 0$ i 1 el sistema és compatible determinat i la solució és

$$x = \frac{-2a + 3}{3a - 3}, \quad y = \frac{-1}{a - 1}, \quad \text{i} \quad z = \frac{a}{3a - 3};$$

si $a = 0$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i la solució general és

$$\left. \begin{array}{l} x = -2z - z \\ y = -6z + 1 \end{array} \right\};$$

si $a = 1$ el sistema és incompatible i, finalment, si $a = -1$ el sistema és compatible determinat i la solució és

$$x = -\frac{5}{6}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad \text{i} \quad z = \frac{1}{6}.$$

16. Estudieu, segons els valors dels paràmetres a i b , el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + ay + z = 3 \\ 3x + bz = a \\ x + 2y + z = b \end{array} \right\}.$$

Solució

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 3 & 0 & b & a \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu tenim que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 3 & 0 & b & a \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -3a & b-3 & a-9 \\ 0 & 2-a & 0 & b-3 \end{array} \right).$$

Aleshores, si permutem la segona i la tercera columna ja tindrem la matriu triangulada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & b-3 & -3a & a-9 \\ 0 & 0 & 2-a & b-3 \end{array} \right).$$

Per estudiar aquest sistema d'equacions hem de distingir els casos següents:

(a) Si $b \neq 3$ i $a \neq 2$ el sistema és compatible determinat ja que queda un sistema triangular de tres equacions amb tres incògnites sense cap igualtat del tipus

$$0 = \text{nombre diferent de zero}.$$

(b) Si $a = 2$ la matriu triangulada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & b-3 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{array} \right)$$

i s'han de distingir dos casos:

(b.1) Si $b \neq 3$ el sistema és incompatible.

(b.2) Si $b = 3$ el sistema triangular corresponent a l'última matriu té dues equacions i tres incògnites; per tant, és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(c) Si $b = 3$ continuem triangulant la matriu que teníem abans de canviar d'ordre les columnes segona i tercera

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -3a & 0 & a-9 \\ 0 & 2-a & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 3aF_3 + (2-a)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -3a & 0 & a-9 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 + 11a - 18 \end{array} \right).$$

Aleshores, tenint en compte que aquesta última transformació no és vàlida si $a = 0$ i que

$$-a^2 + 11a - 18 = 0$$

si, i només si,

$$a = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 72}}{-2} = \frac{-11 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{-11 \pm 7}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

s'han de distingir els casos següents:

(c.1) Si $a \neq 0, 2$ i 9 el sistema és incompatible ja que la tercera equació del sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és de la forma

$$0 = \text{nombre diferent de zero}.$$

(c.2) Si $a = 2$ el sistema triangular corresponent a l'última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ -6y = -7 \end{array} \right\};$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(c.3) Si $a = 9$ el sistema triangular corresponent a l'última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} x + 9y + z = 2 \\ -27y = 0 \end{array} \right\};$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(c.4) Si $a = 0$, la matriu triangulada d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

per tant, el sistema és incompatible.

Podem resumir tots aquests casos en l'esquema següent:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq 2 & \text{i } b \neq 3 \quad \text{El sistema és compatible determinat} \\ a = 2 & \left\{ \begin{array}{l} b = 3 \quad \text{El sistema és compatible indeterminat} \\ b \neq 3 \quad \text{El sistema és incompatible} \end{array} \right. \\ b = 3 & \left\{ \begin{array}{l} a \neq 2 \text{ i } 9 \quad \text{El sistema és incompatible} \\ a = 2 \quad \text{El sistema és compatible indeterminat} \\ a = 9 \quad \text{El sistema és compatible indeterminat} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

17. Resoleu el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Gauss-Jordan:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y - 3z = 14 \\ 3x - 3y + 2z = 7 \\ x - y + 3z = -7 \end{array} \right\}.$$

Solució

El mètode de triangulació de matrius de Gauss-Jordan consisteix a aconseguir mitjançant transformacions elementals per files que tots els coeficients situats a sota i a sobre dels coeficients no nuls de la diagonal principal siguin zero. L'avantatge respecte al mètode de Gauss és que una vegada triangulada la matriu tenim directament les solucions del sistema.

La matriu d'aquest sistema d'equacions és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -7 \end{array} \right).$$

Triangulant aquesta matriu tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & -7 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -12 & 13 & -28 \\ 0 & -4 & 9 & -28 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 \sim 6F_1 + F_2 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_2}}{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & -5 & 56 \\ 0 & -12 & 13 & -28 \\ 0 & 0 & 14 & -56 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3 \sim \frac{1}{14}F_3}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & -5 & 56 \\ 0 & -12 & 13 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_1 + 5F_3 \\ F_2 \sim F_2 - 13F_3}}{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & -12 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

El sistema corresponent a aquesta última matriu és

$$\left. \begin{array}{l} 12x = 36 \\ -12y = 24 \\ z = -4 \end{array} \right\}.$$

Per tant, el sistema inicial és compatible determinat i la solució és

$$x = 3, \quad y = -2, \quad \text{i} \quad z = -4.$$

18. Resoleu simultàniament pel mètode de Gauss-Jordan els sistemes d'equacions lineals següents:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \\ 5x - 8y + 6z = -2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ x - 3y + z = -2 \\ 5x - 8y + 6z = -5 \end{array} \right\}.$$

Solució

Quan tenim uns quants sistemes d'equacions de manera que tots tenen els mateixos coeficients de les incògnites, els podem resoldre simultàniament triangulant la matriu formada per aquests

coeficients de les incògnites i tantes columnes de termes independents com sistemes d'equacions tinguem.

Triangulant la matriu d'aquests dos sistemes d'equacions tindrem que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & | & 1 & -2 \\ 5 & -8 & 6 & | & -2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - 5F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & | & 0 & -5 \\ 0 & -21 & -3 & | & -14 & -15 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1 \sim 7F_1 + F_2 \\ F_3 \sim F_3 - 3F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 20 & | & 14 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & | & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & -14 & 0 \end{pmatrix}.$$

El primer sistema és incompatible ja que una de les equacions del sistema triangular és $0 = -14$.

El segon sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i la seva solució general és

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-10z + 1}{7} \\ y &= \frac{-z + 5}{7} \end{aligned} \right\}.$$

2

Determinants

2.1 *Determinants*

1. Calculeu els determinants d'ordre 2 següents:

$$(a) \begin{vmatrix} a^2 & b \\ a & b^2 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}.$$

Solució

$$\begin{vmatrix} a^2 & b \\ a & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - ab = ab(ab - 1).$$

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta).$$

$$\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = (n+1)(n-1) - n^2 = n^2 - 1 - n^2 = -1.$$

2. Calculeu els determinants d'ordre 3 següents mitjançant la regla de Sarrus:

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$$

Solució

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 8 + 4(-2)2 + 8(-1)(-5) - (-5)7 \cdot 2 - (-2)(-1)3 - 4 \cdot 8 \cdot 8 \\ = 168 - 16 + 40 + 70 - 6 - 256 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(-5)9 + 2 \cdot 6(-7) + 4 \cdot 8(-3) - (-3)(-5)(-7) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 4 \cdot 2 \cdot 9 \\ = -45 - 84 - 96 + 105 - 48 - 72 = -240.$$

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} = abc + x^3 + x^3 - bx^2 - ax^2 - cx^2 \\ = 2x^2 - (a + b + c)x^2 + abc.$$

3. Calculeu el següent determinant d'ordre 4:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Solució

Observem que la segona fila del primer determinant té dos zeros; a més, si fem una transformació elemental per columnes podem aconseguir que n'hi hagi un altre:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}_{C_1 \sim 2C_1 - 5C_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -11 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 23 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Aleshores, desenvolupant pels coeficients de la segona fila tenim que

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -11 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 23 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2) \begin{vmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 23 & 1 & -4 \end{vmatrix} \\ = -(-176 + 46 + 4 + 184 + 11 + 16) = -85.$$

Per tant,

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -85.$$

4. Sabent que A i B són matrius quadrades d'ordre 3 tals que $\det(A) = 2$ i $\det(B) = -3$, calculeu el determinant de la matriu

$$\frac{1}{2} A^2 B^{-1} A^t.$$

Solució

Aplicant les propietats dels determinants respecte de les operacions amb matrius, tenim que

$$\det\left(\frac{1}{2} A^2 B^{-1} A^t\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(A^2) \det(B^{-1}) \det(A^t) \\ = \frac{1}{8} (\det(A))^2 (\det(B))^{-1} \det(A) = -\frac{1}{3}.$$

2.2 Aplicacions dels determinants

5. Calculeu el rang de les matrius següents per menors, indicant un menor no nul d'ordre màxim:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Solució

(a) És evident que les columnes de la matriu A no són totes múltiples d'una mateixa columna; per tant, el rang com a mínim és 2, i un menor d'ordre 2 amb determinant no nul és el que s'obté en fixar les files $1a.$ i $2a.$ i les columnes $1a.$ i $2a.$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Per comprovar si el rang d'aquesta matriu és més gran que 2, hem de calcular els determinants dels menors d'ordre 3 que s'obtenen a partir de l'anterior afegint una fila i una columna.

Si afegim la tercera fila i la tercera columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la tercera fila i la quarta columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & -6 & -20 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la quarta fila i la tercera columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la quarta fila i la quarta columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & 4 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

El menor d'ordre 3 que s'obté en fixar les files $1a.$, $2a.$ i $4a.$ i les columnes $1a.$, $2a.$ i $4a.$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 5 & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & 6 & \boxed{8} \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ \boxed{4} & \boxed{1} & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

té determinant no nul; per tant, el rang de la matriu A és com a mínim 3. Finalment, per saber si el rang és 4 hem de calcular el determinant de l'únic menor d'ordre 4

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & -6 & -9 & -20 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang d'aquesta matriu és 3 i un menor d'ordre 3 amb determinant no nul és el que hem indicat abans.

(b) És evident que les columnes de la matriu B no són totes múltiples d'una mateixa columna; per tant, el rang com a mínim és 2, i un menor d'ordre 2 amb determinant no nul és el que s'obté en fixar les files $1a.$ i $2a.$ i les columnes $2a.$ i $3a.$:

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -6.$$

Calculem ara els determinants dels menors d'ordre 3 que s'obtenen quan afegim una fila i una columna a aquest menor d'ordre 2.

Si afegim la tercera fila i la primera columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \downarrow \\ 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la tercera fila i la quarta columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la tercera fila i la cinquena columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la quarta fila i la primera columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la quarta fila i la quarta columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si afegim la quarta fila i la cinquena columna,

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0.$$

Com que els determinants de tots aquests menors són nuls, el rang de la matriu B és 2 i un menor d'ordre 2 amb determinant no nul és el que hem indicat abans

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{2} & \boxed{5} & 2 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & \boxed{7} & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

6. Calculeu el rang de la matriu següent, per menors, en funció del paràmetre a :

$$\begin{pmatrix} a+3 & 1 & 2 & -a \\ a & a-1 & 1 & 2a \\ 3a+3 & a & a+3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solució

El procediment per estudiar el rang d'una matriu en funció d'un paràmetre és lleugerament diferent al que hem fet servir a l'exercici anterior. El primer que farem és trobar els valors de a per als quals existeix un menor d'ordre màxim amb determinant no nul.

Aleshores, agafem un menor qualsevol d'ordre 3 d'aquesta matriu i calculem el seu determinant:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 2 \\ a & a-1 & 1 \\ 3a+3 & a & a+3 \end{vmatrix} &= (a+3)(a-1)(a+3) + (3a+3) + 2a^2 \\ &\quad - 2(a-1)(3a+3) - a(a+3) - a(a+3) \\ &= a^3 + 5a^2 + 3a - 9 + 3a + 3 + 2a^2 \\ &\quad - 6a^2 + 6 - a^2 - 3a - a^2 - 3a \\ &= a^3 - a^2 = a^2(a-1). \end{aligned}$$

Per tant, si $a \neq 0$ i 1 el rang d'aquesta matriu és 3.

Si $a = 0$, tenim la matriu

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

que evidentment té un menor d'ordre 2 amb determinant no nul

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

És evident que el determinant del menor que s'obté quan afegim la tercera fila i la tercera columna és zero, ja que és el determinant que hem calculat en funció del paràmetre a .

El determinant del menor que s'obté quan afegim la tercera fila i la quarta columna és

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9.$$

Per tant, si $a = 0$, el rang de la matriu també és 3.

Finalment, si $a = 1$ tenim la matriu

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

que també té un menor d'ordre 2 amb determinant no nul

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & \boxed{1} & 2 & -1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

El determinant del menor que s'obté quan afegim la tercera fila i la tercera columna és zero i el determinant del que s'obté quan afegim la tercera fila i la quarta columna és

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, si $a = 1$, el rang de la matriu és 2.

7. Analitzeu, per menors, el caràcter del sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 6y + z = 4 \\ 3x - 5y - 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{array} \right\}.$$

Solució

El determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites és

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

i aquesta matriu té un menor d'ordre 2 amb determinant no nul

$$\begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{-6} & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{-5} & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -7;$$

és a dir, el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada és suficient calcular el determinant del menor d'ordre 3 que s'obté quan afegim la tercera fila i la quarta columna

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{5} & \boxed{-6} & 1 & \downarrow 4 \\ \boxed{3} & \boxed{-5} & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -28.$$

Per tant, el rang de la matriu ampliada és 3 i el sistema és incompatible.

8. Resoleu el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{array} \right\}.$$

Solució

Per comprovar si aquest sistema de 3 equacions amb 3 incògnites és de Cramer hem de calcular el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Aleshores, aquest sistema és de Cramer, compatible determinat i la solució ve donada per la regla

de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = -2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 2.$$

És a dir, la solució del sistema és

$$x = 3, \quad y = -2 \quad \text{i} \quad z = 2$$

9. Resoleu el sistema d'equacions lineals següent pel mètode de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - 5y + 5z = 3 \\ 5x - 8y + 6z = 5 \end{array} \right\}.$$

Solució

En aquest cas el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites és

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

i aquesta matriu té un menor d'ordre 2 amb determinant no nul

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & \boxed{-3} & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{-5} & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{array} \right), \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1;$$

és a dir, el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és 2. Per calcular el rang de la matriu ampliada és suficient calcular el determinant del menor d'ordre 3 que s'obté quan afegim la tercera

fila i la quarta columna

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{2} & \boxed{-3} & 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{-5} & 5 & 3 \\ 5 & -8 & 6 & 5 \end{array} \right), \quad \downarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Per tant, el rang de la matriu ampliada també és 2 i el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

Les columnes del menor d'ordre 2 amb determinant no nul són la 1a. i la 2a., aleshores agafem la x i la y com a incògnites principals. Per altra banda les files del menor d'ordre 2 amb determinant no nul són la 1a. i la 2a., aleshores la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres i la podem eliminar.

El sistema d'equacions queda reduït a

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = -z + 2 \\ 3x - 5y = -5z + 3 \end{array} \right\}.$$

Podem resoldre aquest sistema de 2 equacions amb 2 incògnites mitjançant la regla de Cramer; les solucions són

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z + 2 & -3 \\ -5z + 3 & -5 \end{vmatrix}}{-1} = 10z + 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -z + 2 \\ 3 & -5z + 3 \end{vmatrix}}{-1} = 7z.$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$\left. \begin{array}{l} x = 10z + 1 \\ y = 7z \end{array} \right\}.$$

Observem que el mètode de Cramer es pot aplicar a qualsevol sistema d'equacions lineals, que no s'ha de confondre amb la regla de Cramer que s'aplica als sistemes de Cramer.

10. Resoleu el sistema d'equacions lineals homogeni següent pel mètode de Cramer:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y + 5z + 2t + 7u &= 0 \\ 6x + 4y + 7z + 4t + 5u &= 0 \\ 3x + 2y - z + 2t - 11u &= 0 \\ 6x + 4y + z + 4t - 13u &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Solució

La matriu dels coeficients de les incògnites és la matriu B de l'exercici 9, aleshores el seu rang és 2. Evidentment el rang de la matriu ampliada també és 2, ja que tots els coeficients de l'última columna són zero. Per tant, aquest sistema és compatible indeterminat amb tres graus de llibertat.

Les columnes d'un menor d'ordre 2 amb determinant no nul són la $2a.$ i la $3a.$, aleshores agafem la y i la z com a incògnites principals. D'altra banda, les files d'aquest menor amb determinant no nul són la $1a.$ i la $2a.$, aleshores la tercera i la quarta equacions són combinació lineal de les dues primeres i les podem eliminar.

El sistema d'equacions queda reduït a

$$\left. \begin{aligned} 2y + 5z &= -3x - 2t - 7u \\ 4x + 7z &= -6x - 4t - 5u \end{aligned} \right\}.$$

Podem resoldre aquest sistema de 2 equacions amb 2 incògnites aplicant la regla de Cramer; les solucions són

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -3x - 2t - 7u & 5 \\ -6x - 4t - 5u & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{9x + 6t - 24u}{-6},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3x - 2t - 7u \\ 4 & -6x - 4t - 5u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{18u}{-6}.$$

Per tant, la solució general d'aquest sistema és

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{-3x - 2t + 8u}{2} \\ z &= -3u \end{aligned} \right\}.$$

11. Estudieu el sistema d'equacions lineals següent en funció del paràmetre a pel mètode de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a \\ x + ay - z = 1 \\ 3x + y + az = 2 \end{array} \right\}.$$

Solució

En primer lloc calculem per a quins valors de a el sistema és de Cramer; és a dir, el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites és no nul

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} &= a^3 - 3 + 1 - 3a + a - a \\ &= a^3 - 3a - 2 \end{aligned}$$

La primera arrel de l'equació $a^3 - 3a - 2 = 0$ l'hem de trobar pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

i les altres arrels són les solucions de l'equació $a^2 - a - 2 = 0$; aleshores

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

i el determinant és igual a $(a+1)^2(a-2)$.

Per tant, si $a \neq -1$ i 2 , el determinant és diferent de zero, el sistema és de Cramer, és a dir,

compatible determinat, i segons la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{a^3 - 2a - 1}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{(a+1)(a^2 - a - 1)}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{a^2 - a - 1}{(a+1)(a-2)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{-a-1}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{-1}{(a+1)(a-2)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{-a^2 + 1}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{(a+1)(1-a)}{(a+1)^2(a-2)} = \frac{1-a}{(a+1)(a-2)}.$$

Per tant, si $a \neq -1$ i 2 , el sistema és compatible determinat i la solució és

$$x = \frac{a^2 - a - 1}{(a+1)(a-2)}, \quad y = \frac{-1}{(a+1)(a-2)} \quad \text{i} \quad z = \frac{1-a}{(a+1)(a-2)}$$

Si $a = -1$, el sistema d'equacions és

$$\left. \begin{aligned} -x + y + z &= -1 \\ x - y - z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

i evidentment la primera i la segona equacions són la mateixa; per tant, podem eliminar-ne una de les dues i el sistema queda

$$\left. \begin{aligned} x - y &= z + 1 \\ 3x + y &= z + 2 \end{aligned} \right\}.$$

És clar que aquest sistema és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z+1 & -1 \\ z+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2z+3}{4},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+1 \\ 3 & z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2z-1}{4};$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2z+3}{4} \\ y &= \frac{-2z-1}{4} \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, si $a = 2$, el sistema d'equacions és

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

i la matriu dels coeficients de les incògnites té un menor d'ordre 2 amb determinant no nul

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per calcular el rang de la matriu ampliada és suficient calcular el determinant que s'obté quan afegim la tercera fila i la quarta columna

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Aleshores, el rang de la matriu ampliada és 3 i el sistema és incompatible.

12. Calculeu, si és possible, la inversa de les matrius següents per adjunts:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució

Recordem que una matriu quadrada A és invertible si, i només si, el seu determinant és diferent de zero, i en aquest cas

$$A^{-1} = \frac{(A^{ad})^t}{|A|}.$$

Per comprovar si la matriu A és invertible hem de calcular el seu determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 30 + 8 + 4 + 5 - 60 = -8.$$

Per tant, la matriu A és invertible i si representem per α_{ij} els coeficients de la matriu A^{ad} , tenim que

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10, & \alpha_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10, & \alpha_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6, \\ \alpha_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -13, & \alpha_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9, & \alpha_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \\ \alpha_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17, & \alpha_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13, & \alpha_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11. \end{aligned}$$

Aleshores l'adjunta i la inversa de la matriu A són, respectivament,

$$A^{ad} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -6 \\ -13 & 9 & 7 \\ 17 & -13 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 10 & -13 & 17 \\ -10 & 9 & -13 \\ -6 & 7 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -10 & 13 & -17 \\ 10 & -9 & 13 \\ 6 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Calculem ara el determinant de la matriu B per saber si aquesta matriu és invertible

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 - 8 - 4 - 4 - 4 = -27.$$

Per tant la matriu B és invertible i si representem per β_{ij} els coeficients de la matriu B^{ad} , tenim que

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & \beta_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, & \beta_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \\ \beta_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -6, & \beta_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & \beta_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6, \\ \beta_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, & \beta_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6, & \beta_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Aleshores la inversa de la matriu B és

$$B^{-1} = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

Espais vectorials

3.1 *Espais vectorials*

1. Calculeu a de manera que el vector $(0, 2, a)$ sigui combinació lineal dels vectors $(4, 0, 5)$ i $(2, a, 3)$.

Solució

Hem de trobar per a quins valors de a existeixen λ_1 i $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$(0, 2, a) = \lambda_1(4, 0, 5) + \lambda_2(2, a, 3).$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_2 = 2 \\ 5\lambda_1 + 3\lambda_2 = a \end{array} \right\}.$$

Aleshores, el vector $(0, 2, a)$ és combinació lineal dels vectors $(4, 0, 5)$ i $(2, a, 3)$ si, i només si,

aquest sistema d'equacions és compatible. Triangulant la matriu d'aquest sistema tenim que

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ a \end{array} \right. \end{pmatrix}_{F_3 \sim 4F_3 - 5F_1} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 2 & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4a \end{array} \right. \end{pmatrix}_{\substack{F_3 \sim F_2 \\ F_2 \sim F_3}} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right. \end{pmatrix}_{F_3 \sim 2F_3 - aF_2} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 2 & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 4a \\ 4 - 4a^2 \end{array} \right. \end{pmatrix}.$$

Evidentment aquest sistema és compatible determinat si, i només si, $4 - 4a^2 = 0$, és a dir, si, i només si, $a = \pm 1$.

Si $a = 1$, la solució del sistema és

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 2(2) = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

Per tant, $(0, 2, 1) = -1(4, 0, 5) + 2(2, 1, 3)$.

Si $a = -1$, la solució del sistema és

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 2(-2) = 0 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}.$$

Per tant, $(0, 2, -1) = 1(4, 0, 5) - 2(2, -1, 3)$.

2. Estudieu la dependència o independència lineal dels vectors $(1, -2, 0, 3)$, $(2, -1, 0, 1)$, $(0, 2, 1, -1)$ i $(5, -2, 1, 4)$ de $\mathbb{R}^4$.

Solució

Recordem que n vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ són linealment independents si, i només si, els únics escalars $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ que compleixen la igualtat

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

són $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

En el nostre cas, tenim que

$$\lambda_1(1, -2, 0, 3) + \lambda_2(2, -1, 0, 1) + \lambda_3(0, 2, 1, -1) + \lambda_4(5, -2, 1, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

Igualant component a component tenim el sistema homogeni d'equacions

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_4 &= 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Aleshores, és evident que, si aquest sistema és compatible determinat, l'única solució és la trivial i els vectors són linealment independents i, si el sistema és compatible indeterminat, hi ha solucions diferents de la trivial i els vectors són linealment dependents.

Per estudiar aquest sistema hem de triangular la seva matriu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_4 \sim F_4 - 3F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \sim 3F_4 + 5F_2} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \sim F_4 - 7F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Evidentment, aquest sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat, per tant, els vectors són linealment dependents. Per trobar una relació de dependència entre aquests vectors n'hi ha prou amb trobar una solució particular del sistema

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_4 &= 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 8\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\lambda_4 \\ \lambda_2 &= -2\lambda_4 \\ \lambda_3 &= -\lambda_4 \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, una de les possibles relacions de dependència entre aquests quatre vectors és

$$(1, -2, 0, 3) + 2(2, -1, 0, 1) + (0, 2, 1, -1) - (5, -2, 1, 4) = (0, 0, 0, 0).$$

3. Estudieu la dependència o independència lineal dels vectors $(2, 0, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ i $(2, 1, -1, 2)$.

Solució

Hem de comprovar si existeixen escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ no tots nuls tals que

$$\lambda_1(2, 0, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 3, 4) + \lambda_3(2, 1, -1, 2) = (0, 0, 0, 0).$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Per saber si és compatible determinat o indeterminat triangulem la seva matriu mitjançant transformacions elementals per files

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} &\underset{\substack{F_3 \sim 2F_3 - F_1 \\ F_4 \sim 2F_4 - F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \sim 2F_3 - 5F_2 \\ F_4 \sim 2F_4 - 7F_2}}{\simeq} \\ &\underset{F_4 \sim 13F_4 - 3F_3}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema triangular corresponent a aquesta última matriu és un sistema homogeni de tres equacions amb tres incògnites, per tant, és compatible determinat i l'única solució és la trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aleshores, els tres vectors són linealment independents.

4. Demostreu que els vectors $(1, 2, -1)$, $(2, 1, -2)$ i $(3, 2, 1)$ són base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les components del vector $(-2, 2, -10)$ en aquesta base.

Solució

Sabem que $\mathbb{R}^3$ és un espai vectorial de dimensió 3; per tant, per demostrar que aquests tres vectors són base n'hi ha prou amb comprovar que són linealment independents.

Igualtem a zero una combinació lineal d'aquests vectors

$$\lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(2, 1, -2) + \lambda_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0);$$

aleshores, igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

D'altra banda, per calcular les components del vector $(-2, 2, -10)$ en aquesta base hem d'expressar-lo com a combinació lineal dels vectors $(1, 2, -1)$, $(2, 1, -2)$ i $(3, 2, 1)$

$$(-2, 2, -10) = \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(2, 1, -2) + \lambda_3(3, 2, 1).$$

Igualant component a component, tenim un altre sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= -2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 &= -10 \end{aligned} \right\}.$$

En el primer capítol, havíem vist que si dos sistemes tenen els mateixos coeficients de les incògnites es poden resoldre simultàniament. En aquest cas, hem de triangular la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -10 \end{array} \right).$$

Observem que el primer sistema és homogeni; per tant, no hem posat la seva columna de termes independents ja que sempre seran zero.

Triangulem aquesta matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array} \right).$$

El sistema homogeni és compatible determinat; per tant, els tres vectors són base de $\mathbb{R}^3$.

El sistema triangular corresponent al segon sistema d'equacions és

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -2 \\ -3\lambda_2 - 4\lambda_3 = 6 \\ 4\lambda_3 = -12 \end{array} \right\},$$

que també és compatible determinat, i la seva solució és

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3(-3) = -2 \\ -3\lambda_2 - 4(-3) = 6 \\ \lambda_3 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2(2) + 3(-3) = -2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -3 \end{array} \right\}.$$

Per tant, les components del vector $(-2, 2, -10)$ en la base

$$\mathcal{B} = \{ (1, 2, -1), (2, 1, -2), (3, 2, 1) \}$$

són $(3, 2, -3)$; és a dir, $(-2, 2, -10) = 3(1, 2, -1) + 2(2, 1, -2) - 3(3, 2, 1)$.

5. Les components del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}_1 = \{ (2, 1, 0), (0, 1, 2), (2, 0, 1) \}$ són $(-2, 3, 1)$. Calculeu les components d'aquest vector en la base

$$\mathcal{B}_2 = \{ (1, 1, -3), (2, 1, -14), (1, 2, 4) \}.$$

Solució

Com que tenim les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}_1$, sabem que

$$\vec{u} = -2(2, 1, 0) + 3(0, 1, 2) + (2, 0, 1) = (-2, 1, 7).$$

Aleshores, per calcular les components d'aquest vector en la base $\mathcal{B}_2$ l'hem d'expressar com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base

$$(-2, 1, 7) = \lambda_1(1, 1, -3) + \lambda_2(2, 1, -14) + \lambda_3(1, 2, 4).$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = -2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -3\lambda_1 - 14\lambda_2 + 4\lambda_3 = 7 \end{array} \right\}.$$

Per resoldre aquest sistema, triangulem la seva matriu pel mètode de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ -3 & -14 & 4 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 + 3F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -8 & 7 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_1 + 2F_2 \\ F_3 \sim F_3 - 8F_2}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 4 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_1 + 3F_3 \\ F_2 \sim F_2 + F_3}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -65 \\ 0 & -1 & 0 & | & -20 \\ 0 & 0 & -1 & | & -23 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és compatible determinat i la solució és:

$$\lambda_1 = -65, \quad \lambda_2 = 20 \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 23.$$

Per tant, les components del vector $\vec{u} = (-2, 1, 7)$ en la base

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, -3), (2, 1, -14), (1, 2, 4)\}$$

són $(-65, 20, 23)$; és a dir, $(-2, 1, 7) = -65(1, 1, -3) + 20(2, 1, -14) + 23(1, 2, 4)$.

6. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$. Si un vector $\vec{u}$ té components (x, y, z) en la primera base i (x', y', z') en la segona, expresseu x, y i z en funció de x', y' i z' .

Solució

Les components del vector $\vec{u}$ en la primera base són (x, y, z) ; per tant,

$$\vec{u} = x(2, 1, 1) + y(1, 2, 1) + z(1, 1, 2),$$

i les components del vector $\vec{u}$ en la segona base són (x', y', z') ; per tant,

$$\vec{u} = x'(1, 0, 1) + y'(0, 1, 1) + z'(1, 1, 0).$$

Igualant aquestes dues expressions component a component, tenim que

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + z &= x' + z' \\ x + 2y + z &= y' + z' \\ x + y + 2z &= x' + y' \end{aligned} \right\}.$$

Per expressar x , y i z en funció de x' , y' i z' , hem de resoldre aquest sistema d'equacions. Aleshores, triangulem la seva matriu pel mètode de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x' + z' \\ 1 & 2 & 1 & y' + z' \\ 1 & 1 & 2 & x' + y' \end{array} \right) & \underset{\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x' + z' \\ 0 & 3 & 1 & -x' + 2y' + z' \\ 0 & 1 & 3 & x' + 2y' - z' \end{array} \right) \underset{\substack{F_1 \sim 3F_1 - F_2 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_2}}{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 4x' - 2y' + 2z' \\ 0 & 3 & 1 & -x' + 2y' + z' \\ 0 & 0 & 8 & 4x' + 4y' - 4z' \end{array} \right) \underset{\substack{F_1 \sim 4F_1 - F_3 \\ F_2 \sim 8F_2 - F_3}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 0 & 0 & 12x' - 12y' + 12z' \\ 0 & 24 & 0 & -12x' + 12y' + 12z' \\ 0 & 0 & 8 & 4x' + 4y' - 4z' \end{array} \right). \end{aligned}$$

La solució d'aquest sistema d'equacions i, per tant, la relació entre les components del vector $\vec{u}$ en les dues bases és

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' - y' + z'}{2} \\ y &= \frac{-x' + y' + z'}{2} \\ z &= \frac{x' + y' - z'}{2} \end{aligned} \right\}.$$

7. Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sabent que les components dels vectors $(1, 1, 2)$, $(2, 0, 3)$ i $(1, 1, 0)$ en aquesta base són $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 2)$ i $(1, 1, -2)$, respectivament, calculeu quins són els vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$.

Solució

El vector $(1, 1, 2)$ té components $(2, 1, 0)$ en la base $\mathcal{B}$; per tant,

$$(1, 1, 2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

De la mateixa manera, el vector $(2, 0, 3)$ té components $(2, 0, 2)$ en la base $\mathcal{B}$; per tant,

$$(2, 0, 3) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3.$$

Finalment, el vector $(1, 1, 0)$ té components $(1, 1, -2)$ en la base $\mathcal{B}$; per tant,

$$(1, 1, 0) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3.$$

Aleshores, hem de calcular els vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ a partir de les tres igualtats anteriors

$$\left. \begin{aligned} 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 &= (1, 1, 2) \\ 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 &= (2, 0, 3) \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 &= (1, 1, 0) \end{aligned} \right\}.$$

Restant les dues primeres igualtats, tenim que

$$2\vec{e}_3 - \vec{e}_2 = (1, -1, 1)$$

i substituint a la tercera

$$\vec{e}_1 - (1, -1, 1) = (1, 1, 0) \implies \vec{e}_1 = (2, 0, 1).$$

Aleshores, podem substituir aquest resultat a la primera i a la segona igualtats i resulta que

$$2(2, 0, 1) + \vec{e}_2 = (1, 1, 2) \implies \vec{e}_2 = (-3, 1, 0),$$

$$2(2, 0, 1) + 2\vec{e}_3 = (2, 0, 3) \implies \vec{e}_3 = (-1, 0, \frac{1}{2}).$$

Per tant, els vectors de la base $\mathcal{B}$ són:

$$\vec{e}_1 = (2, 0, 1), \quad \vec{e}_2 = (-3, 1, 0) \quad \text{i} \quad \vec{e}_3 = (-1, 0, \frac{1}{2}).$$

8. De les següents bases de $\mathbb{R}^3$, digueu quines tenen orientació positiva i quines negativa.

(a) $\mathcal{B}_1 = \{(-2, 3, -1), (1, 2, 5), (-3, 2, 9)\}.$

(b) $\mathcal{B}_2 = \{(-1, 4, -1), (8, -8, 6), (8, -3, -2)\}.$

(c) $\mathcal{B}_3 = \{(-1, 5, -4), (5, 0, 1), (2, -2, 3)\}.$

Solució

Només hem de calcular el determinant d'aquestes tres bases per saber quina és la seva orientació.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -36 - 2 - 45 - 6 + 20 - 27 = -96,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -8 & -3 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 24 + 192 - 64 - 18 + 64 = 182,$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 40 + 10 - 2 + 75 = 123.$$

Per tant, la primera de les bases té orientació negativa i les altres dues tenen orientació positiva.

9. Donades les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, calculeu la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Solució

En aquest cas obtindrem la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ a partir de les matrius del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a la canònica i de $\mathcal{B}_1$ a la canònica.

La matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{E} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir d'aquestes dues matrius, podem formar l'esquema següent:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{E} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{D^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{C = D^{-1}E} & & & \end{array}$$

Recordem que, en aquest esquema, primer multipliquem per la matriu E i després per D^{-1} i, quan escrivim un producte de matrius, aquestes s'escrueixen de dreta a esquerra. Aleshores, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ és $C = D^{-1}E$, on

$$\begin{aligned} C = D^{-1}E &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. Calculeu les components del vector $(6, 9, -3)$ en la base formada pels vectors $(2, 3, 1)$, $(7, 9, 5)$ i $(3, 4, 3)$.

Solució

Sigui $\mathcal{B}_c$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}$ la base

$$\mathcal{B} = \{(2, 3, 1), (7, 9, 5), (3, 4, 3)\},$$

aleshores l'esquema del canvi de base és

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on C és la matriu que expressa les components dels vectors de la base $\mathcal{B}$ en la base canònica

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si les components del vector $\vec{u}$ en la base canònica són $(6, 9, -3)$, les seves components en la base $\mathcal{B}$ seran

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Per calcular la inversa de C hem de triangular la matriu següent:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \sim 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim 3F_1 + 7F_2 \\ F_3 \sim F_3 + F_2 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 2 & -18 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim F_1 - F_3 \\ F_2 \sim 2F_2 + F_3 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -14 & 12 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & -10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim \frac{1}{6}F_1 \\ F_2 \sim -\frac{1}{6}F_2 \\ F_3 \sim \frac{1}{2}F_3 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

És a dir, la inversa de la matriu C és

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les components del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$ són

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Les components del vector $(6, 9, -3)$ en la base $\mathcal{B} = \{(2, 3, 1), (7, 9, 5), (3, 4, 3)\}$ són $(5, 2, -6)$.

- 11.** Si $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (4, -1)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ i el vector $\vec{u}$ té components $(1, b)$ en la base $\mathcal{B}_1$ i components $(6, a)$ en la base $\mathcal{B}_2$, trobeu els valors de a i b .

Solució

Calculem en primer lloc la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. La matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

mentre que la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_c$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, l'esquema del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ el podem representar de la forma següent

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{D^{-1}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) \\ \vec{u} \uparrow & & \vec{u} \uparrow & & \vec{u} \uparrow \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & D^{-1}C & & & \end{array}$$

i la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ és

$$\begin{aligned} B = D^{-1}C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, i com que tenim les components del vector $\vec{u}$ en les base $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, s'ha de complir que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ a \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{cases} 3 + 3b = 12 \\ -1 + 5b = 2a \end{cases},$$

o bé $b = 3$ i $a = 7$.

12. Les components dels vectors $(1, 2, -2)$, $(-3, 1, 0)$ i $(-1, 3, 2)$ en la base

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$$

són $(1, 0, -1)$, $(-4, 1, 7)$ i $(3, -1, -5)$, respectivament. Calculeu les components dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ en la base canònica.

Solució

Sigui $\mathcal{B}_c$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$, aleshores tenim el canvi de base següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & \vec{u} \end{array}$$

on C és la matriu de les components dels vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ en la base canònica, és a dir, és la matriu que hem de calcular.

En primer lloc, sabem que les components del vector $(1, 2, -2)$ en la base $\mathcal{B}$ són $(1, 0, -1)$; per tant, es compleix

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Les components del vector $(-3, 1, 0)$ en la base $\mathcal{B}$ són $(-4, 1, 7)$; per tant,

$$C \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i finalment les components del vector $(-1, 3, 2)$ en la base $\mathcal{B}$ són $(3, -1, -5)$, per tant,

$$C \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aquestes tres igualtats es poden escriure en una sola igualtat entre matrius d'ordre 3

$$C \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i multiplicant per la inversa de la segona matriu tindrem que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}^{-1}.$$

La inversa d'aquesta matriu és

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

aleshores tindrem que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & -3 \\ 8 & -9 & 6 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les components dels vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ en la base canònica són $(-2, 8, -2)$, $(10, -9, -8)$ i $(-3, 6, 0)$, respectivament. És a dir,

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= (-2, 8, -2) \\ \vec{u}_2 &= (10, -9, -8) \\ \vec{u}_3 &= (-3, 6, 0).\end{aligned}$$

13. Els vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ són base de $\mathbb{R}^3$ i les components dels vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ en aquesta base són $(5, 2, -3)$, $(1, -1, -1)$ i $(3, 1, -2)$, respectivament. Calculeu les components dels vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ en la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Solució

Siguin $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ les dues bases de l'enunciat, és a dir,

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}.$$

Aleshores tenim el canvi de base següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\ \vec{u} \longmapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on C és la matriu dels vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ expressats en la base $\mathcal{B}_2$, és a dir, és la matriu que hem de calcular.

D'altra banda, sabem quines són les components dels vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$, és a dir, sabem que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, per calcular la matriu C hem de calcular la inversa de C^{-1} :

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \sim 5F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim 5F_3 + 3F_1 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim 7F_1 + F_2 \\ F_3 \sim 7F_3 - 2F_2 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 20 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 25 & -10 & 35 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim F_1 + 4F_3 \\ F_2 \sim 5F_2 - F_3 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & 105 & -35 & 140 \\ 0 & -35 & 0 & -35 & 35 & -35 \\ 0 & 0 & -5 & 25 & -10 & 35 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \sim \frac{1}{35}F_1 \\ F_2 \sim \frac{-1}{35}F_2 \\ F_3 \sim \frac{-1}{5}F_3 \end{array} \\
 & \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Per tant, tenim que

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

i les components dels vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ en la base $\mathcal{B}_2$ són $(3, 1, -5)$, $(-1, -1, 2)$ i $(4, 1, -7)$, respectivament.

14. Sigui $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dues bases de $\mathbb{R}^3$ tals que

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \quad \vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

Calculeu la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Solució

De les dades de l'enunciat, podem escriure directament la matriu del canvi de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, ja que tenim les components dels vectors de la base $\mathcal{B}_2$ en la base $\mathcal{B}_1$, o dit d'una altra manera, els vectors de la base $\mathcal{B}_2$ expressats en funció dels vectors de la base $\mathcal{B}_1$.

Aleshores, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ serà la inversa d'aquesta matriu.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \\
 \vec{u} \mapsto & & \vec{u}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\
 \vec{u} \mapsto & & \vec{u}
 \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ja que les columnes d'aquesta matriu són les components dels vectors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$.

La inversa de C i, per tant, la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$, és

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observem que aleshores podem escriure

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(-\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3), \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3), \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{2}(-\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3).$$

3.2 Subespais vectorials

15. Trobeu una base i les equacions implícites del subespai de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (3, 5, 1, 7), (1, 3, 3, 5), (3, 2, -5, 1), (2, 3, 0, 4), (5, 4, -7, 1) \rangle.$$

Solució

D'entre aquests cinc vectors hem d'escollir el màxim nombre possible de vectors linealment independents de manera que els altres siguin combinació lineal dels que hem escollit. Per això, triangulem la matriu formada per les components d'aquests vectors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \sim 3F_2 - 5F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 - 7F_1}} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -9 & -1 & -13 \\ 0 & 8 & -18 & -2 & -26 \\ 0 & 8 & -18 & -2 & -32 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 \sim F_3 - 2F_2 \\ F_4 \sim F_4 - 2F_2}}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -9 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, tenim que els dos primers vectors són linealment independents, el tercer és combinació lineal dels dos primers (tres primeres columnes de les matrius), el quart també és combinació lineal dels dos primers (columnes primera, segona i quarta de les matrius) i els vectors primer, segon i cinquè són linealment independents (columnes primera, segona i cinquena de les matrius). Per tant, F té dimensió 3 i una base d'aquest subespai és

$$F = \langle (3, 5, 1, 7), (1, 3, 3, 5), (5, 4, -7, 1) \rangle.$$

Per calcular les equacions implícites de F hem de trobar les relacions que han de complir les components del vector (x, y, z, t) perquè aquest vector sigui combinació lineal de $(3, 5, 1, 7)$, $(1, 3, 3, 5)$ i $(5, 4, -7, 1)$. Per això, hem de triangular la matriu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & | & x \\ 5 & 3 & 4 & | & y \\ 1 & 3 & -7 & | & z \\ 7 & 5 & 1 & | & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 - 5F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 - 7F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & | & x \\ 0 & 4 & -13 & | & 3y - 5x \\ 0 & 8 & -26 & | & 3z - x \\ 0 & 8 & -32 & | & 3t - 7x \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim F_3 - 2F_2 \\ F_4 \sim F_4 - 2F_2}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & | & x \\ 0 & 4 & -13 & | & 3y - 5x \\ 0 & 0 & 0 & | & 9x - 6y + 3z \\ 0 & 0 & 0 & | & 3x - 6y + 3t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim F_4 \\ F_4 \sim F_3}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & | & x \\ 0 & 4 & -13 & | & 3y - 5x \\ 0 & 0 & 0 & | & 3x - 6y + 3t \\ 0 & 0 & 0 & | & 9x - 6y + 3z \end{pmatrix}.$$

Per tant, l'equació implícita del subespai F és

$$9x - 6y + 3z = 0 \quad \text{o bé} \quad 3x - 2y + z = 0.$$

- 16.** Trobeu una base i unes equacions implícites minimal del subespai F de $\mathbb{R}^4$ que té equacions implícites

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 5z + 7t &= 0 \\ 4x - 2y + 7z + 5t &= 0 \\ 2x - y + z - 5t &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Solució

De la mateixa manera que a l'exercici anterior, hem de resoldre el sistema format per les equacions implícites d'aquest subespai. Aleshores, triangulem la matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim 3F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i la seva solució general és

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 5z + 7t &= 0 \\ -3z - 9t &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= \frac{y + 8t}{2} \\ z &= -3t \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, els vectors de F són els de la forma

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{y+8t}{2}, y, -3t, t\right) = y\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right) + t(4, 0, -3, 1)$$

i una base d'aquest subespai és la formada pels vectors

$$F = \left\langle \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right), (4, 0, -3, 1) \right\rangle \quad \text{o bé} \quad F = \langle (1, 2, 0, 0), (4, 0, -3, 1) \rangle.$$

D'altra banda, unes equacions implícites d'un subespai són minimal si cap d'elles és combinació lineal de les altres, és a dir, si són linealment independents. En el nostre cas les obtenim a partir de la matriu triangulada del sistema d'equacions implícites inicials

$$\left. \begin{aligned} 2x - y + 5z + 7t &= 0 \\ -3z - 9t &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

17. Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ que té equacions implícites

$$\left. \begin{aligned} 2x + (a+1)y + z + (a-2)t &= 0 \\ ax + 3y + 2az + 2t &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Demostreu que $\dim F = 2$ per a qualsevol valor de a .

Solució

Recordem que si les equacions implícites d'un subespai F de $\mathbb{R}^n$ són $AX = 0$, és a dir, A és la matriu dels coeficients de les incògnites d'unes equacions implícites de F ; aleshores

$$\dim F = n - \text{rang}(A).$$

Per tant, en aquest exercici, és suficient calcular el rang de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & a-2 \\ a & 3 & 2a & 2 \end{pmatrix}$$

i ho fem triangular-la:

$$\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & a-2 \\ a & 3 & 2a & 2 \end{pmatrix}_{F_2 \sim 2F_2 - aF_1} \simeq \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & a-2 \\ 0 & -a^2 - a + 6 & 3a & -a^2 + 2a + 4 \end{pmatrix}.$$

Si $-a^2 - a + 6 \neq 0$ el rang de la matriu és 2, per tant, $\dim F = 4 - 2 = 2$. Tenint en compte que $-a^2 - a + 6 = 0$ si, i només si,

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases},$$

podem assegurar que si $a \neq -3$ i 2 , aleshores $\dim F = 2$.

D'altra banda, si $a = -3$ o $a = 2$ tenim que la matriu triangularada és

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

respectivament. Aleshores, en aquests dos casos el rang de la matriu també és 2 i $\dim F = 4 - 2 = 2$.

Per tant, per a qualsevol valor de a es compleix que $\dim F = 2$.

18. Donats els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$F = \langle (1, 2, 1, 3), (2, 0, 3, 2) \rangle$$

$$G = \langle (-1, 6, -3, 5), (0, 4, -1, 4), (3, 2, 1, -1) \rangle,$$

comproveu que $F \subset G$.

Solució

És evident que els vectors $(1, 2, 1, 3)$ i $(2, 0, 3, 2)$ són linealment independents; per tant són base de F , i que els vectors $(-1, 6, -3, 5)$, $(0, 4, -1, 4)$, $(3, 2, 1, -1)$ també són linealment independents; per tant, són base de G . És a dir, $\dim F = 2$ i $\dim G = 3$.

Per comprovar que $F \subset G$ hem de comprovar que els vectors de la base de F també pertanyen a G , és a dir, que els vectors $(1, 2, 1, 3)$ i $(2, 0, 3, 2)$ són combinació lineal dels vectors $(-1, 6, -3, 5)$, $(0, 4, -1, 4)$ i $(3, 2, 1, -1)$:

$$\begin{aligned}(1, 2, 1, 3) &= \lambda_1(-1, 6, -3, 5) + \lambda_2(0, 4, -1, 4) + \lambda_3(3, 2, 1, -1), \\(2, 0, 3, 2) &= \lambda_1(-1, 6, -3, 5) + \lambda_2(0, 4, -1, 4) + \lambda_3(3, 2, 1, -1).\end{aligned}$$

Igualant component a component, tenim els sistemes d'equacions

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1 \\ 6\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 3 \end{aligned} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{aligned} -\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 2 \\ 6\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 2 \end{aligned} \right\},$$

i hem de comprovar que els dos són compatibles. Per això, triangulem la matriu

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 + 6F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 3F_1 \\ F_4 \sim F_4 + 5F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 20 & 8 & 12 \\ 0 & -1 & -8 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 14 & 8 & 12 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 4F_3 + F_2 \\ F_4 \sim F_4 - F_2}]{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 20 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_4 \sim 2F_4 - F_3}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 20 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Evidentment, aquests dos sistemes són compatibles determinats, per tant, $F \subset G$.

19. Donats els subespais de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} F &= \langle (3, 1, 3, 2), (5, 3, 2, 3) \rangle, \\ G &= \langle (1, 3, -5, 0), (7, 5, 1, 4) \rangle, \end{aligned}$$

comproveu que $F = G$.

Solució

Calculem en primer lloc les equacions implícites del subespai G triangulant la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & | & x \\ 3 & 5 & | & y \\ -5 & 1 & | & z \\ 0 & 4 & | & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 + 5F_1}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 7 & | & x \\ 0 & -16 & | & y - 3x \\ 0 & 36 & | & z + 5x \\ 0 & 4 & | & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 4F_3 + 9F_2 \\ F_4 \sim 4F_4 + F_2}]{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 7 & | & x \\ 0 & -16 & | & y - 3x \\ 0 & 0 & | & -7x + 9y + 4z \\ 0 & 0 & | & -3x + y + 4t \end{pmatrix}.$$

Per tant, les equacions implícites de G són

$$\left. \begin{aligned} -7x + 9y + 4z &= 0 \\ -3x + y + 4t &= 0 \end{aligned} \right\};$$

aleshores, per demostrar que $F \subset G$ hem de comprovar que els vectors de la base de F també pertanyen a G , és a dir, que compleixen les equacions implícites de G .

El vector $(3, 1, 3, 2)$ les compleix, ja que

$$\left. \begin{aligned} -7(3) + 9(1) + 4(3) &= 0 \\ -3(3) + 1 + 4(2) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

i el vector $(5, 3, 2, 3)$ també les compleix, ja que

$$\left. \begin{aligned} -7(5) + 9(3) + 4(2) &= 0 \\ -3(5) + 3 + 4(3) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, $F \subset G$ i, com que els dos subespais tenen dimensió 2, es compleix que $F = G$.

20. Donada la base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (-1, -1, 0)\}$

- (a) *Escriuiu la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$.*
- (b) *Escriuiu les equacions del canvi de base corresponent.*
- (c) *Si el pla H té equació $x' - 2y' - 3z' = 0$ en la base $\mathcal{B}$, quina és la seva equació en la base canònica?*

Solució

(a) És evident que la matriu del canvi de base de la base $\mathcal{B}$ a la base canònica és

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Les equacions d'aquest canvi de base són

$$\left. \begin{array}{l} x = x' + y' - z' \\ y = x' + 2y' - z' \\ z = x' + 2y' \end{array} \right\}.$$

(c) Per calcular l'equació del pla H en la base canònica hem de posar (x', y', z') en funció (x, y, z) i substituir. Com que la inversa de la matriu C és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenim que les equacions del canvi de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$ són

$$\left. \begin{array}{l} x' = 2x - 2y + z \\ y' = -x + y \\ z' = -y + z \end{array} \right\}.$$

Finalment, en substituir obtenim que

$$\begin{aligned} x' - 2y' - 3z' &= 0 \\ 2x - 2y + z - 2(-x + y) - 3(-y + z) &= 0 \\ 4x - y - 2z &, \end{aligned}$$

és a dir, l'equació del pla H en la base canònica és $4x - y - 2z = 0$.

21. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dues bases de $\mathbb{R}^2$ tals que la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ és

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Expresseu $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$.
 (b) Si l'equació del subespai H en la base $\mathcal{B}_2$ és $3x'' + y'' = 0$, quina és la seva equació en la base $\mathcal{B}_1$?

Solució

De la matriu del canvi de base

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

podem dir directament que

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ \vec{e}_2 &= -4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{aligned}$$

i que les equacions d'aquest canvi de base són

$$\left. \begin{aligned} x'' &= 3x' - 4y' \\ y'' &= -x' + y' \end{aligned} \right\}.$$

(a) Per expressar $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, podem calcular la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, que és precisament

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 &= -4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2. \end{aligned}$$

(b) Com que ja tenim (x'', y'') en funció de (x', y') , només hem de substituir:

$$\begin{aligned} 3x'' + y'' &= 0 \\ 3(3x' - 4y') + (-x' + y') &= 0 \\ 8x' - 11y' &= 0, \end{aligned}$$

és a dir, l'equació de H en la base $\mathcal{B}_1$ és $8x' - 11y' = 0$.

22. L'equació d'un pla de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ és $2x' + y' - z' = 0$.
Calculeu la seva equació en la base $\mathcal{B}'' = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$.

Solució

De les dades de l'enunciat podem escriure directament la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$ i la del canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}_c$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'') & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per o obtenir l'equació del pla en la base $\mathcal{B}''$, necessitem tenir (x', y', z') en funció de (x'', y'', z'') . Aquesta relació es correspon amb la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{D^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & C^{-1}D & & & \end{array}$$

És immediat que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i que} \quad C^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per tant

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad \left. \begin{aligned} x' &= x'' + 2y'' + z'' \\ y' &= x'' - y'' \\ z' &= -x'' + z'' \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, només cal substituir a l'equació del pla

$$\begin{aligned} 2x' + y' - z' &= 0 \\ 2(x'' + 2y'' + z'') + (x'' - y'') - (-x'' + z'') &= 0 \\ 2x'' + 3y'' &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, l'equació del pla en la base $\mathcal{B}''$ és $2x'' + 3y'' = 0$.

23. L'equació implícita del pla vectorial P de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ és $x' + 2y' - z' = 0$ i les equacions implícites de la recta vectorial R en la base canònica són

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ \alpha x + 2y + z &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

(a) Calculeu l'equació implícita de P en la base canònica.

(b) Trobeu els valors de α per als quals la recta R està continguda al pla P .

Solució

(a) Per a obtenir les equacions implícites de P en la base canònica, necessitem l'expressió de les components (x', y', z') en funció de (x, y, z) . Aquesta relació es correspon amb el canvi de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}'$.

De les dades de l'enunciat podem escriure directament la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$. Aleshores, la matriu del canvi de base que estem buscant serà la inversa d'aquesta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

És immediat que la inversa d'aquesta matriu és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

i que l'expressió de (x', y', z') en funció de (x, y, z) és

$$\left. \begin{array}{l} x' = z \\ y' = x - y \\ z' = y - z \end{array} \right\}.$$

Així, l'equació del pla en la base canònica és

$$\begin{aligned} x' + 2y' - z' &= 0 \\ z + 2(x - y) - (y - z) &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

(b) Per tal que la recta estigui inclosa en el pla s'ha de complir que el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ \alpha x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

sigui compatible indeterminat, o bé que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Com que aquest determinat dona $5 - 5\alpha$, resulta que l'únic valor de α per al qual la recta està inclosa en el pla és $\alpha = 1$.

4

L'espai vectorial euclidià

4.1 L'espai vectorial euclidià

1. Trobeu els dos vectors unitaris de $\mathbb{R}^3$ que formen angles de 45° i 135° amb els vectors $\vec{u} = (3, 4, 5)$ i $\vec{v} = (1, 0, -1)$, respectivament.

Solució

Hem de trobar els vectors de la forma $\vec{w} = (a, b, c)$ amb $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ que compleixin

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a + 4b + 5c}{\sqrt{50}} \implies 3a + 4b + 5c = 5$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a - c}{\sqrt{2}} \implies a - c = -1.$$

Per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions següent

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b + 5c = 5 \\ a - c = -1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\}.$$

De la segona equació tenim que $a = c - 1$ i, substituint a la primera, obtenim que

$$3(c - 1) + 4b + 5c = 5$$

$$4b + 8c = 8$$

$$b = -2c + 2.$$

Finalment, substituïm a la tercera equació:

$$(c - 1)^2 + (-2c + 2)^2 + c^2 = 1$$

$$c^2 - 2c + 1 + 4c^2 - 8c + 4 + c^2 = 1$$

$$6c^2 - 10c + 4 = 0.$$

La solució d'aquesta equació de segon grau, que simplificada és $3c^2 - 5c + 2 = 0$, és

$$c = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} 1 \\ 2/3 \end{cases}.$$

Els dos vectors que compleixen les condicions de l'enunciat són

$$\vec{w}_1 = (0, 0, 1) \quad \text{i} \quad \vec{w}_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2).$$

2. Els vectors de la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ compleixen que $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$, $\|\vec{u}_3\| = 2$, $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ formen un angle de 60° , $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ són perpendiculars i $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ formen un angle de 120° . Donats els vectors $\vec{u} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ i $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$, calculeu l'angle que formen.

Solució

Sabem que

$$\cos \alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

aleshores, per poder calcular el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ i les normes d'aquests dos vectors necessitem saber els productes dels vectors de la base $\mathcal{B}$ entre ells:

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1/2$	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 0$
$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$	$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -1$	$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 2 \cdot 2 \cdot \cos 0^\circ = 4$

Per tant,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) \\ &= 2 + 1 - 1/2 - 1 + 3 - 1 + 12 = \frac{31}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} &= (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \cdot (2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) \\ &= 4 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 9,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} &= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) \\ &= 1 + 1/2 + 1/2 + 1 - 3 - 3 + 36 = 33,\end{aligned}$$

i

$$\cos \alpha(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{31/2}{3\sqrt{33}} = \frac{31}{6\sqrt{33}}.$$

Per tant,

$$\alpha(\vec{u}, \vec{v}) = 63.102^\circ.$$

Observació: Una altra manera de calcular els productes escalars és a partir de la matriu del producte escalar

$$G = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

aleshores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{31}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 33.$$

3. Demostreu les igualtats següents relatives a la norma i al producte escalar.

$$(a) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

$$(b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Solució

(a) Comprovarem que

$$\begin{aligned}
& \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \\
& \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\
& = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\
& = 2\vec{u} \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

(b) De manera semblant, comprovarem que

$$\begin{aligned}
& \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}. \\
& \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\
& = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\
& = 4\vec{u} \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

4. L'equació del pla H en la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{3}(2, -2, 1), \frac{1}{3}(2, 1, -2) \right\}$$

és $3x' + 2y' + 4z' = 0$. Trobeu l'equació del pla H en la base canònica.**Solució**

En aquest cas, la base $\mathcal{B}'$ és ortonormal, per tant, el vector $\vec{w}$ que en aquesta base té components $(3, 2, 4)$ és perpendicular al pla H . Per calcular les components de $\vec{w}$ en la base canònica, tenim el canvi de base

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
\vec{w} \mapsto & & \vec{u}
\end{array}$$

on

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les components del vector $\vec{w}$ en la base canònica són

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i l'equació del pla H en la base canònica és $5x + 2y = 0$.

Observació: Si l'equació d'un pla P en una base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és $ax + by + cz = 0$, el vector $\vec{w} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3$ no és, en general, perpendicular al pla. Només podem afirmar-ho en el cas que la base $\mathcal{B}$ sigui ortonormal.

5. L'equació del pla P de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ és $-2x' + y' + z' = 0$, mentre que les components en la base $\mathcal{B}'' = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ d'un generador de la recta R són $(-2, 1, 1)$.

- (a) Digueu si la recta R està continguda o no en el pla P
 (b) Digueu si la recta R és ortogonal o no al pla P .

Solució

Observació: Per fer qualsevol de les dues comprovacions hem de tenir el pla (una base o l'equació implícita) i la recta (un generador o les equacions implícites) expressades en la mateixa base.

Per a comprovar si la recta està continguda en el pla, qualsevol de les tres bases de l'enunciat, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ i $\mathcal{B}_c$, serviria. En canvi, per comprovar la perpendicularitat, intervé el producte escalar, i aquest és més fàcil de calcular en la base canònica.

Per tant, calcularem l'equació implícita del pla P en la base canònica i les components del generador de R també en la base canònica.

Per calcular l'equació implícita de P en la base canònica necessitem l'expressió de les components (x', y', z') en funció de (x, y, z) . Aquesta relació es correspon amb el canvi de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}'$. De les dades de l'enunciat podem escriure directament la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$. Aleshores,

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \end{array}$$

on

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si (x, y, z) són les components canòniques d'un vector qualsevol, es compleix que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

d'on

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}(x + y - z) \\ y' &= \frac{1}{2}(x - y + z) \\ z' &= \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{aligned} \right\}.$$

Llavors, l'equació del pla P en la base canònica $\mathcal{B}_c$ s'obté de

$$-2x' + y' + z' = 0$$

$$-2 \cdot \frac{1}{2}(x + y - z) + \frac{1}{2}(x - y + z) + \frac{1}{2}(-x + y + z) = 0$$

$$-x - y + 2z = 0.$$

D'altra banda, les components del generador de la recta R en la base canònica són

$$-2(2, 1, 1) + (1, 2, 1) + (1, 1, 2) = (-2, 1, 1).$$

Per tant, resumint:

(a) Com que el vector $(-2, 1, 1)$ (components en la base canònica del generador de R) no compleix l'equació (en la base canònica) de P , tenim que la recta R no està inclosa en P .

(b) I com que $(-2, 1, 1)$ no és múltiple del vector $(-1, -1, 2)$ ortogonal a P , deduïm que la recta R tampoc és ortogonal al pla P .

6. Trobeu una base ortogonal del subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels tres vectors següents: $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 3, 2, 1)$ i $(1, 0, 1, 0)$.

Solució

En primer lloc, és fàcil veure que aquests tres vectors són linealment independents.

Si posem $\vec{u}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, 3, 2, 1)$ i $\vec{u}_3 = (1, 0, 1, 0)$, obtindrem una base ortogonal del subespai aplicant el mètode de Gram-Schmidt:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, 2, -1, 0);$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = (2, 3, 2, 1) - \frac{6}{6}(1, 2, -1, 0) \\ &= (1, 1, 3, 1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0) - \frac{0}{6}(1, 2, -1, 0) - \frac{4}{12}(1, 1, 3, 1) \\ &= (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 3, 1) = \frac{1}{3}(2, -1, 0, -1).\end{aligned}$$

Tenim en compte que podem multiplicar qualsevol d'aquests vectors per coeficients no nuls, tenim que la base formada pels vectors $(1, 2, -1, 0)$, $(1, 1, 3, 1)$ i $(2, -1, 0, -1)$ és una base ortogonal d'aquest subespai.

7. Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^3$ que té equació implícita $-x + 2y - 3z = 0$. Trobeu una base ortonormal de F .

Solució

En primer lloc hem de trobar una base d'aquest subespai. Aïllant la x de l'equació implícita, tenim que $x = 2y - 3z$. Aleshores, els vectors de F són els de la forma

$$(x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1),$$

és a dir,

$$F = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle.$$

Aleshores posem $\vec{u}_1 = (2, 1, 0)$ i $\vec{u}_2 = (-3, 0, 1)$ i apliquem el mètode de Gram-Schmidt:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (2, 1, 0);$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = (-3, 0, 1) + \frac{6}{5}(2, 1, 0) \\ &= \frac{1}{5}(-3, 6, 5).\end{aligned}$$

També podem prendre un múltiple d'aquest segon vector, és a dir, els vectors $(2, 1, 0)$ i $(-3, 6, 5)$ són una base ortogonal de F .

Finalment, dividint aquests dos vectors per la seva norma, obtenim una base ortonormal de F :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{70}}(-3, 6, 5) \right\}.$$

8. Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$. Trobeu una base ortogonal i una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ expressada en termes dels vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$.

Solució

Comencem amb la base $\mathcal{B}$ i apliquem el mètode de Gram-Schmidt als seus vectors. Com a ajuda a l'hora de calcular els productes escalars entre els diferents vectors que apareixeran a l'exercici, escrivim la taula

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 2$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 3$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1;$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{e}_2 - \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \vec{e}_2 - \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \vec{e}_1 \\ &= \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= \vec{e}_3 - \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2 = \vec{e}_3 - \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \vec{e}_1 - \frac{\vec{e}_3 \cdot (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}{(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= \vec{e}_3 - \frac{1}{1} \vec{e}_1 - \frac{-1 + 2}{1 - 1 - 1 + 2} (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_3 - \vec{e}_1 - (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Per tant, la base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$ és una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Ja hem calculat a l'apartat anterior que $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{e}_1\| = 1$ i que $\|\vec{v}_2\| = \|\vec{e}_1 - \vec{e}_2\| = 1$. D'altra banda,

$$\|\vec{v}_3\|^2 = (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2 - 2 - 2 + 3 = 1.$$

És a dir, en aquest cas la base $\mathcal{B}'$ ja és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

9. Una base amb orientació positiva $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ compleix que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$. Calculeu el producte vectorial dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ que en aquesta base tenen components $(2, -1, -1)$ i $(1, 3, 2)$.

Solució

A l'exercici anterior hem vist que

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$$

és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ i, com que,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

resulta que $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$ és una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Calculem ara les components de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}'$: la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ és

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aleshores, és immediat que la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les components de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}'$ són, respectivament,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Com que $\mathcal{B}'$ és una base ortonormal positiva, podem calcular el producte vectorial dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mitjançant un determinant:

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \vec{v}_1 - 6\vec{v}_2 + 12\vec{v}_3 \\ &= \vec{e}_1 - 6(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 12(-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 7\vec{e}_1 - 18\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3.\end{aligned}$$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = 7\vec{e}_1 - 18\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3$, és a dir, és el vector que en la base $\mathcal{B}$ té components $(7, -18, 12)$.

10. Sigui F el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors $(2, 1, -1, 3)$ i $(2, -1, 1, 1)$. Calculeu una base i les equacions implícites de l'ortogonal de F , $F^\perp$.

Solució

Observació: Quan parlem de l'ortogonal d'un subespai vectorial F , és una manera abreviada de referir-se al seu suplementari ortogonal $F^\perp$.

Calculem les equacions implícites de $F^\perp$. Per això posem $\vec{u}_1 = (2, 1, -1, 3)$ i $\vec{u}_2 = (2, -1, 1, 1)$, aleshores un vector $\vec{v} = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ pertany a $F^\perp$ si, i només si,

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1 \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, les equacions implícites de $F^\perp$ són

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z + 3t &= 0 \\ 2x - y + z + t &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, per trobar una base de $F^\perp$ hem de resoldre el sistema format per aquestes equacions implícites, i per això hem de triangular la matriu associada a aquest sistema,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{F_2 \sim F_1 - F_2} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solució general d'aquest sistema és

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z + 3t &= 0 \\ 2y - 2z + 2t &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} 2x + (z - t) - z + 3t &= 0 \\ y &= z - t \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} x &= -t \\ y &= z - t \end{aligned} \right\}.$$

Per tant,

$$F^\perp = \langle (0, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle.$$

11. L'equació implícita del subespai F de $\mathbb{R}^3$ és $x - 2y + z = 0$. Calculeu una base i les equacions implícites de $F^\perp$.

Solució

És evident que l'equació implícita de F la podem escriure $x = 2y - z$, per tant, els vectors de F són els de la forma

$$(x, y, z) = (2y - z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

i una base d'aquest subespai és $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Aleshores, pel mateix raonament de l'exercici anterior tindrem que les equacions implícites de $F^\perp$ són

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}.$$

És immediat que la solució general d'aquest sistema d'equacions és

$$\begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} \implies F^\perp = \langle (1, -2, 1) \rangle.$$

Evidentment, aquest últim resultat l'haguéssim pogut escriure directament de l'equació implícita de F .

12. Els vectors d'una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ compleixen que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 5$. Calculeu el suplementari ortogonal del subespai generat pel vector que en la base $\mathcal{B}$ té components $(1, -2)$.

Solució

Siguin (x', y') les components en la base $\mathcal{B}$ d'un vector genèric de $\mathbb{R}^2$. Aleshores,

$$F^\perp = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } (x', y') \cdot (1, -2) = 0\}.$$

En aquest cas no estem treballant en una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, per tant, per calcular el producte escalar de dos vectors hem de procedir de la manera següent:

$$\begin{aligned}(x', y') \cdot (1, -2) &= (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \\ &= x' - 4x' + 2y' - 10y' = -3x' - 8y'.\end{aligned}$$

Per tant, l'equació implícita de $F^\perp$ en la base $\mathcal{B}$ és $3x' + 8y' = 0$ i, és evident que

$$F^\perp = \langle 8\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \rangle.$$

13. Calculeu la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (3, -2, 1, 0)$ sobre el subespai F generat pels vectors $(1, 2, -1, 0)$, $(2, 3, 2, 1)$.

Solució

En aquest cas, utilitzarem el mètode general per calcular la projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai, és a dir, si $F = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, la projecció ortogonal del vector $\vec{x}$ sobre el subespai F es el vector $\vec{x}' = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, on x_1 i x_2 són solució del sistema

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{x} \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix}.$$

En el nostre cas, la matriu dels productes escalars dels generadors de F és

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix},$$

mentre que la dels productes escalars del vector $\vec{u}$ pels generadors de F és

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I el sistema d'equacions lineals

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

té solució

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Aleshores, la projecció ortogonal de $\vec{u}$ sobre aquest subespai és

$$\vec{u}' = P_F(\vec{u}) = -\frac{2}{3}(1, 2, -1, 0) + \frac{1}{3}(2, 3, 2, 1) = \frac{1}{3}(0, -1, 4, 1).$$

- 14.** Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $(3, 1, -4)$ respecte al subespai de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $(1, 2, -2)$ i $(1, 2, -1)$.

Solució

Recordem que si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ és una base ortogonal del subespai F , la projecció ortogonal del vector $\vec{x}$ sobre aquest subespai és

$$\vec{x}' = P_F(\vec{x}) = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n, \quad \text{on} \quad x_i = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i},$$

i el simètric d'aquest mateix vector $\vec{x}$ respecte al subespai F és

$$\vec{x}'' = S_F(\vec{x}) = 2P_F(\vec{x}) - \vec{x}.$$

Per tant, calcularem en aquest cas la projecció ortogonal i el simètric a partir d'una base ortogonal de F .

Aplicant el mètode de Gram-Schmidt, tenim que

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -2);$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (1, 2, -1) - \frac{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, -2)}{(1, 2, -2) \cdot (1, 2, -2)} (1, 2, -2) = (1, 2, -1) - \frac{7}{9} (1, 2, -2) \\ &= \frac{7}{9} (2, 4, 5). \end{aligned}$$

Per tant,

$$F = \langle (1, 2, -2), (2, 4, 5) \rangle$$

i aquests vectors són una base ortogonal d'aquest subespai.

Aleshores,

$$\begin{aligned} P_F(3, 1, -4) &= \frac{(3, 1, -4) \cdot (1, 2, -2)}{(1, 2, -2) \cdot (1, 2, -2)} (1, 2, -2) + \frac{(3, 1, -4) \cdot (2, 4, 5)}{(2, 4, 5) \cdot (2, 4, 5)} (2, 4, 5) \\ &= \frac{13}{9} (1, 2, -2) - \frac{10}{45} (2, 4, 5) = (1, 2, -4); \end{aligned}$$

$$S_F(3, 1, -4) = 2(1, 2, -4) - (3, 1, -4) = (-1, 3, -4).$$

15. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del vector $\vec{u} = (3, 2, 7)$ respecte al pla H d'equació implícita $2x - y + z = 0$

Solució

Siguin $\vec{x}'$ i $\vec{x}''$ les projeccions ortogonals de $\vec{x}$ sobre els subespais H i $H^\perp$, respectivament, tal com es veu a la figura 4.1.

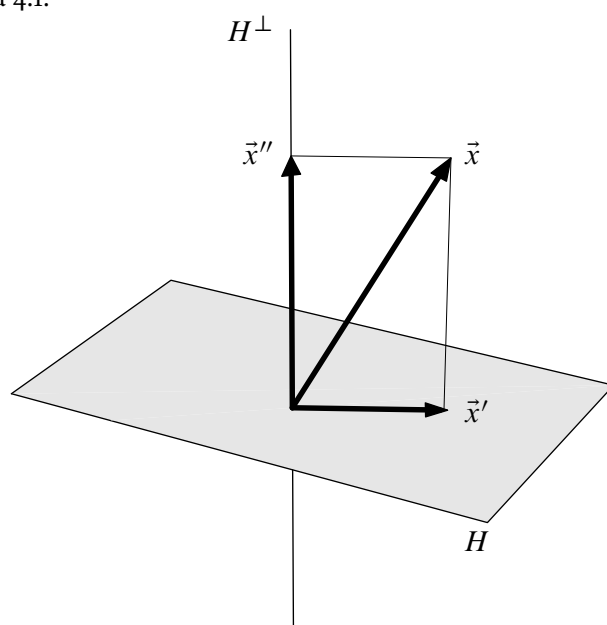


Figura 4.1: Projeccions ortogonals d'un vector

En aquest cas és més fàcil calcular directament $\vec{x}''$, ja que $H^\perp = \langle (2, -1, 1) \rangle$ i

$$\vec{x}'' = P_{H^\perp}(3, 2, 7) = \frac{(3, 2, 7) \cdot (2, -1, 1)}{(2, -1, 1) \cdot (2, -1, 1)} (2, -1, 1) = \frac{11}{6} (2, -1, 1),$$

per tant

$$\vec{x}'' = P_{H^\perp}(\vec{u}) = \frac{1}{6} (22, -11, 11).$$

D'altra banda, és evident que $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$, o dit d'una altra manera, $\vec{x} = P_H(\vec{x}) + P_{H^\perp}(\vec{x})$. Per tant,

$$\vec{x}' = P_H(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{x}'' = (3, 2, 7) - \frac{1}{6} (22, -11, 11) = \frac{1}{6} (-4, 23, 31).$$

De la mateixa manera que a l'exercici anterior, el simètric de $\vec{x}$ respecte al pla H és

$$\vec{x}^* = S_H(\vec{x}) = 2\vec{x}' - \vec{x} = \frac{1}{3}(-4, 23, 31) - (3, 2, 7) = \frac{1}{3}(-13, 17, 10).$$

16. Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 2$, $\|\vec{e}_3\| = 3$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = 120^\circ$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = 90^\circ$ i $\widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = 60^\circ$. Si H és el pla de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ i $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, determineu:

- (a) una base ortogonal de H expressada en termes dels vectors $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$;
- (b) la projecció ortogonal del vector $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ sobre el pla H .

Solució

(a) En primer lloc, calculem la taula dels productes escalars dels vectors de la base $\mathcal{B}$:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 4$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 4$	$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 9$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -2$	$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 3$

Aleshores, aplicant la fórmula del mètode de Gram-Schmidt, obtenim:

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2;$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) - \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \frac{4 - 2 + 3}{4 - 2 - 2 + 4}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) - \frac{5}{4}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \simeq 4(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) - 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Per tant, la base ortogonal del pla H buscada és

$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\}.$$

(b) Aplicant la fórmula del càlcul de la projecció ortogonal pel cas que la base sigui ortogonal, es té:

$$\vec{w}' = P_H(\vec{w}) = x_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_2(-\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3),$$

on

$$x_1 = \frac{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)} = \frac{4 + 2 - 2 - 4 - 3}{4 - 2 - 2 + 4} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(-\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3)}{(-\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)} \\ &= \frac{-4 - 2 + 10 + 20 + 15 - 12 - 36}{4 - 10 - 10 + 100 - 60 - 60 + 144} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$P_H(\vec{w}) = -\frac{3}{4}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - \frac{1}{12}(-\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) = \frac{1}{12}(-8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3) = -\frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

Així, la projecció ortogonal del vector $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ sobre el pla H és

$$P_H(\vec{w}) = -\frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

4.2 Solucions aproximades d'un sistema lineal: mínims quadrats

17. Comproveu que el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \\ x + z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

és incompatible, trobeu la millor aproximació aplicant el mètode dels mínims quadrats i l'error quadràtic corresponent.

Solució

Triangulem la matriu del sistema per comprovar que és incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 2F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right).$$

Com que la tercera equació queda $0 = -3$, el sistema és incompatible.

Ja tenim el sistema d'equacions $AX = B$ on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtindrem la millor aproximació pel mètode dels mínims quadrats resolent el sistema d'equacions lineals $A^t AX = A^t B$, on

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

i

$$A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, per resoldre aquest últim sistema, tornem a triangular la matriu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \sim 2F_3 - F_1]{F_2 \sim 4F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 11F_3 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 48 & 12 \end{array} \right).$$

D'aquí s'obté que

$$x = \frac{3}{4}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{4}.$$

L'error quadràtic és $\epsilon = \|AX - B\|$, on X és la solució trobada.

$$AX - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 1 + 4 + 0} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

18. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ \alpha y + z = 0 \\ x + (\alpha + 1)y + \alpha z = \alpha + 1 \end{array} \right\},$$

- (a) Discutiu-lo en funció del paràmetre α i resoleu-lo en els casos en què sigui compatible.
- (b) Per als valors de α que el fan incompatible, trobeu les solucions obtingudes en aplicar el mètode dels mínims quadrats i calculeu l'error quadràtic corresponent a les solucions trobades.

Solució

(a) Estudiem aquest sistema pel mètode de Cramer. En primer lloc, calculem el determinant de la matriu dels coeficients de les incògnites:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 - (\alpha + 1) = \alpha^2 - \alpha.$$

Les arrels de l'equació $\alpha^2 - \alpha = 0$ són $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$. Per tant, per a $\alpha \neq 0, 1$, el sistema és compatible determinat.

Si $\alpha = 0$ tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\},$$

que evidentment és compatible indeterminat.

Finalment, si $\alpha = 1$ ens queda

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \quad \text{amb} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

i el sistema és, doncs, incompatible.

Si $\alpha \neq 0, 1$, aplicant la regla de Cramer, s'obté

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha + 1 & \alpha + 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{-\alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{-1}{\alpha - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix}}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

I si $\alpha = 0$, és clar que la solució general del sistema és

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 - x \\ z = 0 \end{array} \right\}.$$

(b) Per a $\alpha = 1$, el sistema d'equacions $AX = B$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per aplicar el mètode dels mínims quadrats hem de resoldre el sistema $A^t AX = A^t B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resolent aquest sistema triangularant la matriu corresponent s'obté

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{d'on} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = \frac{1 - 3z}{3} \end{array} \right\}.$$

L'error quadràtic comès en les solucions anteriors és el mateix per a totes elles. Podem prendre, doncs, qualsevol d'elles i calcular-lo. Així, per exemple, si fem $z = 0$, tenim que $x = 1$ i $y = \frac{1}{3}$. Substituint aquests valors en els primers membres de cada equació i restant el terme independent, obtenim el valor buscat:

$$\epsilon = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

19. Ajusteu, pel mètode dels mínims quadrats, una recta als punts de la taula següent:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	-2	1	2	5	5

i dibuixeu la gràfica d'aquesta recta.

Solució

Intentem trobar una recta $y = ax + b$ que passi per aquests sis punts; aleshores els coeficients a i b hauran de complir

$$\left. \begin{array}{l} -2a + b = -1 \\ -a + b = -2 \\ b = 1 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \\ 3a + b = 5 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Evidentment aquest sistema $AX = B$ és incompatible. Aleshores, per trobar a i b de manera que l'error quadràtic sigui mínim hem de resoldre el sistema $A^t AX = A^t B$:

$$\begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 10 \end{pmatrix}$$

i les solucions són

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{52}{35} \quad \text{i} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 31 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{97}{105}.$$

Per tant, l'equació de la recta és $y = \frac{52x}{35} + \frac{97}{105}$ i a la figura 4.2 es pot veure la seva gràfica.

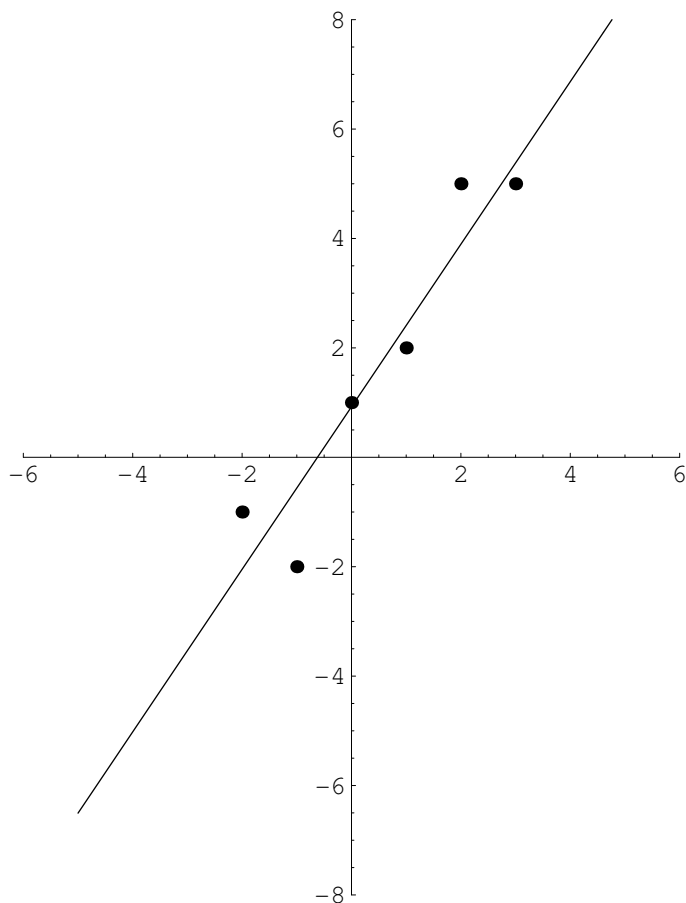


Figura 4.2: $y = \frac{52x}{35} + \frac{97}{105}$

20. Ajusteu, pel mètode dels mínims quadrats, una paràbola als punts de la taula següent

x	-4	-2	-1	0	2	4
y	5	4	1	-1	0	2

Dibuixeu la seva gràfica i calculeu l'error quadràtic comès.

Solució

Intentem trobar la paràbola d'equació $y = ax^2 + bx + c$ que passi per aquests sis punts. Aleshores els coeficients a , b i c hauran de complir

$$\left. \begin{array}{l} 16a - 4b + c = 5 \\ 4a - 2b + c = 4 \\ a - b + c = 1 \\ c = -1 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{array} \right\} \quad \text{o bé} \quad \begin{pmatrix} 16 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, aquest sistema $AX = B$ és incompatible. Aleshores per trobar a , b i c de manera que l'error quadràtic sigui mínim hem de resoldre el sistema d'equacions $A^t AX = A^t B$:

$$\begin{pmatrix} 545 & -1 & 41 \\ -1 & 41 & -1 \\ 41 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 129 \\ -21 \\ 11 \end{pmatrix}$$

i les solucions són $a = 3/14$, $b = -1/2$ i $c = 2/7$. Per tant, l'equació de la paràbola és

$$y = \frac{3}{14}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{7}$$

i a la figura 4.3 hi ha la seva gràfica.

L'error quadràtic comès és $\|AX - B\|$ on la X és la solució obtinguda. En aquest cas

$$AX - B = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/14 \\ -1/2 \\ 2/7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\epsilon = \frac{1}{7} \sqrt{25 + 169 + 0 + 81 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{280}}{7}.$$

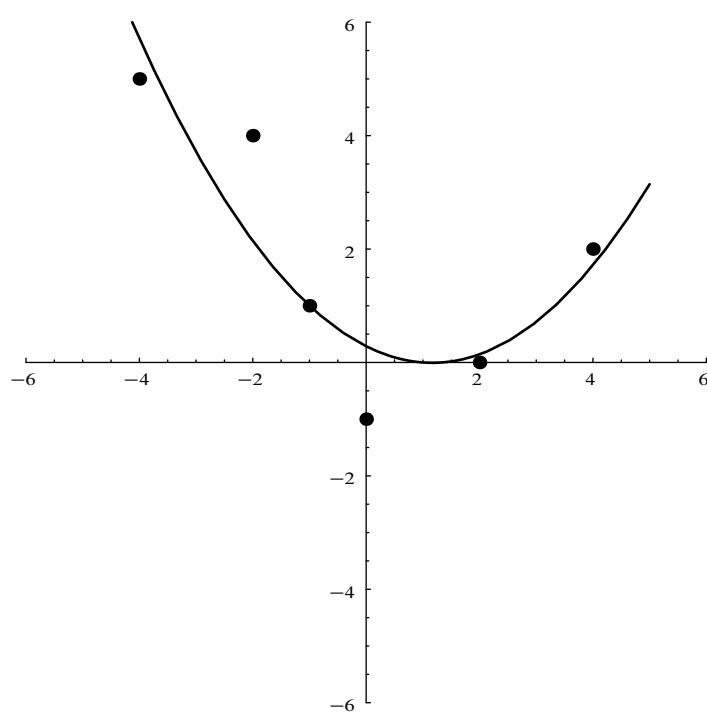


Figura 4.3: $y = \frac{3}{14}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{7}$

5

*Transformacions lineals***5.1 Transformacions lineals i endomorfismes**

1. La transformació $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ve definida per

$$f(x, y, z) = (2x - z, x - y + z).$$

(a) Demostreu, a partir de la definició, que f és una transformació lineal.

(b) Calculeu $f(1, 3, -2)$ i $f^{-1}(4, 3)$.

Solució

(a) Per demostrar que f és una transformació lineal hem de comprovar que es compleixen les dues propietats següents:

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}), \quad \text{per a tot } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3;$$

$$f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}), \quad \text{per a tot } \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ i } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Per comprovar la primera igualtat, posem $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, aleshores

$$\begin{aligned} f(\vec{u} + \vec{v}) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2), x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) + z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2 - z_1 - z_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + z_1 + z_2) \\ &= (2x_1 - z_1, x_1 - y_1 + z_1) + (2x_2 - z_2, x_2 - y_2 + z_2) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Per comprovar la segona igualtat, posem $\vec{u} = (x, y, z)$, aleshores

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u}) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2\lambda x - \lambda z, \lambda x - \lambda y + \lambda z) = \lambda(2x - z, x - y + z) = \lambda f(\vec{u}). \end{aligned}$$

Per tant, la transformació f és lineal.

(b) Per calcular la imatge del vector $(1, 3, -2)$ hem de substituir la x , la y i la z pels valors 1, 3 i -2 , respectivament,

$$f(1, 3, -2) = (2 \cdot 1 - (-2), 1 - 3 - 2) = (4, -4).$$

Finalment, per calcular l'antiimatge del vector $(4, 3)$ hem de trobar tots els vectors $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tals que $f(\vec{u}) = (4, 3)$. Si posem $\vec{u} = (x, y, z)$ resulta que

$$f(\vec{u}) = (2x - z, x - y + z) = (4, 3).$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} 2x - z &= 4 \\ x - y + z &= 3 \end{aligned} \right\}.$$

Evidentment aquest sistema és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$\left. \begin{aligned} z &= 2x - 4 \\ y &= 3x - 7 \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, l'antiimatge del vector $(4, 3)$ és

$$f^{-1}(4, 3) = \{ (x, 3x - 7, 2x - 4) \mid x \in \mathbb{R} \},$$

és a dir, la imatge de qualsevol vector de la forma $(x, 3x - 7, 2x - 4)$ amb x arbitrari és el vector $(4, 3)$.

2. La matriu de la transformació lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en les bases canòniques és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les imatges dels vectors $(2, 1, -1, 3)$ i $(-3, 1, 0, 2)$ i les antiimatges dels vectors $(1, 1)$ i $(-1, 2)$.

Solució

Per calcular les imatges d'aquests dos vectors només cal que multipliquem la matriu A per les seves components:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, $T(2, 1, -1, 3) = (3, 13)$ i $T(-3, 1, 0, 2) = (-5, 13)$.

D'altra banda, per calcular les antiimatges dels vectors $(1, 1)$ i $(-1, 2)$, hem de trobar els vectors (x, y, z, t) tals que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre aquests dos sistemes d'equacions triangulant la matriu

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)_{F_2 \sim 2F_2 + F_1} \simeq \left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 7 & 3 & 3 \end{array} \right).$$

És immediat que les solucions d'aquests dos sistemes d'equacions són

$$\left. \begin{array}{l} x = -10y - 11t + 5 \\ z = 7y - 7t - 3 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} x = -10y - 11t + 4 \\ z = 7y - 7t - 3 \end{array} \right\}.$$

Per tant,

$$T^{-1}(1, 1) = \{(-10y - 11t + 5, y, 7y - 7t - 3, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}$$

$$T^{-1}(-1, 2) = \{(-10y - 11t + 4, y, 7y - 7t - 3, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}.$$

3. La matriu de la transformació lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en les bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ és

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les imatges dels vectors $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ i $3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

Solució

Com a l'exercici anterior, només cal multiplicar la matriu A per les components dels vectors $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ i $3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $T(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = -6\vec{u}_1$ i $T(3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = 7\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$.

4. La matriu de l'endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ és

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculeu les antiimatges del vector $-3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Solució

En aquest cas hem de trobar els vectors de components (x, y, z) en la base $\mathcal{B}$ tals que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per resoldre aquest sistema d'equacions, triangulem la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \underset{F_3 \sim 2F_2 - 3F_1}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array} \right),$$

a partir de la qual, és immediat que la solució del sistema és $x = 3$, $y = -1$ i $z = 2$. Per tant,

$$T^{-1}(-3\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

5. La transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ queda definida en forma explícita per

$$f(x, y, z) = (2x + y + 4z, x + 2y + z, 3x + 5z, -2x + 3y + 2z).$$

Trobeu una base i les equacions implícites de la imatge del subespai de $\mathbb{R}^3$

$$V = \langle (2, 1, 1), (-1, 3, 2) \rangle.$$

Solució

(a) Recordem que, si un subespai V està generat pels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, la seva imatge està generada pels vectors $f(\vec{u}_1)$ i $f(\vec{u}_2)$. En el nostre cas,

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (9, 5, 11, 1) \\ f(-1, 3, 2) &= (9, 7, 7, 15) \end{aligned}$$

per tant $f(V) = \langle (9, 5, 11, 1), (9, 7, 7, 15) \rangle$. Com que aquests dos vectors són linealment independents, ja formen base de $f(V)$, és a dir, $\{(9, 5, 11, 1), (9, 7, 7, 15)\}$ és una base de $f(V)$.

Per calcular les seves equacions implícites, podem imposar que la matriu

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & x \\ 5 & 7 & y \\ 11 & 7 & z \\ 1 & 15 & t \end{pmatrix}$$

tingui rang 2. Com que el menor d'ordre 2 format per la 1a. i 2a. files i per les columnes 1a. i 2a. és no nul, les equacions implícites s'obtenen en igualar a zero els dos menors d'ordre 3 següents:

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & x \\ 5 & 7 & y \\ 11 & 7 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} 9 & 9 & x \\ 5 & 7 & y \\ 1 & 15 & t \end{vmatrix} = 0.$$

En conseqüència, les equacions implícites de $f(V)$ són

$$\begin{cases} -7x + 6y + 3z = 0 \\ 34x - 63y + 9t = 0 \end{cases}.$$

6. La transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ compleix que

$$\left. \begin{aligned} f(2, 1, 3) &= (0, -2) \\ f(-3, -3, -5) &= (-2, 4) \\ f(1, 3, 2) &= (3, -2) \end{aligned} \right\}.$$

Calculeu $f(4, -5, 4)$ i $f^{-1}(5, 3)$.

Solució

El primer que podem fer en aquest cas és trobar la matriu de f en les bases canòniques. Si A és aquesta matriu, s'ha de complir que

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

o, el que és el mateix,

$$A \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'aquesta igualtat podem aïllar la matriu A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -6 \\ 7 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un cop tenim la matriu de f en les bases canòniques, podem procedir com en exercicis anteriors. Per calcular la imatge del vector $(4, -5, 4)$, fem el producte de matrius

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és a dir, $f(4, -5, 4) = (-9, 0)$.

Per obtenir les antiimatges del vector $(5, 2)$ hem de trobar els vectors (x, y, z) tals que

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i la resolució d'aquest sistema d'equacions és immediata:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ z = x - 1 \end{cases}.$$

Per tant, $f^{-1}(5, 2) = \{(x, x + 6, x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

7. La transformació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ve donada per

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, 2x + y + 4z, -2x + y - 8z).$$

Trobeu una base i les equacions implícites de l'antiimatge del subespai $W = \langle (4, 5, 2), (3, -1, -2) \rangle$.

Solució

En aquest cas hem de trobar tots els vectors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $f(x, y, z) \in W$, és a dir,

$$f(x, y, z) = \alpha(4, 5, 2) + \beta(3, -1, -2).$$

Dit d'una altra manera, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4\alpha + 3\beta \\ 2x + y + 4z = 5\alpha - \beta \\ -2x + y - 8z = 2\alpha - 2\beta \end{cases},$$

resolució que fem pel mètode de Gauss:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4\alpha + 3\beta \\ 2 & 1 & 4 & 5\alpha - \beta \\ -2 & 1 & -8 & 2\alpha - 2\beta \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + 2F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4\alpha + 3\beta \\ 0 & -5 & 10 & -3\alpha - 7\beta \\ 0 & 7 & -14 & 10\alpha + 4\beta \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 5F_3 + 7F_2}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 15 & 11\alpha - 6\beta \\ 0 & -5 & 10 & -3\alpha - 7\beta \\ 0 & 0 & 0 & 29\alpha - 29\beta \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aquest sistema és compatible si $29\alpha - 29\beta = 0$, és a dir, si $\alpha = \beta$. En aquest cas la solució general és,

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-15z + 5\alpha}{5} = -3z + \alpha \\ y &= \frac{10z + 10\alpha}{5} = 2z + 2\alpha \end{aligned} \right\}$$

i els vectors de $f^{-1}(W)$ són els de la forma

$$(x, y, z) = (-3z + \alpha, 2z + 2\alpha, z) = z(-3, 2, 1) + \alpha(1, 2, 0).$$

Per tant, $f^{-1}(W) = \langle (-3, 2, 1), (1, 2, 0) \rangle$, i com que aquests vectors són linealment independents formen base de $f^{-1}(W)$. Finalment, és evident que l'equació implícita d'aquest subespai és $2x - y + 8z = 0$.

8. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, respectivament. La transformació lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\left. \begin{aligned} T(\vec{u}_1) &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ T(\vec{u}_2) &= -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned} \right\}.$$

- (a) Escriviu la matriu de T en les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$.
 (b) Calculeu la imatge del vector de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, i l'antiimatge del vector de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

Solució

(a) De la definició de matriu d'una transformació lineal en unes bases $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ és immediat que

$$M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La imatge del vector $\vec{u} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ és el vector que en la base $\mathcal{B}_2$ té components

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},$$

és a dir, $T(\vec{u}) = 7\vec{e}_1 - 5\vec{e}_3$.

D'altra banda, l'antiimatge del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ està formada pels vectors de $\mathbb{R}^2$ de la forma $\vec{w} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ tals que $T(\vec{w}) = \vec{v}$, que en termes matricials és

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Com que la solució del sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{array} \right\}$$

és $x_1 = 3, x_2 = 1$, tenim que $f^{-1}(\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

9. La matriu associada a l'endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ respecte a la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la imatge del vector $\vec{v} = (-2, 3, 4)$.

(b) Trobeu els valors de k per als quals el vector $(2k, 3, 1-k)$ té antiimatge i calculeu-la.

Solució

(a) Evidentment les components del vector $\vec{v}$ en la base canònica són $(-2, 3, 4)$; aleshores, per calcular la imatge d'aquest vector hem de multiplicar la matriu A per aquestes components

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$T(-2, 3, 4) = (-1, -14, 1).$$

(b) Hem de trobar els vectors $\vec{u} = (x, y, z)$ tals que $T(\vec{u}) = (2k, 3, 1-k)$. La imatge del vector $\vec{u}$ és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ -x - 4z \\ -y + z \end{pmatrix}.$$

Evidentment s'ha de complir que

$$\left. \begin{array}{l} y - z = 2k \\ -x - 4z = 3 \\ -y + z = 1 - k \end{array} \right\}.$$

Per estudiar aquest sistema, triangulem la seva matriu

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2k \\ -1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1-k \end{array} \right)_{\substack{F_1 \sim F_2 \\ F_2 \sim F_1}} &\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2k \\ 0 & -1 & 1 & 1-k \end{array} \right)_{F_3 \sim F_3 + F_2} \\ &\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aquest sistema és compatible si, i només si, $k + 1 = 0$, és a dir, si $k = -1$. Per tant, aquest és l'únic valor de k per al qual el vector $(2k, 3, 1 - k)$ té alguna antiimatge. Per calcular-la, observem que per a aquest valor de k la solució general del sistema d'equacions és

$$\left. \begin{array}{l} x = -4z - 3 \\ y = z - 2 \end{array} \right\}.$$

Per tant,

$$T^{-1}(-2, 3, 2) = \{(-4z - 3, z - 2, z) \mid \text{amb } z \in \mathbb{R}\}.$$

10. La matriu de la transformació lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecte a les bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 3), (2, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la imatge de vector $\vec{u} = (2, 3)$ i l'antiimatge del vector $\vec{v} = (2, 3, 5)$.

Solució

La matriu associada a T respecte a les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ és A . Podem representar aquesta situació de la manera següent:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\
 \vec{u} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & T(\vec{u})
 \end{array}$$

Aleshores, si multipliquem la matriu A per les components d'un vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}_1$ obtenim les components de la seva imatge $T(\vec{u})$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Si volem calcular la imatge del vector $(2, 3)$, en primer lloc hem de trobar les seves components en la base $\mathcal{B}_1$

$$(2, 3) = \lambda_1(1, 3) + \lambda_2(2, 5).$$

Igualant component a component, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 3 \end{array} \right\}$$

i la solució d'aquest sistema és

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-1} = -4. \\
 \lambda_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3.
 \end{aligned}$$

Per tant, les components del vector $(2, 3)$ en la base $\mathcal{B}_1$ són $(-4, 3)$.

En segon lloc, hem de multiplicar la matriu A per aquestes components

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finalment, sabem que les components de $T(2, 3)$ en la base $\mathcal{B}_2$ són $(-7, 1, 5)$. Per tant,

$$T(2, 3) = -7(1, 2, 1) + (3, 1, 2) + 5(1, 3, 2) = (1, 2, 5).$$

Per fer la segona part de l'exercici, calculem la matriu de T en les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, que representarem per B . Per obtenir-la, hem d'aplicar la fórmula del canvi de base per a transformacions lineals:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
 \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & T(\vec{u}) & \xrightarrow{\quad} & T(\vec{u}) \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
 & & B = DAC^{-1} & & & &
 \end{array}$$

on C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ i D és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_c$, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 7 & 10 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Per calcular l'antiimatge del vector $(2, 3, 5)$ hem de trobar els vectors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $T(x, y) = (2, 3, 5)$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{o bé} \quad \left. \begin{aligned} -7x + 5y &= 2 \\ -5x + 4y &= 3 \\ -2x + 3y &= 5 \end{aligned} \right\}.$$

Evidentment, el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és 2; per saber si el rang de la matriu ampliada és 2 o 3 calculem el seu determinant

$$\begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Per tant, el sistema és incompatible i podem assegurar que el vector $(2, 3, 5)$ no té antiimatges.

Observació: una vegada calculada la matriu de T en la base canònica també haguéssim pogut obtenir la imatge del vector $(2, 3)$ mitjançant un senzill producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

11. La transformació lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\left. \begin{aligned} T(3, 4) &= (-1, 3, 2) \\ T(2, 3) &= (3, -4, 1) \end{aligned} \right\}.$$

(a) Calculeu la matriu de T respecte a les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

(b) Si $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (2, 5)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(-3, 31, -2), (2, -19, 1), (-1, 11, -1)\}$, calculeu la matriu de T en les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$.

Solució

(a) La matriu de T en les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, diguem-li A , ha de complir les igualtats següents:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podem escriure aquests dues igualtats en una única igualtat matricial:

$$A \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

de la qual és fàcil aïllar la matriu A .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ 25 & -18 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Tenim ara que la matriu de T respecte a les bases canòniques de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ és A i ho representem

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & T(\vec{u}) \end{array}$$

Finalment, per calcular la matriu de T respecte a les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ hem de fer un canvi de base a l'espai de sortida i un canvi de base a l'espai d'arribada

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{D^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\
 \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & T(\vec{u}) \mapsto & & T(\vec{u}) \\
 & \underbrace{\hspace{15em}}_{F = D^{-1}AC} & & & & &
 \end{array}$$

on C és la matriu del canvi de base $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ i D és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_c$, és a dir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 31 & -19 & 11 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, és immediat que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

i per tant, la matriu de f respecte a les bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ és

$$\begin{aligned}
 F = D^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & 11 \\ 25 & -18 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \\ -7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -11 & 40 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 F &= \begin{pmatrix} 45 & 157 \\ 52 & 183 \\ -38 & -130 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

12. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ve definit per

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z, x - y + 4z, x - 3y + 2z).$$

Calculeu la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B} = \{(2, -1, 3), (2, 1, 2), (1, -1, 2)\}$.

Solució

Calculem en primer lloc la matriu associada a f respecte a la base canònica. Per això, hem de calcular les imatges dels vectors d'aquesta base

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2, 1, 1), \\ f(0, 1, 0) &= (3, -1, -3), \\ f(0, 0, 1) &= (-1, 4, 2). \end{aligned}$$

Aleshores, la matriu associada a f respecte a la base canònica $\mathcal{B}_c$ és

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

i la podem representar de la forma següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \end{array}$$

Per calcular la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}$ hem d'aplicar la fórmula del canvi de base amb un canvi de base a l'espai de sortida i un canvi de base a l'espai d'arribada. Aquests dos canvis els representem a l'esquema següent:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \mapsto & & f(\vec{u}) \\ & \searrow & & & & & \nearrow \\ & & B = C^{-1}AC & & & & \end{array}$$

on C és la matriu de les components dels vectors de la base $\mathcal{B}$ en la base canònica, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

i la seva inversa és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}$ és

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 15 & 9 & 10 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -71 & -7 & -56 \\ 28 & 7 & 21 \\ 84 & 5 & 67 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

13. Respecte a la base $\mathcal{B} = \{(2, 3), (2, 4)\}$, l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ té associada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la matriu associada a f respecte a la base canònica.

Solució

Sabem que la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}$ és A i ho representem de la forma següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \end{array}$$

Aleshores per calcular la matriu associada a f respecte a la base canònica hem de fer un canvi de base a l'espai de sortida i un canvi de base a l'espai d'arribada

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \mapsto & & f(\vec{u}) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{B = CAC^{-1}} & & & & \end{array}$$

on C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$, és a dir

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la seva inversa és

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

i la matriu associada a f respecte a la base canònica és

$$\begin{aligned} B &= CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -42 & 22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14. La matriu de l'endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculeu la matriu de T en la base canònica.
- (b) Quin és el rang d'aquest endomorfisme?
- (c) Comproveu que les traces de les matrius A i A' coincideixen.

Solució

(a) Per calcular la matriu de T en la base canònica, fem servir l'esquema del canvi de base següent:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & T(\vec{u}) \mapsto & & T(\vec{u}) \\ & \searrow & & & & & \nearrow \\ & & A = CAC^{-1} & & & & \end{array}$$

on A és la matriu de T en la base canònica i C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}_c$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= CA'C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Evidentment, el rang de l'endomorfisme és 3.

(c) En els dos casos, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ i $t_3 = 1$.

15. Sigui $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ i $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme que compleix

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) &= -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \\ \text{Nuc } f &= \langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle \end{aligned} \right\}.$$

(a) Calculeu la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_1$.

(b) Calculeu la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_3 - \vec{e}_2 - \vec{e}_1\}$.

Solució

(a) Per conèixer la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_1$, hem de tenir les imatges dels vectors d'aquesta base expressades també en aquesta base. Ja sabem quines són les imatges dels vectors $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$. Per calcular la imatge del vector $\vec{e}_3$ sabem que $2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ pertany al nucli de f , és a dir,

$$f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} 2f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) &= \vec{0} \\ 2(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) - (-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3) + f(\vec{e}_3) &= \vec{0} \\ 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 + f(\vec{e}_3) &= \vec{0} \\ 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + f(\vec{e}_3) &= \vec{0} \\ f(\vec{e}_3) &= -4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Per tant, la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_1$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Una vegada hem calculat la matriu de f en la base $\mathcal{B}_1$, ho representem de la forma següent:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) \\ \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \end{array}$$

Per calcular la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_2$ hem de fer un canvi de base a l'espai de sortida i un canvi de base a l'espai d'arribada

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_1) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & T(\vec{u}) \mapsto & & T(\vec{u}) \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & B = C^{-1}AC & & & & \end{array}$$

on C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es veu, doncs, que la seva inversa és

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_2$ és

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

16. L'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ té associada, respecte a la base canònica, la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculeu una base i les equacions implícites de $\text{Nuc } f$ i $d\text{Im } f$.
 (b) Indiqueu si és injectiu, exhaustiu o bijectiu.

Solució

(a) El nucli de f està format per tots els vectors (x, y, z) tals que $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicant aquestes matrius i igualant els coeficients, tenim el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ 2x + y + 5z &= 0 \\ -x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

i el resollem triangulant la seva matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1 \end{matrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_1 \sim 3F_1 + F_2 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_2 \end{matrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observem que la matriu inicial d'aquest sistema és la mateixa que la matriu associada a l'endomorfisme f . La seva solució general és

$$\left. \begin{aligned} x &= -z \\ y &= -3z \end{aligned} \right\}.$$

Per tant, els vectors de $\text{Nuc } f$ són els de la forma

$$(x, y, z) = (-z, -3z, z) = z(-1, -3, 1)$$

i $\text{Nuc } f = \langle (-1, -3, 1) \rangle$.

Per calcular les equacions implícites de $\text{Nuc } f$, triangulem la matriu

$$\left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ -3 & y \\ 1 & z \end{array} \right) \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - 3F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ 0 & y - 3x \\ 0 & z + x \end{array} \right).$$

Per tant, les equacions implícites de $\text{Nuc } f$ són

$$\left. \begin{array}{l} -3x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}.$$

D'una banda, sabem que $\text{Im } f$ és el subespai generat pels vectors $(1, 2, -1)$, $(-1, 1, 2)$ i $(-2, 5, 5)$ i, de l'altra, sabem que $\dim \text{Im } f = 2$, ja que $\dim \text{Nuc } f = 1$ i

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Com que els dos primers d'aquests vectors són linealment independents podem assegurar que una base d' $\text{Im } f$ és

$$\{(1, 2, -1), (-1, 1, 2)\}.$$

Finalment, l'equació implícita d' $\text{Im } f$ és

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array} \right| = 5x - y + 3z = 0.$$

b) Com que $\text{Nuc } f \neq \{\vec{0}\}$ l'endomorfisme no és injectiu i com que $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme no és exhaustiu. Evidentment tampoc és bijectiu.

17. Estudieu la transformació lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que respecte a les bases canòniques té associada la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

és a dir, indiqueu si és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució

Per calcular el nucli de f hem de resoldre el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, triangulem la matriu corresponent

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - 2F_2} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és compatible indeterminat i la seva solució general és

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 5(-5t) + 3t = 0 \\ y - 3(-5t) - 3t = 0 \\ z = -5t \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 2x - 12t + 5(-5t) + 3t = 0 \\ y = -12t \\ z = -5t \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = 17t \\ y = -12t \\ z = -5t \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc } f = \langle (17, -12, -5, 1) \rangle$ i la transformació f no és injectiva.

D'altra banda, tenim que

$$\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Nuc } f = 4 - 1 = 3,$$

és a dir, $\text{Im } f$ és un subespai de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 3.

Per tant, $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ i la transformació f és exhaustiva. En no ser f injectiva, tampoc és bijectiva.

18. Estudieu, segons els valors del paràmetre a , l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que respecte a la base canònica té associada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & -1 & 2 \\ 2 & 1-a & a+1 \\ a & -3 & 2a \end{pmatrix}.$$

Solució

Sabem que la dimensió d'Im f coincideix amb el rang de la matriu A . Aleshores anem a calcular per a quins valors de a el rang d'aquesta matriu és 3; és a dir, per a quins valors de a el seu determinant és diferent de zero.

$$\begin{vmatrix} a-2 & -1 & 2 \\ 2 & 1-a & a+1 \\ a & -3 & 2a \end{vmatrix} = (a-2)(1-a)2a - a(a+1) - 12 \\ -2a(1-a) + 3(a+1)(a-2) + 4a \\ = -2a^3 + 6a^2 - 4a - a^2 - a - 12 \\ -2a + 2a^2 + 3a^2 - 3a - 6 + 4a \\ = -2a^3 + 10a^2 - 6a - 18.$$

La primera solució de l'equació $-2a^3 + 10a^2 - 6a - 18 = 0$ l'hem de calcular pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 10 & -6 & -18 \\ -1 & & 2 & -12 & 18 \\ \hline & -2 & 12 & -18 & 0 \end{array}$$

i les altres s'obtenen de l'equació $-2a^2 + 12a - 18 = 0$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{-4} = \frac{-12 \pm 0}{-4} = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}.$$

Aleshores, si $a \neq -1$ i 3 , el determinant de la matriu A és diferent de zero i la dimensió d'Im f és 3. Per tant, Im $f = \mathbb{R}^3$, Nuc $f = \{\vec{0}\}$ i l'endomorfisme f és bijectiu.

Si $a = -1$, la matriu associada a f és

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinant d'aquesta matriu és zero i els dos primers vectors-columna són linealment independents; per tant, el rang d'aquesta matriu és 2. Aleshores, dim Im $f = 2$, dim Nuc $f = 1$ i l'endomorfisme no és injectiu ni exhaustiu.

Si $a = 3$, la matriu associada a f és

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, el rang d'aquesta matriu és 1 ja que els tres vectors-columna són múltiples de $(1, 2, 3)$. Per tant, $\dim \operatorname{Im} f = 1$, $\dim \operatorname{Nuc} f = 2$ i l'endomorfisme no és injectiu ni exhaustiu.

5.2 Diagonalització

19. Analitzeu si la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

és o no diagonalitzable.

Solució

(a) Polinomi característic i valors propis

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} x+1 & -3 & -12 \\ -1 & x-2 & 3 \\ 1 & -1 & x-6 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x-2)(x-6) - 9 - 12 + 12(x-2) + 3(x+1) - 3(x-6) \\ &= x^3 - 7x^2 + 4x + 12 - 9 - 12 + 12x - 24 + 3x + 3 - 3x + 18 \\ &= x^3 - 7x^2 + 16x - 12. \end{aligned}$$

Els valors propis d'aquesta matriu són les arrels del polinomi característic. La primera, hem de buscar-la pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ 2 & & 2 & -10 & 12 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Les altres dues arrels s'obtenen en resoldre l'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}.$$

Per tant, els tres valors propis de l'endomorfisme són $\lambda_1 = 2$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = 3$.

(b) Vectors propis

Els vectors propis d'aquesta matriu són els nuclis de les matrius $A - 2I$ i $A - 3I$. Com a l'exercici anterior, aquests nuclis es calculen resolent un sistema d'equacions.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - 2I)$:

Recordem que el nucli de la matriu $A - 2I$ està format pels vectors tals que $(A - 2I)X = 0$ i que per calcular-lo, només cal que triangulem aquesta matriu i trobem els vectors que multiplicats per la matriu donen zero.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -3x + 3y + 12z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - 2I) = \langle (3, -1, 1) \rangle$.

De la mateixa manera que en el cas anterior, per calcular $\text{Nuc}(A - 3I)$, triangulem aquesta matriu i trobem els vectors que multiplicats per ella donen zero.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 4F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 4F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -4x + 3y + 12z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - 3I) = \langle (3, 0, 1) \rangle$.

En aquest cas el valor propi 2 té multiplicitat 2, però $\dim \text{Nuc}(A - 2I) = 1$; per tant, la matriu A no és diagonalitzable. És a dir, si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és l'endomorfisme que respecte a la base canònica té associada la matriu A , no existeix cap base de $\mathbb{R}^3$ en la qual diagonalitzi l'endomorfisme f . Dit d'una altra manera, no existeix cap matriu regular C tal que $C^{-1}AC$ sigui diagonal.

20. Diagonalitzeu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, respecte a la base canònica, té associada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -8 & -6 & -3 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

i expresseu la matriu diagonal obtinguda en funció de A i la matriu del canvi de base.

Solució

(a) Valors propis.

En primer lloc, hem de calcular el polinomi característic d'aquest endomorfisme:

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 8 & x+6 & 3 \\ -8 & -8 & x-5 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+6)(x-5) - 24 - 64 + 8(x+6) + 24(x-1) - 8(x-5) \\ &= x^3 - 31x + 30 - 24 - 64 + 8x + 48 + 24x - 24 - 8x + 40 \\ &= x^3 - 7x + 6. \end{aligned}$$

Els valors propis d'aquest endomorfisme són les arrels del polinomi característic. La primera, hem de buscar-la pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Les altres dues arrels s'obtenen en resoldre l'equació $x^2 + x - 6 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}.$$

Per tant, els tres valors propis de l'endomorfisme són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = -3$ i el polinomi característic es descompon en factors de la manera següent

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x+3).$$

(b) Vectors propis

Els vectors propis de f són els nuclis dels endomorfismes $A - I$, $A - 2I$ i $A + 3I$. Triangulem, doncs, aquestes matrius i trobem els vectors que multiplicats per elles donen zero.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -8 & -7 & -3 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1 \sim F_3 \\ F_2 \sim F_2 + F_3 \\ F_3 \sim F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquest sistema és compatible indeterminat i la solució general és

$$\begin{cases} 8x + 8y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 8x + 8(-z) + 4z = 0 \\ y = -z \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{z}{2} \\ y = -z \end{cases}.$$

Per tant, el subespai de vectors propis amb valor propi 1 és

$$\text{Nuc}(A - I) = \langle (1, -2, 2) \rangle.$$

De la mateixa manera es calculen els vectors propis corresponents als valors propis 2 i -3:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -8 & -8 & -3 \\ 8 & 8 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - 8F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}.$$

Per tant, el subespai de vectors propis amb valor propi 2 és

$$\text{Nuc}(A - 2I) = \langle (-1, 1, 0) \rangle.$$

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -8 & -3 & -3 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 2F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + 2F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x - (-z) - z = 0 \\ y = -z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}.$$

Per tant, el subespai de vectors propis amb valor propi -3 és

$$\text{Nuc}(A + 3I) = \langle (0, -1, 1) \rangle.$$

Aleshores, l'endomorfisme f és diagonalitzable i la matriu de f en la base de vectors propis $\mathcal{B} = \{(1, -2, 2), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

La relació entre les matrius A , D i C és la mateixa que en la fórmula del canvi de base per a endomorfismes:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & f(\vec{u}) \mapsto & & f(\vec{u}) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{D = C^{-1}AC} & & & & & \end{array}$$

on C és la matriu del canvi de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$, és a dir,

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -8 & -6 & -3 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Analitzeu si la matriu

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

digonalitza i, en cas afirmatiu, trobeu una base de vectors propis i la matriu diagonal.

Solució

(a) Polinomi característic i valors propis

Els coeficients del polinomi característic d'una matriu també es poden calcular a partir dels determinants dels seus menors:

$$p(x) = x^4 - t_1x^3 + t_2x^2 - t_3x + t_4,$$

on t_k és la traça d'ordre k de la matriu A .

$$\begin{aligned}
 t_4 &= \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\
 t_3 &= \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 - 2 + 3 - 2 = 0, \\
 t_2 &= \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 0 - 1 + 0 + 0 - 1 + 0 = -2, \\
 t_1 &= -2 + 3 - 2 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Per tant, el polinomi característic d'aquesta matriu és $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Les dues primeres arrels les podem buscar pel mètode de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
 1 & & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
 1 & & 1 & 2 & 1 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 &
 \end{array}$$

Les altres dues arrels són les solucions de l'equació $x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}.$$

Per tant, els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_1 = 1$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = -1$, també amb multiplicitat 2. És a dir, la descomposició en factors del polinomi característic d'aquesta matriu és

$$p(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$

(b) Vectors propis

Els vectors propis de la matriu A són els nuclis dels endomorfismes $A - I$ i $A + I$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
 A - I &= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 2F_3 - F_2 \\ F_4 \sim 4F_4 + F_2}]{\simeq} \\
 &\simeq \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \left. \begin{array}{l} -3x - 3y + 5z - 2t = 0 \\ -8z + 8t = 0 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} -3x - 3y + 5t - 2t = 0 \\ z = t \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = -y + t \\ z = t \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - I) = \langle (-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1) \rangle$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A + I)$:

$$\begin{aligned}
 A + I &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1 \\ F_4 \sim F_4 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim F_3 - F_2 \\ F_4 \sim F_4 - F_2}]{\simeq} \\
 &\simeq \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \left. \begin{array}{l} -x - 3y + 5z - 2t = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} -x - 3(2z) + 5z - 2t = 0 \\ y = 2z \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = -z - 2t \\ y = 2z \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Per tant, $\text{Nuc}(A + I) = \langle (-1, 2, 1, 0), (-2, 0, 0, 1) \rangle$.

Les dimensions de $\text{Nuc}(A - I)$ i $\text{Nuc}(A + I)$ coincideixen amb les multiplicitats dels valors propis corresponents; per tant, la matriu A és diagonalitzable. És a dir, si f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit en la base canònica per la matriu A , aleshores la matriu de f en la base

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (-1, 2, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$$

és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

22. Comproveu que la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

és diagonalitzable i calculeu A^k .

Solució

(a) Valors propis

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$p(x) = x^3 - t_1 x^2 + t_2 x - t_3,$$

on t_k és la traça d'ordre k de la matriu A :

$$t_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 48 - 60 + 36 + 20 + 72 = 2,$$

$$t_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -9 + 6 + 2 = -1,$$

$$t_1 = 1 + 3 - 6 = -2.$$

El polinomi característic és $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. La primera arrel podem calcular-la pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Les altres dues arrels són solució de l'equació $x^2 + 3x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}.$$

Per tant, els valors propis de la matriu són $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = -2$. En ser els tres diferents, podem assegurar que la matriu és diagonalitzable.

(b) Vectors propis

Els vectors propis són els nuclis dels endomorfismes $A - I$, $A + I$ i $A + 2I$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - I)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \sim F_2 \\ F_2 \sim F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_2}]{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim 2F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y + 4z = 0 \\ 6y + 6z = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 2x + 2(-z) + 4z = 0 \\ y = -z \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - I) = \langle (-1, -1, 1) \rangle$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A + I)$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim -F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim 2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 6y + 6z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 2x + 6(-z) + 6z = 0 \\ y = -z \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A + I) = \langle (0, -1, 1) \rangle$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A + 2I)$:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + 2F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 6y + 6z = 0 \\ 3y = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 3x + 6z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = -2z \\ y = 0 \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A + 2I) = \langle (-2, 0, 1) \rangle$.

Si f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que respecte a la base canònica té associada la matriu A , aleshores la matriu associada a f en la base $\mathcal{B} = \{(-1, -1, 1), (0, -1, 1), (-2, 0, 1)\}$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En aquest canvi de base, la matriu del canvi és

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

per tant, $D = C^{-1}AC$, o bé $A = CDC^{-1}$.

(c) Càlcul de A^k

D'una banda, és evident que

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix},$$

i, de l'altra

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1}$$

$$A^3 = (CD^2C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^3C^{-1}$$

$$A^4 = (CD^3C^{-1})(CDC^{-1}) = CD^4C^{-1}$$

$$\text{i en general } A^n = CD^nC^{-1}.$$

Per poder calcular A^k , abans hem de calcular la inversa de la matriu C :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 2F_3 - F_2 \\ F_1 \sim -F_1 - 2F_3}]{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i per calcular A^k només hem de multiplicar aquestes tres matrius:

$$\begin{aligned}
 A^k &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2(-2)^k \\ -1 & -(-1)^k & 0 \\ 1 & (-1)^k & (-2)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2-2(-2)^k & 2-2(-2)^k \\ 1-(-1)^k & 2-(-1)^k & 2-2(-1)^k \\ -1+(-1)^k & -2+(-1)^k+(-2)^k & -2+2(-1)^k+(-2)^k \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-2)^k \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

23. Estudieu la diagonalització de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

segons els valors del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solució

En primer lloc, hem de calcular el polinomi característic i els valors propis d'aquesta matriu:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -3 \\ 0 & x-1 & -\alpha-2 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)(x-1)(x+1) + (\alpha+2)(x-2) \\
 &= (x-2)((x-1)(x+1) + \alpha+2) = (x-2)(x^2 - 1 + \alpha + 2) \\
 &= (x-2)(x^2 + \alpha + 1).
 \end{aligned}$$

Les arrels del polinomi característic són $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{-1-\alpha}$ i $\lambda_3 = -\sqrt{-1-\alpha}$, aleshores per estudiar la diagonalització de A hem de distingir els casos següents:

(a) Si $\alpha > -1$, el polinomi característic té una arrel real i dues arrels complexes conjugades; per tant la matriu A no és diagonalitzable (sobre els reals).

(b) Si $\alpha = -1$, $p(x) = (x - 2)x^2$ i els valors propis de la matriu A són $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 0$ amb multiplicitat 2; aleshores, A és diagonalitzable si, i només si, $\dim \text{Nuc}(A - 0I) = 2$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - 0I)$:

$$A - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 2x + y + 3(-y) = 0 \\ z = -y \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = y \\ z = -y \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc } A = \langle (-1, -1, 1) \rangle$ i la matriu A no és diagonalitzable.

(c) Si $\alpha < -1$ i $\alpha \neq -5$, els tres valors propis són diferents; per tant, la matriu A és diagonalitzable.

(d) Si $\alpha = -5$, $p(x) = (x - 2)(x^2 - 4) = (x - 2)^2(x + 2)$ i els valors propis de la matriu A són $\lambda_1 = 2$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = -2$. Per tant, A és diagonalitzable si, i només si, $\dim \text{Nuc}(A - 2I) = 2$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - 2I)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \sim F_2 + F_1 \\ F_3 \sim F_3 + F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solució general d'aquest sistema és

$$y = -3z \implies \text{Nuc}(A - 2I) = \langle (1, 0, 0), (0, -3, 1) \rangle.$$

Per tant, A és diagonalitzable.

24. Sabent que la matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecte a la base

$$\mathcal{B} = \{(4, -4, 1), (0, -4, 1), (1, -1, 0)\}$$

és diagonal i que compleix $f(2, 2, 0) = (16, -24, 4)$, calculeu la matriu de f en la base canònica.

Solució

Sigui A la matriu associada a f respecte a la base canònica i D la matriu diagonal associada a f respecte a la base $\mathcal{B}$, que és una base de vectors propis.

Evidentment, D és de la forma

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

on a, b i c són els valors propis dels vectors $(4, -4, 1)$, $(0, -4, 1)$ i $(1, -1, 0)$, respectivament. La matriu del canvi de base és

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que $D = C^{-1}AC$ o bé $A = CDC^{-1}$.

D'altra banda, sabem que $f(2, 2, 0) = (16, -24, 4)$, és a dir,

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si expressem aquesta igualtat en termes de la matriu D i multipliquem els dos costats de la igualtat per C^{-1} tenim que

$$CDC^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix} \implies DC^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriu C és

$$C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix};$$

aleshores, substituint a la igualtat anterior resulta que

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplant aquestes matrius obtenim la igualtat

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \\ -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Per tant, els valors propis de l'endomorfisme f són $a = 2$, $b = -2$ i $c = -4$ i la matriu A és

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

25. La matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ respecte a la base canònica és

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & 3 \end{pmatrix}$$

i $\mathcal{B}$ és la base formada pels vectors $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$. Sabent que f diagonalitza en aquesta base, calculeu els coeficients a, b, c, d, e, f i els valors propis de f .

Solució

El procediment per resoldre aquest exercici és el mateix que el de l'exercici anterior. Siguin

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ i la matriu del canvi de base, respectivament. Aleshores és evident que $D = C^{-1}AC$ o bé $AC = CD$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & c & d \\ e & f & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Multiplicant aquestes matrius obtenim

$$\begin{pmatrix} a+b & a+1 & 1+b \\ 2+d & 2+c & c+d \\ e+3 & e+f & f+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

i igualant els coeficients d'aquestes matrius obtenim les equacions següents:

$$\left. \begin{aligned} a+b &= \alpha \\ a+1 &= \beta \\ 1+b &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} 2+d &= 0 \\ 2+c &= \beta \\ c+d &= \gamma \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} e+3 &= \alpha \\ e+f &= 0 \\ f+3 &= \gamma \end{aligned} \right\}.$$

En primer lloc, és evident que $b = -1$ i $d = -2$ i de les tres últimes equacions tenim que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = e + 3 \\ e = -f \\ f = \gamma - 3 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \alpha = -f + 3 \\ e = -f \\ f = \gamma - 3 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \alpha = -\gamma + 6 \\ e = -f \\ f = \gamma - 3 \end{array} \right\}.$$

Substituint a les equacions anteriors tenim que

$$\left. \begin{array}{l} \beta = c + 2 \\ \gamma = c - 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \beta = c + 2 \\ \alpha = -c + 8 \end{array} \right\}.$$

Finalment, substituint a les dues primeres equacions:

$$\left. \begin{array}{l} a - 1 = -c + 8 \\ a + 1 = c + 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} a - 1 = -c + 8 \\ 2a = 10 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} a = 5 \\ c = 4 \end{array} \right\}.$$

Aleshores, és clar que les solucions d'aquest sistema d'equacions són

$$a = 5, \quad b = -1, \quad c = 4, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 6, \quad \gamma = 2, \quad d = -2, \quad e = 1 \text{ i } f = -1;$$

és a dir, la matriu associada a f respecte a la base canònica és

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

i els seus valors propis són 4, 6 i 2.

6

Endomorfismes de l'espai vectorial euclidià

6.1 Endomorfismes simètrics i diagonalització ortogonal

1. *Diagonalitzeu ortogonalment la matriu simètrica*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució

El polinomi característic d'aquesta matriu és

$$p(x) = x^3 - t_1 x^2 + t_2 x - t_3,$$

on t_k és la traça d'ordre k de la matriu A :

$$t_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 16 - 16 - 8 - 80 - 8 = -108,$$

$$t_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 12 = 0,$$

$$t_1 = 5 + 2 + 2 = 9.$$

Per tant, el polinomi característic de la matriu A és

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 108.$$

La primera arrel l'hem de calcular pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 0 & 108 \\ 6 & & 6 & -18 & -108 \\ \hline & 1 & -3 & -18 & 0 \end{array}$$

i les altres dues arrels són solució de l'equació $x^2 - 3x - 18 = 0$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = \begin{cases} 6 \\ -3 \end{cases}.$$

Els valors propis de la matriu A són 6 amb multiplicitat 2 i -3 i els vectors propis són els nuclis dels endomorfismes $A - 6I$ i $A + 3I$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - 6I)$:

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 + 2F_1}]{\quad} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solució general d'aquest sistema és

$$x = -2y + 2z \implies \text{Nuc}(A - 6I) = \langle (-2, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle.$$

Per trobar una base ortonormal de vectors propis, hem d'ortonormalitzar aquesta base de $\text{Nuc}(A - 6I)$ pel mètode de Gram-Schmidt. En primer lloc hem de trobar una base ortogonal d'aquest subespai, i per això prenem

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (-2, 1, 0); \\ \vec{v}_2 &= (2, 0, 1) - \frac{(2, 0, 1) \cdot (-2, 1, 0)}{(-2, 1, 0) \cdot (-2, 1, 0)}(-2, 1, 0) = (2, 0, 1) + \frac{4}{5}(-2, 1, 0) \\ &= \frac{1}{5}(2, 4, 5) \simeq (2, 4, 5). \end{aligned}$$

Per tant, els vectors $(-2, 1, 0)$ i $(2, 4, 5)$ formen una base ortogonal de $\text{Nuc}(A - 6I)$. Dividint cada vector per la seva norma, n'obtenim una d'ortonormal:

$$\text{Nuc}(A - 6I) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5) \right\rangle.$$

Càlcul de $\text{Nuc}(A + 3I)$:

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 4F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 4F_3 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 18 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim \frac{1}{18}F_2 \\ F_3 \sim F_3 - F_2}]{\simeq} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solució d'aquest sistema és

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x - 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} 8x - 2(-z) + 2z = 0 \\ y = -z \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x = -z/2 \\ y = -z \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A + 3I) = \langle (-1, -2, 2) \rangle = \langle \frac{1}{3}(-1, -2, 2) \rangle$.

Hem dividit el vector $(-1, -2, 2)$ per la seva norma per tenir una base de $\text{Nuc}(A + 3I)$ formada per un vector unitari.

Sabem que els vectors propis d'una matriu simètrica corresponents a valors propis diferents són perpendiculars; per tant, la base

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5), \frac{1}{3}(-1, -2, 2) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis de la matriu simètrica A .

En aquest cas, si

$$C = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & -\sqrt{5} \\ 3 & 4 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -3 \end{pmatrix},$$

tenim que $D = C^{-1}AC = C^t AC$ ja que C és una matriu ortogonal i, per tant, $C^{-1} = C^t$.

2. La matriu associada a un endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ respecte a la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base ortonormal en la qual f diagonalitza.

Solució

El polinomi característic de la matriu A és

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} && \text{Restem la quarta columna a les tres primeres} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 1-x & 1-x & 1-x & x \end{vmatrix} && \text{Sumem les tres primeres files a la quarta} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+3). \end{aligned}$$

Els valors propis d'aquest endomorfisme són $\lambda_1 = 1$ amb multiplicitat 3 i $\lambda_2 = -3$. Els vectors propis són els nuclis dels endomorfismes $A - I$ i $A + 3I$.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - I)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = -y - z - t \quad \implies \quad \text{Nuc}(A - I) = \langle (1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1) \rangle.$$

Calculem ara una base ortogonal de $\text{Nuc}(A - I)$ aplicant el mètode de Gram-Schmidt:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0);$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= (1, 0, -1, 0) - \frac{(1, 0, -1, 0) \cdot (1, -1, 0, 0)}{(1, -1, 0, 0) \cdot (1, -1, 0, 0)}(1, -1, 0, 0) = (1, 0, -1, 0) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) \\ &= \frac{1}{2}(1, 1, -2, 0) \simeq (1, 1, -2, 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= (1, 0, 0, -1) - \frac{(1, 0, 0, -1) \cdot (1, -1, 0, 0)}{(1, -1, 0, 0) \cdot (1, -1, 0, 0)}(1, -1, 0, 0) - \frac{(1, 0, 0, -1) \cdot (1, 1, -2, 0)}{(1, 1, -2, 0) \cdot (1, 1, -2, 0)}(1, 1, -2, 0) \\ &= (1, 0, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) - \frac{1}{6}(1, 1, -2, 0) = \frac{1}{3}(1, 1, 1, -3) \simeq (1, 1, 1, -3) \end{aligned}$$

Per tant, els vectors $(1, -1, 0, 0)$, $(1, 1, -2, 0)$, $(1, 1, 1, -3)$ formen una base ortogonal del subespai $\text{Nuc}(A - I)$. Dividint cada vector per la seva norma obtenim una base ortonormal:

$$\text{Nuc}(A - I) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, -3) \right\rangle.$$

Càlcul de $\text{Nuc}(A + 3I)$:

$$\begin{aligned}A + 3I &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + F_1 \\ F_4 \sim 3F_4 + F_1}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 2F_3 + F_2 \\ F_4 \sim 2F_4 + F_2}]{\simeq} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim \frac{1}{4}F_2 \\ F_3 \sim \frac{1}{12}F_3 \\ F_4 \sim F_4 + F_3}]{\simeq} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\left. \begin{matrix} 3x - y - z - t = 0 \\ 2y - z - t = 0 \\ z - t = 0 \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} 3x - y - t - t = 0 \\ 2y - t - t = 0 \\ z = t \end{matrix} \right\} \implies \left. \begin{matrix} x = t \\ y = t \\ z = t \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Per tant, $\text{Nuc}(A + 3I) = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle = \langle \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \rangle$.

L'endomorfisme f diagonalitza en la base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}(1, 1, 1, -3), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \right\}$$

i la seva matriu en aquesta base és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. La matriu en la base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 0)\}$ de l'endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que T és un endomorfisme simètric i trobeu una base ortonormal de vectors propis de T .

Solució

Representem per $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ els vectors de la base $\mathcal{B}'$. Hem de comprovar que es compleixen les igualtats

$$\vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 \quad \vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_3) = f(\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_3 \quad \text{i} \quad \vec{u}_2 \cdot f(\vec{u}_3) = f(\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3.$$

$$\vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1$$

$$f(\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) \cdot \vec{u}_2 = (0, 1, 2) \cdot (1, 1, 0) = 1,$$

$$\vec{u}_1 \cdot f(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 \cdot (3\vec{u}_2 - \vec{u}_3) = (1, 0, 1) \cdot (2, 1, 0) = 2$$

$$f(\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_3 = (2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3) \cdot \vec{u}_3 = (0, 1, 2) \cdot (1, 2, 0) = 2,$$

$$\vec{u}_2 \cdot f(\vec{u}_3) = \vec{u}_2 \cdot (3\vec{u}_2 - \vec{u}_3) = (1, 1, 0) \cdot (2, 1, 0) = 3$$

$$f(\vec{u}_2) \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = (1, 1, 0) \cdot (1, 2, 0) = 3.$$

Per tant f és un endomorfisme simètric.

Per trobar una base de vectors propis de f , diagonalitzem la matriu A' . El seu polinomi característic és

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 5 & x-1 & -3 \\ -3 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)(x+1),$$

és a dir, tenim els valors propis simples $-1, 1$ i 2 .

Calculem ara els vectors propis:

$$A' + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} 3x = 0 \\ 10y + 15z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\frac{3z}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\text{Nuc}(f + I) = \langle -3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \rangle.$$

$$A' - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Nuc}(f - I) = \langle \vec{u}_2 \rangle.$$

$$A' - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} -5x - y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = z \\ y = -2z \end{array} \right\}.$$

$$\text{Nuc}(f + I) = \langle \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 \rangle.$$

Per tant, $\mathcal{B} = \{-3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$ és una base ortogonal de vectors propis que corresponen a tres valors propis diferents. Per a obtenir una base ortonormal de vectors propis, expressem aquesta base en termes de la base canònica

$$\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

i dividim cada un d'aquests vectors per la seva longitud. Resumint,

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis de f .

4. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme que en la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve definit per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trobeu, si és possible, una base ortonormal de vectors propis de f .

Solució

Com que la base $\mathcal{B}$ és ortonormal i la matriu A és simètrica, podem afirmar que l'endomorfisme f és simètric i, en conseqüència, diagonalitzable en una base ortonormal.

El polinomi característic de f és

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{vmatrix} x & -2 & -2 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & -2 & -2 \\ x-4 & x & -2 \\ x-4 & -2 & x \end{vmatrix} = (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} \\ &= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x-4)(x-2)(x+2)^2. \end{aligned}$$

Els valors propis són $\lambda_1 = -2$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = 2$.

A continuació calculem els vectors propis

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z = -x - y.$$

$\text{Nuc}(f + 2I) = \langle \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \rangle$. D'altra banda, $\text{Nuc}(f - 2I)$ és el suplementari ortogonal del subespai $\text{Nuc}(f + 2I)$, per tant, $\text{Nuc}(f - 2I) = \langle \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \rangle$. Una vegada trobats els subespais de vectors propis, podem dir que

$$\mathcal{B} = \{ \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \}$$

és una base de vectors propis de f . Per obtenir-ne una d'ortonormal, en primer lloc hem d'aplicar el mètode de Gram-Schmidt al subespai $\text{Nuc}(f + 2I)$.

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3;$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 - \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_3)} (\vec{e}_1 - \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \frac{1}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) \simeq -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Per tant, la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3), \frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis de f . D'altra banda, la matriu de f en aquesta base és

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$. Considerem l'endomorfisme T de $\mathbb{R}^3$ que en aquesta base té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que és simètric i trobeu una base ortonormal de vectors propis.

Solució

Recordem que un endomorfisme T és simètric si, i només si, es compleix que $\vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}$ per a qualsevol parella de vectors diferents d'una base qualsevol.

Per tant, només cal comprovar que,

$$\vec{e}_1 \cdot T(\vec{e}_2) = T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 \quad \vec{e}_1 \cdot T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 \quad \text{i} \quad \vec{e}_2 \cdot T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3.$$

$$\vec{e}_1 \cdot T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot (-2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = -2 + 2 = 0$$

$$T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 = -2 + 2 = 0,$$

$$\vec{e}_1 \cdot T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

$$T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 = (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 = -2 + 3 = 1,$$

$$\vec{e}_2 \cdot T(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$$

$$T(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = (-2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 = -4 + 6 = 2.$$

Per tant, T és un endomorfisme simètric. Per trobar una base de vectors propis, diagonalitzem la matriu A . És evident que el polinomi característic d'aquesta matriu és $p(x) = (x + 2)^2(x - 1)$ i els seus valors propis $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$ amb multiplicitat 2.

Pel que fa als vectors propis tenim que

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Nuc}(T - I) = \langle \vec{e}_3 \rangle.$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x = -2y - 3z \\ \text{Nuc}(T - I) = \langle -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \rangle. \end{array}$$

Aleshores, $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3\}$ és una base de vectors propis de T i, a més, el primer vector ja és perpendicular als altres dos, ja que corresponen a valors propis diferents.

Finalment, apliquem el mètode de Gram-Schmidt als vectors que formen la base del subespai $\text{Nuc}(T - I)$:

$$\vec{v}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2;$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \frac{(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-3\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}{(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \frac{3}{2}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\ &= \frac{1}{2}(-3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \simeq -3\vec{e}_2 + \vec{e}_3.\end{aligned}$$

i, com que,

$$\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}, \quad \|-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\| = \sqrt{2} \quad \text{i} \quad \|-3\vec{e}_2 + \vec{e}_3\| = \sqrt{6},$$

resulta que

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \frac{1}{\sqrt{6}}(-3\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis de T .

6. Calculeu les matrius associades respecte a la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a la projecció ortogonal i a la simetria respecte al subespai $H = \langle (1, 2, -2), (1, 2, -1) \rangle$.

Solució

Per calcular la matriu de P_H en la base canònica, necessitem una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors de H i de $H^\perp$. L'enunciat ja ens dóna una base de H . Per obtenir una base de $H^\perp$ només cal que calculem el producte vectorial d'aquests dos vectors,

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2, -1, 0)$$

i resulta que $H^\perp = \langle (2, -1, 0) \rangle$.

Aleshores la matriu associada a P_H en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2, -2), (1, 2, -1), (2, -1, 0)\}^1$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

i, com és habitual, ho representem

¹Aquesta base és una base de vectors propis de P_H i els seus valors propis són 1, 1 i 0, respectivament

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\
 \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P_H(\vec{u})
 \end{array}$$

Mitjançant la fórmula del canvi de base podem obtenir la matriu de P_H en la base canònica

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
 \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P_H(\vec{u}) \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P_H(\vec{u}) \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{A = CAC^{-1}} & & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A = CDC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Una vegada coneguda la matriu de P_H en la base canònica, és immediat calcular la matriu de la simetria S_H en aquesta mateixa base

$$M(S_H, \mathcal{B}_c) = 2M(P_H, \mathcal{B}_c) - I = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Observació: també haguéssim pogut calcular la matriu de la simetria en la base canònica tenint en compte que la matriu de S_H en la base $\mathcal{B} = \{(1, 2, -2), (1, 2, -1), (2, -1, 0)\}^2$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

²Aquesta base també és una base de vectors propis de S_H amb valors propis 1, 1 i -1, respectivament

i de manera semblant a la projecció ortogonal

$$\begin{aligned} B &= CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. Sigui P la projecció ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre la recta R d'equacions

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Calculeu la matriu de P en la base canònica.

Solució

En primer lloc, és immediat obtenir bases dels subespais R i $R^\perp$:

$$R = \langle (-1, 3, 1) \rangle \quad \text{i} \quad R^\perp = \langle (1, 1, -2), (1, 0, 1) \rangle.$$

La matriu de P en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 3, 1), (1, 1, -2), (1, 0, 1)\}$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

i, com és habitual, ho representem

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P(\vec{u}) \end{array}$$

Mitjançant la fórmula del canvi de base podrem obtenir la matriu de P_H en la base canònica

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & \vec{u} \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P(\vec{u}) \mapsto & \xrightarrow{\quad} & P(\vec{u}) \end{array}$$

$A = CAC^{-1}$

$$\begin{aligned}
 A = CDC^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Observació: La base $\mathcal{B} = \{(-1, 3, 1), (1, 1, -2), (1, 0, 1)\}$ és una base de vectors propis de P amb valors propis 1, 0 i 0, respectivament.

8. Sigui S la simetria de $\mathbb{R}^3$ respecte al pla H d'equació $x - z = 0$. Trobeu una base ortonormal de vectors propis de S i la seva matriu en la base canònica.

Solució

D'entrada sabem que aquesta simetria té els valors propis $\lambda_1 = 1$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = -1$. A més, el pla H és el subespai de vectors propis amb valor propi 1 i $H^\perp$ és el subespai de vectors propis amb valor propi -1 i, és evident que,

$$H = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle \quad \text{i} \quad H^\perp = \langle (1, 0, -1) \rangle.$$

Aleshores, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ és una base de vectors propis de S i, com que els seus vectors ja són perpendiculars entre ells,

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \right\}$$

és una base ortonormal de vectors propis de S . La matriu de S en aquesta base és

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\
 \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & S(\vec{u})
 \end{array}$$

on

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

i mitjançant la fórmula del canvi de base podrem obtenir la matriu de S en la base canònica

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\
 \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & \vec{u} & \xrightarrow{\quad} & S(\vec{u}) & \xrightarrow{\quad} & S(\vec{u})
 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{B = CDC^{-1} = CDC^t}$

ja que la matriu del canvi de base

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

és una matriu ortogonal. Per tant,

$$\begin{aligned}
 A = CDC^t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

9. Sigui $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = 2$ i l'angle format per aquests vectors és de 60° . Calculeu la matriu de la simetria respecte a la recta $R = \langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \rangle$ en la base $\mathcal{B}$.

Solució

Com tota simetria de $\mathbb{R}^2$ respecte a una recta, aquesta té els valors propis 1 i -1 . A més, el subespai de vectors propis amb valor propi 1 és $R = \langle 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \rangle$ i el subespai de vectors propis amb valor propi -1 és $R^\perp$.

Per a obtenir una base de $R^\perp$ hem de trobar els vectors de $\mathbb{R}^2$, $\vec{w} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ tals que

$$(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 0.$$

Desenvolupant aquesta igualtat obtenim

$$\begin{aligned}
 (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) &= 0 \\
 2x(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + (-x + 2y)(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) - y(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) &= 0 \\
 2x - x + 2y - 4y &= 0 \\
 x &= 2y.
 \end{aligned}$$

Per tant, $R^\perp = \langle 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \rangle$. Aleshores, la matriu de la simetria S en la base $\mathcal{B}' = \{2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$ és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

i ho representem

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') \\ \vec{u} \mapsto & & \rightarrow S(\vec{u}) \end{array}$$

Novament, mitjançant la fórmula del canvi de base podrem obtenir la matriu de S en la base canònica

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & T(\vec{u}) \mapsto & & T(\vec{u}) \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ & & A = CAC^{-1} & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} A = CDC^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observació: tot i que A és la matriu d'una simetria respecte a una recta, no és ni simètrica ni ortogonal. Això és degut a que és la matriu d'una simetria en una base no ortonormal. En canvi, com tota matriu d'una simetria en una base qualsevol, té determinant -1 i compleix que $A^2 = I$.

- 10.** Els vectors de la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ compleixen que $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$, $\|\vec{u}_3\| = 2$, $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ formen un angle de 60° , $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ són perpendiculars i $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ formen un angle de 120° . Trobeu la matriu de la simetria S respecte a la recta R generada pel vector $\langle \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \rangle$ en la base canònica.

Solució

Els productes escalars dels vectors de la base $\mathcal{B}$ entre ells són els que apareixen a la taula següent:

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1/2$	$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ = 0$
$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$	$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -1$	$\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 2 \cdot 2 \cdot \cos 0^\circ = 4$

El subespai de vectors de S amb valor propi 1 és R , mentre que el subespai de vectors propis de S amb valor propi -1 és $R^\perp$. Per a obtenir una base d'aquest últim subespai hem de trobar els vectors $\vec{w} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$ tals que

$$(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3) \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) = 0.$$

En desenvolupar aquesta expressió fent servir els productes de la taula anterior obtenim

$$\begin{aligned} x\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + y\vec{u}_2 \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + z\vec{u}_3 \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3) &= 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{3y}{2} + 5z &= 0 \\ x - 3y + 10z &= 0. \end{aligned}$$

D'aquí resulta evident que $R^\perp = \langle 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2, -10\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \rangle$. Aleshores, la matriu de S en la base

$$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3, 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2, -10\vec{u}_1 + \vec{u}_3\}$$

és

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

i ho representem

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \\ \vec{u} \mapsto & & S(\vec{u}) \end{array}$$

Com ja és habitual, mitjançant la fórmula del canvi de base podrem obtenir la matriu de S en la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & S(\vec{u}) \mapsto & & S(\vec{u}) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{A = CAC^{-1}} & & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} A = CDC^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -10 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 1 & 11 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -3 & 10 \\ -1 & -4 & -10 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.2 Isometries lineals

- 11.** Calculeu la matriu associada en la base canònica a la rotació de 45° al voltant del vector $(1, -1, 0)$.

Solució

Sabem que si $\mathcal{B} = \{\vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ és una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{w}$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $(1, -1, 0)$, aleshores la matriu de la rotació R de α al voltant del vector $(1, -1, 0)$ és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Com a vector $\vec{w}$ escollim el vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, com a vector $\vec{u}_1$ un vector unitari i perpendicular a l'anterior, per exemple $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$ i com a vector $\vec{u}_2$ el producte vectorial dels dos anteriors

$$\vec{u}_2 = \vec{w} \wedge \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Per tant la matriu de R en la base

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), (0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\}$$

és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i ho representem

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ \vec{u} \mapsto & & R(\vec{u}) \end{array}$$

Mitjançant la fórmula del canvi de base podrem obtenir la matriu de R en la base canònica

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) & \xrightarrow{C^{-1}} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{C} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c) \\ \vec{u} \mapsto & & \vec{u} \mapsto & & R(\vec{u}) \mapsto & & R(\vec{u}) \end{array}$$

$A = CA'C^{-1} = CA'C^t$

ja que

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

és una matriu ortogonal.

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= CA'C^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicant numeradors i denominador per $\sqrt{2}$, obtenim que la matriu associada a aquesta rotació en la base canònica és

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & 2 \\ -2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & 2 \\ -2 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

12. Quin angle hem de fer girar el vector $(-2, 1, 3)$ al voltant de $(1, 1, 1)$ per obtenir el vector $(3, -2, 1)$?

Solució

De manera semblant a l'exercici anterior, escollim una base adaptada al problema, és a dir, $\mathcal{B} = \{\vec{w}, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ha de ser una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{w}$ té la mateixa direcció i sentit que el vector $(1, 1, 1)$.

Com a vector $\vec{w}$ escollim el vector $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, com a vector $\vec{u}_1$ un vector unitari i perpendicular a l'anterior, per exemple $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ i com a vector $\vec{u}_2$ el producte vectorial dels dos anteriors

$$\vec{u}_2 = \vec{w} \wedge \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Aleshores la matriu de la rotació R d'angle α al voltant del vector $(1, 1, 1)$ en la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \right\}$$

és

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, les components dels vectors $(-2, 1, 3)$ i $(3, -2, 1)$ en la base $\mathcal{B}$ són $(2/\sqrt{3}, -3/\sqrt{2}, -7/\sqrt{6})$ i $(2/\sqrt{3}, 5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6})$, respectivament. Per tant, s'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ -3/\sqrt{2} \\ -7/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 5/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Iguant el segon i el tercer terme d'aquest producte de matrius s'obté

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{7}{\sqrt{6}} \sin \alpha &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{\sqrt{6}} \cos \alpha - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned} \right\}.$$

És immediat que la solució d'aquest sistema d'equacions és

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

i l'únic angle que compleix aquestes igualtats és $\alpha = 120^\circ$.

13. La matriu de l'endomorfisme $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$A = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Comproveu que T és una isometria.

(b) Calculeu la imatge del pla P d'equació $4x - y - z = 0$.

Solució

(a) Únicament hem de comprovar que $A^t A = I$:

$$A^t A = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 4 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & -3 & -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{36} \begin{pmatrix} 2+16 & 4-4 & 4-4 \\ 4-4 & 8+9+1 & 8-9+1 \\ 4-4 & 8-9+1 & 8+9+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu A és una matriu ortogonal i T és una isometria.

(b) El subespai ortogonal al pla és la recta $R = P^\perp = \langle (4, -1, -1) \rangle$ i la imatge d'aquesta recta és la recta generada pel vector $(0, 1, 0)$, ja que

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que T és una isometria, transforma el suplementari ortogonal d'un subespai en el suplementari ortogonal de la imatge. En el nostre cas, $T(R^\perp) = T(R)^\perp$, o dit d'una altra manera, la imatge del pla P és el suplementari ortogonal del subespai $\langle (0, 1, 0) \rangle$, és a dir, el pla d'equació $y = 0$.

14. La matriu associada en la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ és

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que f és una isometria.

Solució

Com que la base $\mathcal{B}$ és ortonormal, l'únic que hem de comprovar és que la matriu A és ortogonal:

$$\begin{aligned} A^t A &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1+4+4 & 2-4+2 & 2+2-4 \\ 2-4+2 & 2+4+1 & 4-2-2 \\ 2+2-4 & 4-2-2 & 4+1+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, f és una isometria.

15. Trobeu totes les isometries de $\mathbb{R}^2$ que transformen la recta $y = 0$ en la recta $x + 3y = 0$.

Solució

Hem de trobar totes les isometries de $\mathbb{R}^2$ que transformen el subespai $\langle(1, 0)\rangle$ en el subespai $\langle(3, -1)\rangle$. Aleshores, la imatge del vector $(1, 0)$ ha de ser un vector que pertany al subespai $\langle(3, -1)\rangle$ i que té norma 1, per tant tenim dues possibilitats:

$$f(1, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1) \\ \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1) \end{cases}.$$

D'altra banda, en ser f una isometria, transforma vectors perpendiculars en vectors perpendiculars, aleshores la imatge del vector $(0, 1)$ haurà de ser un vector perpendicular a $(3, -1)$ i de norma 1. Per tant, tenim també dues possibilitats:

$$f(0, 1) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \\ \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -3) \end{cases}.$$

En total hi ha quatre possibilitats, per tant, hi ha quatre isometries de $\mathbb{R}^2$ que transformen la recta $y = 0$ en la recta $x + 3y = 0$ i les seves matrius associades en la base canònica són respectivament:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; & \text{(b)} \quad & \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \\ \text{(c)} \quad & \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; & \text{(d)} \quad & \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16. Una isometria $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ compleix que

$$\left. \begin{aligned} f(3, 6, -9) &= (-2, 11, 1) \\ f(3, 0, 3) &= (4, -1, 1) \end{aligned} \right\}.$$

Trobeu les possibles matrius associades a f respecte a la base canònica.

Solució

Sabem que les isometries transformen vectors perpendiculars en vectors perpendiculars i que conserven la norma. Per tant la imatge d'un vector perpendicular als vectors $(3, 6, -9)$ i $(3, 0, 3)$

haurà de ser un vector perpendicular als vectors $(-2, 11, 1)$ i $(4, -1, 1)$. La manera de trobar vectors perpendiculars a dos vectors donats és calcular el seu producte vectorial:

$$(3, 6, -9) \wedge (3, 0, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -9 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (18, -36, -18);$$

$$(-2, 11, 1) \wedge (4, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 11 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (12, 6, -42).$$

Aleshores, tenim dues possibilitats: (a) La imatge del vector $(18, -36, -18)$ és el vector $(12, 6, -42)$. (b) La imatge del vector $(18, -36, -18)$ és el vector $(-12, -6, 42)$. Observem que, en tractar-se d'isometries, les normes d'aquests vectors coincideixen.

Per tant, hi ha dues isometries que compleixen les condicions de l'enunciat, la primera és la que compleix

$$\left. \begin{aligned} f(3, 6, -9) &= (-2, 11, 1) \\ f(3, 0, 3) &= (4, -1, 1) \\ f(18, -36, -18) &= (12, 6, -42) \end{aligned} \right\}$$

i la segona la que compleix

$$\left. \begin{aligned} f(3, 6, -9) &= (-2, 11, 1) \\ f(3, 0, 3) &= (4, -1, 1) \\ f(18, -36, -18) &= (-12, -6, 42) \end{aligned} \right\}.$$

Finalment, és immediat obtenir les matrius d'aquestes isometries en la base canònica. Per a la primera, tenim que

$$A_1 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 18 \\ 6 & 0 & -36 \\ -9 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 12 \\ 11 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -42 \end{pmatrix},$$

és a dir

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 12 \\ 11 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 18 \\ 6 & 0 & -36 \\ -9 & 3 & -18 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Per a la segona, tenim que

$$A_2 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 18 \\ 6 & 0 & -36 \\ -9 & 3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -12 \\ 11 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 42 \end{pmatrix},$$

és a dir

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -12 \\ 11 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 18 \\ 6 & 0 & -36 \\ -9 & 3 & -18 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Un endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ té associada respecte a la base canònica la matriu

$$A = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que f és una isometria i classifiqueu-la.

Solució

Per comprovar que f és una isometria només hem de calcular el producte de matrius $A^t A$ i comprovar que dóna la identitat:

$$A^t A = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{441} \begin{pmatrix} 441 & 0 & 0 \\ 0 & 441 & 0 \\ 0 & 0 & 441 \end{pmatrix} = I.$$

Per tant, f és una isometria.

D'altra banda, la matriu A és simètrica, aleshores podem assegurar que es tracta d'una simetria. Per saber si la simetria és axial o plana hem de calcular el determinant de la matriu A :

$$\det(A) = \frac{1}{21^3} \begin{vmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{vmatrix} = \frac{1}{9261} (-400 - 400 - 400 - 125 + 64 - 8000) = -1.$$

Llavors, f és una simetria plana respecte al subespai de vectors propis de valor propi 1.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - I)$:

$$A - I = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 20 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -25 & 20 & 5 \\ 20 & -16 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -25 & 20 & 5 \\ 20 & -16 & -4 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 5F_2 + 4F_1 \\ F_3 \sim 5F_3 + F_1}]{F_1 \sim \frac{1}{5}F_1} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solució d'aquest sistema és

$$z = 5x - 4y \implies \text{Nuc}(A - I) = \langle (1, 0, 5), (0, 1, -4) \rangle.$$

Per tant f és la simetria plana respecte al pla

$$F = \langle (1, 0, 5), (0, 1, -4) \rangle.$$

18. Classifiqueu la isometria de $\mathbb{R}^3$ definida en la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ per la matriu

$$A = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -21 & 16 & -12 \\ 16 & 3 & -24 \\ -12 & -24 & -11 \end{pmatrix}.$$

Solució

En aquest cas la matriu A també es simètrica i el seu determinant és

$$\det(A) = \frac{1}{29^3} \begin{vmatrix} -21 & 16 & -12 \\ 16 & 3 & -24 \\ -12 & -24 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{24389} (693 + 4608 + 4608 - 432 + 12096 + 2816) = 1.$$

Aleshores la isometria és una simetria axial respecte a la recta de vectors propis de valor propi 1.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - I)$:

$$\begin{aligned} A - I &= \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -21 & 16 & -12 \\ 16 & 3 & -24 \\ -12 & -24 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} -50 & 16 & -12 \\ 16 & -26 & -24 \\ -12 & -24 & -40 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} -50 & 16 & -12 \\ 16 & -26 & -24 \\ -12 & -24 & -40 \end{pmatrix} &\underset{\substack{F_2 \sim 25F_2 + 8F_1 \\ F_3 \sim 25F_3 - 6F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} -50 & 16 & -12 \\ 0 & -522 & -696 \\ 0 & -696 & -928 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1 \sim \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \sim \frac{-1}{174}F_2 \\ F_3 \sim 3F_3 - 4F_2}}{\simeq} \begin{pmatrix} -25 & 8 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} -25x + 8y - 6z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -25x + 8y - 6(-\frac{3y}{4}) = 0 \\ z = -\frac{3y}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{2y}{4} \\ z = -\frac{3y}{4} \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - I)$ és el subespai de $\mathbb{R}^3$ generat pel vector que en la base $\mathcal{B}$ té components $(2, 4, -3)$.

Aleshores, aquesta isometria és una simetria axial respecte a la recta

$$F = \langle 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \rangle.$$

19. Classifiqueu la isometria $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que respecte a una base ortonormal positiva $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ té associada la matriu

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució

Com que la base $\mathcal{B}$ és ortonormal, podem procedir de la mateixa manera que en el cas de la base canònica. La matriu A no és simètrica i el seu determinant és igual a

$$\det(A) = \frac{1}{125} \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{125} (80 + 45) = 1.$$

Aleshores la isometria f és una rotació al voltant d'un vector $\vec{u}$, que és un vector propi de valor propi 1.

Càlcul de $\text{Nuc}(A - I)$:

$$\begin{aligned} A - I &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ -4 & -3 & -5 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ -4 & -3 & -5 \end{pmatrix} &\underset{\substack{F_1 \sim \frac{1}{4}F_1 \\ F_2 \sim -\frac{1}{5}F_2 \\ F_3 \sim 2F_3 - F_1}}{\simeq} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \underset{F_3 \sim F_3 + 10F_2}{\simeq} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solució d'aquest sistema és

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = y/2 \\ z = -y \end{array} \right\}.$$

Per tant, $\text{Nuc}(A - I) = \langle \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 \rangle$ i f és una rotació amb eix de rotació determinat pel vector $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$. Per calcular l'angle de rotació sabem que

$$1 + 2 \cos \alpha = \text{tr} A \implies 1 + 2 \cos \alpha = -\frac{3}{5} \implies \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

L'angle entre 0 i 180° graus que compleix que aquesta igualtat és 143.13° . Finalment, per determinar si l'angle de rotació és de 143.13° o de 216.87° , hem de trobar la imatge d'un vector que no estigui a l'eix de rotació, per exemple, $\vec{u}_1$:

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{és a dir} \quad f(\vec{u}_1) = \frac{1}{5}(-3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_3).$$

Com que la orientació de la base $\{\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3, \vec{u}_1, \frac{1}{5}(-3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_3)\}$ és positiva, ja que

$$\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{8}{5} > 0$$

podem afirmar que f és la rotació d'angle $\alpha = 143.13^\circ$ al voltant del vector $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$.

20. Classifiqueu la isometria de $\mathbb{R}^3$ que en la base canònica ve definida per la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solució

La matriu A no és simètrica i el seu determinant és -1 ; per tant, es tracta de la composició d'una rotació i una simetria plana. L'eix de rotació és el subespai $\text{Nuc}(A + I)$, del que a continuació trobem una base:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és a dir, $\text{Nuc}(A + I) = \langle (0, 0, 1) \rangle$. Per calcular l'angle de rotació sabem que

$$-1 + 2 \cos \alpha = \text{tr} A \implies -1 + 2 \cos \alpha = -1 \implies \cos \alpha = 0,$$

d'on resulta que α és 90° o 270° .

Per saber de quin angle es tracta, escollim un vector que no estigui sobre l'eix de rotació, per exemple el vector $(1, 0, 0)$, calculem la seva imatge

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i calculem l'orientació de la base $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, -1, 0)\}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Com que l'orientació és negativa, la isometria és la composició d'una rotació de 270° al voltant del vector $(0, 0, 1)$ i la simetria plana respecte al pla $z = 0$.

21. Sigui $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 0, -1), (2, -1, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. La matriu de l'endomorfisme T en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que T és una isometria i classifiqueu-la.

Solució

Hem de comprovar que $T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ per a qualsevol parella de vectors d'una base qualsevol.

En el nostre cas, si representem per $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ els vectors de la base $\mathcal{B}$ tenim que

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 &= (1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 3 \\
 T(\vec{u}_1) \cdot T(\vec{u}_1) &= (-\vec{u}_1) \cdot (-\vec{u}_1) = (-1, 1, -1) \cdot (-1, 1, -1) = 3 \\
 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 &= (1, -1, 1) \cdot (1, 0, -1) = 0 \\
 T(\vec{u}_1) \cdot T(\vec{u}_2) &= (-\vec{u}_1) \cdot (4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) = (-1, 1, -1) \cdot (-1, -1, 0) = 0 \\
 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 &= (1, -1, 1) \cdot (2, -1, 1) = 4 \\
 T(\vec{u}_1) \cdot T(\vec{u}_3) &= (-\vec{u}_1) \cdot (-\vec{u}_3) = (-1, 1, -1) \cdot (-2, 1, -1) = 4 \\
 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 &= (1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = 2 \\
 T(\vec{u}_2) \cdot T(\vec{u}_2) &= (4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) \cdot (4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) = (-1, -1, 0) \cdot (-1, -1, 0) = 2 \\
 \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 &= (1, 0, -1) \cdot (2, -1, 1) = 1 \\
 T(\vec{u}_2) \cdot T(\vec{u}_3) &= (4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 3\vec{u}_3) \cdot (-\vec{u}_3) = (-1, -1, 0) \cdot (-2, 1, -1) = 1 \\
 \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 &= (2, -1, 1) \cdot (2, -1, 1) = 6 \\
 T(\vec{u}_3) \cdot T(\vec{u}_3) &= (-\vec{u}_3) \cdot (-\vec{u}_3) = (-2, 1, -1) \cdot (-2, 1, -1) = 6
 \end{aligned}$$

per tant, T és una isometria.

Per classificar-la, calculem el polinomi característic de la matriu A :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -4 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 3 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-1).$$

Com que els valors propis de T són $\lambda_1 = -1$ amb multiplicitat 2 i $\lambda_2 = 1$, T és una simetria axial i l'eix (subespai de dimensió 1) de simetria és precisament el subespai de vectors propis $\text{Nuc}(T - I)$.

Per trobar aquest subespai, triangulem la matriu

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} -2x + 4y = 0 \\ -3y - 2z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 2y \\ z = -\frac{3y}{2} \end{array} \right\}.$$

$\text{Nuc}(T - I) = \langle 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 \rangle$. Per tant, T és la simetria axial respecte a la recta

$$\langle 4\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - 3\vec{u}_3 \rangle,$$

és a dir, la recta generada pel vector $(0, 1, 1)$.

22. Una base amb orientació positiva $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ compleix que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{e}_3\| = \sqrt{3}$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$ i la matriu de l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en aquesta base és

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que f és una isometria i classifiqueu-la.

Solució

De manera semblant a l'exercici anterior, comprovem que es compleix

$$T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

per a qualsevol parella de vectors de la base $\mathcal{B}$.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$$

$$f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_1) = (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$$

$$f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_2) = (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

$$f(\vec{e}_1) \cdot f(\vec{e}_3) = (-\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 = 1$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 2$$

$$f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_2) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 2$$

$$f(\vec{e}_2) \cdot f(\vec{e}_3) = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3 = 2$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 3$$

$$f(\vec{e}_3) \cdot f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 3$$

Aleshores, f és una isometria.

Per classificar-la calculem el polinomi característic de la matriu A :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x+1 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Com que aquest polinomi característic té l'arrel 1 i dues arrels complexes conjugades, ja que de la igualtat $x^2 + x + 1 = 0$ tenim

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

podem assegurar que f és una rotació. L'eix de rotació és el subespai $\text{Nuc}(f - I)$, que trobem a continuació:

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\text{Nuc}(f - I) = \langle \vec{e}_3 \rangle$. Per calcular l'angle de rotació sabem que

$$1 + 2 \cos \alpha = \text{tr} A \implies 1 + 2 \cos \alpha = 0 \implies \cos \alpha = -\frac{1}{2},$$

d'on resulta que α és 120° o 240° .

Finalment, hem de determinar el sentit de la rotació, és a dir, quin és l'angle de rotació. Per això, escollim un vector qualsevol que no sigui múltiple de $\vec{e}_3$, per exemple $\vec{u} = \vec{e}_1$ i calculem la seva imatge

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Com que la base $\{\vec{e}_3, \vec{e}_1, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$ té orientació negativa ja que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

podem assegurar que f és la rotació de 240° al voltant del vector $\vec{e}_3$.

7

*Geometria lineal***7.1 L'espai afí**

1. Calculeu les coordenades del punt $a = (2, -2)$ en el sistema de referència $S = \{p; \vec{u}, \vec{v}\}$, on $p = (-4, 1)$, $\vec{u} = (2, 1)$ i $\vec{v} = (-1, 1)$.

Solució

Si (x, y) són les coordenades d'un punt en el sistema de referència canònic i (x', y') són les coordenades del mateix punt en la referència S , les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si les coordenades del punt a en el sistema de referència S són (a', b') , s'ha de complir que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.$$

Com que la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

tenim que

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

i les coordenades del punt a en el sistema de referència $\mathcal{S}$ són $(1, -4)$.

2. Donats els sistemes de referència $\mathcal{S}_1 = \{p; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ i $\mathcal{S}_2 = \{q; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ on $p = (4, -2)$, $\vec{u}_1 = (2, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2)$, $q = (-5, 5)$, $\vec{v}_1 = (3, 1)$ i $\vec{v}_2 = (-1, 3)$, calculeu les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1$.

Solució

Siguin (x, y) les coordenades d'un punt en el sistema de referència rectangular, (x', y') les coordenades del mateix punt en el sistema de referència $\mathcal{S}_1$ i (x'', y'') les seves coordenades en $\mathcal{S}_2$. Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'altra banda, la inversa de la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

per tant,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 4 \\ y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Finalment, substituint a l'altra igualtat obtenim que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

És a dir, les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1$ són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

3. Calculeu les coordenades dels punts a, b, c, d, e i f de la figura 8.7.1 en els sistemes de referència $\mathcal{S}_1 = \{a; \vec{ab}, \vec{ad}\}$ i $\mathcal{S}_2 = \{b; \vec{bd}, \vec{be}\}$. A més, calculeu les equacions del canvi de coordenades de $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1$.

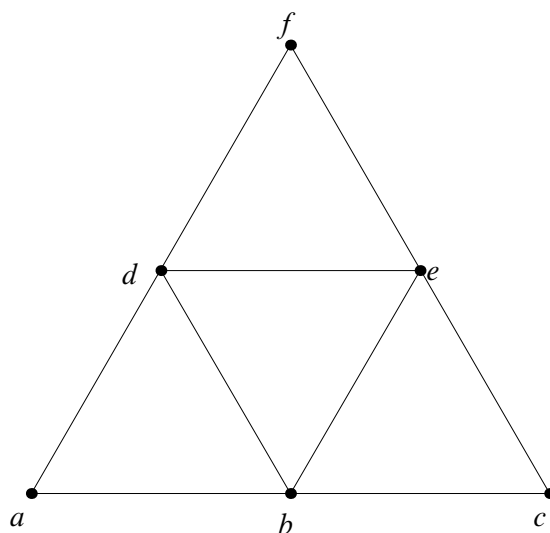


Figura 7.1:

Solució

(a) En el sistema de referència $\mathcal{S}_1$, és evident que els punts a, b i d tenen coordenades $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$, respectivament.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \vec{af} &= 2\vec{ad} \\ \vec{ae} &= \vec{ab} + \vec{be} = \vec{ab} + \vec{ad} \\ \vec{ac} &= 2\vec{ab}, \end{aligned}$$

per tant, f té coordenades $(0, 2)$, e té coordenades $(1, 1)$ i c té coordenades $(2, 0)$.

(b) En el sistema de referència $\mathcal{S}_2$, és evident que els punts b, d i e tenen coordenades $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$, respectivament.

D'altra banda,

$$\begin{aligned}\vec{ba} &= \vec{bd} + \vec{da} = \vec{bd} - \vec{be} \\ \vec{bc} &= -\vec{ba} = -\vec{bd} + \vec{be} \\ \vec{bf} &= \vec{bd} + \vec{df} = \vec{bd} + \vec{be},\end{aligned}$$

per tant, a té coordenades $(1, -1)$, c té coordenades $(-1, 1)$ i f té coordenades $(1, 1)$.

Siguin (x', y') les coordenades d'un punt en el sistema de referència $\mathcal{S}_1$ i (x'', y'') les coordenades del mateix punt en la referència $\mathcal{S}_2$. Les coordenades del punt b en el sistema $\mathcal{S}_1$ són $(1, 0)$ i els vectors $\vec{bd}$ i $\vec{be}$ són

$$\begin{aligned}\vec{bd} &= \vec{ad} - \vec{ab} = -\vec{ab} + \vec{ad} \\ \vec{be} &= \vec{ad}.\end{aligned}$$

Per tant, les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

4. Calculeu les equacions de la recta $2x - 3y = 2$ en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{p; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, on $p = (2, 1)$, $\vec{u}_1 = (1, 1)$ i $\vec{u}_2 = (-1, 1)$.

Solució

Siguin (x', y') les coordenades d'un punt en el sistema de referència $\mathcal{S}$, aleshores les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\begin{cases} x = x' - y' + 2 \\ y = x' + y' + 1 \end{cases}.$$

Per calcular les equacions de la recta en el nou sistema de coordenades hem de substituir la x i la y a l'equació de la recta:

$$2(x' - y' + 2) - 3(x' + y' + 1) = 2.$$

Agrupant els termes obtenim l'equació de la recta en el sistema de referència $\mathcal{S}$

$$-x' - 5y' = 1.$$

5. Donat l'hexàgon regular de la figura 8.7.2, calculeu les coordenades del punt intersecció de les rectes bc i de en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{f; \vec{fa}, \vec{fe}\}$.

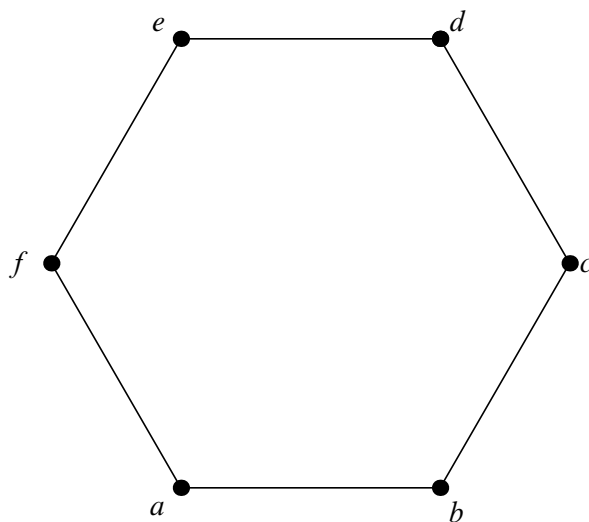


Figura 7.2: Hexàgon regular

Solució

Calculem, en primer lloc, les coordenades dels punts b, c, d i e en el sistema de referència $\mathcal{S}$. Si o és el centre de l'hexàgon, tenim que

$$\begin{aligned}\vec{fb} &= \vec{fo} + \vec{ob} = \vec{fa} + \vec{ao} + \vec{ob} = 2\vec{fa} + \vec{fe} \\ \vec{fc} &= 2\vec{fo} = 2\vec{fa} + 2\vec{ao} = 2\vec{fa} + 2\vec{fe} \\ \vec{fd} &= \vec{fe} + \vec{ed} = \vec{fe} + \vec{eo} + \vec{od} = 2\vec{fe} + \vec{fa},\end{aligned}$$

és a dir, les coordenades dels punts b, c, e i d en la referència $\mathcal{S}$ són $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$ i $(0, 1)$, respectivament.

És evident que l'equació de la recta bc és $x = 2$, mentre que la de la recta de és

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \implies \quad x - y + 1 = 0.$$

Aquestes dues rectes es tallen en el punt $(2, 3)$.

6. Calculeu les equacions de la recta que passa pel punt $(1, 3, 1)$ i pel punt mitjà del segment ab on, $a = (2, 3, 1)$ i $b = (-2, 1, -5)$.

Solució

Recordem que en general el punt mitjà del segment ab , on $a = (a_1, a_2, a_3)$ i $b = (b_1, b_2, b_3)$ és el punt de coordenades

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right).$$

En el nostre cas, tenim que el punt mitjà del segment ab és el punt $(0, 2, -2)$. Aleshores, la recta que passa pels punts $(1, 3, 1)$ i $(0, 2, -2)$ té vector director $\vec{u} = (1, 1, 3)$, i les seves equacions són:

Equació vectorial

$$(x, y, z) = (1, 3, 1) + \lambda(1, 1, 3).$$

Igualant component a component obtenim les equacions paramètriques de la recta

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right\}.$$

Aïllant de cada una d'aquestes equacions el paràmetre λ i igualant, tenim l'equació contínua

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Finalment igualant en primer lloc les dues primeres fraccions i en segon lloc la primera i la tercera, obtenim les equacions implícites d'aquesta recta

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -2 \\ 3x - z = 2 \end{array} \right\}.$$

7. Calculeu les equacions del pla que passa pel punt $(1, 2, -3)$ i té vectors directors $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ i $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

Solució

Equació vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + \alpha(-2, 1, 3) + \beta(1, 2, 0).$$

Equacions paramètriques:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 2 + \alpha + 2\beta \\ z = -3 + 3\alpha \end{array} \right\}.$$

L'equació general del pla s'obté en eliminar els paràmetres α i β d'entre aquestes tres equacions. Com que són lineals en α i β , els podem eliminar amb el següent determinant d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 3 & 0 & z+3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 1 & 2 & y-2 \\ 3 & 0 & z+3 \end{vmatrix} &= -4(z+3) + 3(y-2) - 6(x-1) - (z+3) \\ &= -4z - 12 + 3y - 6 - 6x + 6 - z - 3 \\ &= -6x + 3y - 5z - 15 = 0. \end{aligned}$$

Per tant, l'equació general del pla és

$$6x - 3y + 5z + 15 = 0.$$

8. Quina és l'equació general del pla que passa pels punts $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 5)$ i $(-1, 0, 3)$?

Solució

És evident que aquest pla passa pel punt $(1, 2, 1)$ i té vectors directores $\vec{u} = (1, -1, 4)$ i $\vec{v} = (-2, -2, 2)$. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ estan continguts en el pla, per tant, el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ és perpendicular al pla, i a partir d'aquest podrem trobar directament l'equació general del pla

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} k = (6, -10, -4).$$

Aleshores, l'equació general del pla és de la forma

$$6x - 10y - 4z + D = 0.$$

Com que sabem que ha de passar pel punt $(1, 2, 1)$, podem calcular el coeficient D , ja que

$$6 \cdot 1 - 10 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + D = 0 \implies D = 18.$$

Simplificant ens queda l'equació general del pla:

$$3x - 5y - 2z + 9 = 0.$$

9. Calculeu el punt d'intersecció de la recta

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 11 \\ -2x + y + 3z = -6 \end{array} \right\}$$

i el pla d'equació $5x + y - z = 9$.

Solució

Per calcular la intersecció d'una recta i un pla hem de resoldre el sistema d'equacions format per les equacions implícites de la recta i l'equació general del pla. En aquest cas,

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 11 \\ -2x + y + 3z = -6 \\ 5x + y - z = 9 \end{array} \right\}.$$

Si el volem resoldre pel mètode de Gauss hem de triangular la matriu d'aquest sistema

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & -1 & 9 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 5F_1}]{\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 5F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 0 & 7 & -1 & 16 \\ 0 & -14 & 9 & -46 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 + 2F_2} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 0 & 7 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aleshores la solució del sistema és

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 11 \\ 7y - (-2) = 16 \\ z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3(2) - 2(-2) = 11 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array} \right\} .$$

Per tant, el punt d'intersecció de la recta i el pla és $(1, 2, -2)$.

10. *Comproveu que les quatre rectes*

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad (x, y, z) = (1, -1, -1) + \lambda(0, -1, 1),$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -4 + 2t \end{array} \right\}, \quad i \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

es tallen en un punt.

Solució

Per comprovar que quatre rectes es tallen en un punt és suficient comprovar que les dues primeres es tallen en un punt i que aquest punt també pertany a les altres dues.

(a) Intersecció de les dues primeres rectes:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad i \quad (x, y, z) = (1, -1, -1) + \lambda(0, -1, 1).$$

Substituint x , y i z de la segona recta a l'equació de la primera, tenim que

$$\frac{1-3}{2} = -1 - \lambda + 1 = -1 + \lambda - 1.$$

D'aquestes tres igualtats resulta que $\lambda = 1$, per tant, les dues primeres rectes es tallen en el punt

$$a = (1, -1, -1) + 1(0, -1, 1) = (1, -2, 0).$$

(b) Comprovació que aquest punt també pertany a les altres dues rectes:

Per comprovar que pertany a la tercera recta hem de veure que el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 1 = -1 + t \\ -2 = -t \\ 0 = -4 + 2t \end{array} \right\}$$

és compatible, i això és evident amb $t = 2$.

Finalment, per comprovar que pertany a la quarta recta hem de veure que $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$ és solució del sistema d'equacions implícites que defineixen la recta

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 2(-2) = 5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}.$$

Per tant, les quatre rectes es tallen en el punt $(1, -2, 0)$.

11. Trobeu l'equació de la recta paral·lela als plans $x - 2y + 3z - 2 = 0$ i $-x + y + z = 0$ que passa pel punt $(1, 2, 1)$.

Solució

(a) Primer mètode

Els vectors associats als dos plans són $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$ i $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$, respectivament. Si la recta ha de ser paral·lela als dos plans, el seu vector director $\vec{u}$ ha de ser perpendicular als vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.

Aleshores per trobar un vector perpendicular a $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ hem de calcular el seu producte vectorial

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -4, -1).$$

És a dir, la recta que busquem és la que passa pel punt $(1, 2, 1)$ i té vector director $(5, 4, 1)$. Per tant, la seva equació contínua és

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{1}$$

i les seves equacions implícites

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 5y + 6 = 0 \\ x - 5z + 4 = 0 \end{array} \right\}.$$

(b) Segon mètode

La recta és paral·lela als dos plans, per tant, es pot obtenir com a intersecció de dos plans paral·lels als inicials. Aleshores, les equacions implícites de la recta també poden ser de la forma equacions són de la forma

$$\left. \begin{aligned} x - 2y + 3z + d &= 0 \\ -x + y + z + D &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Per calcular els coeficients d i D imposem que la recta ha de passar pel punt $(1, 2, 1)$, és a dir,

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2(2) + 3(1) + d &= 0 \\ -1 + 2 + 1 + D &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \left. \begin{aligned} d &= 0 \\ D &= -2 \end{aligned} \right\}.$$

Unes altres equacions implícites de la recta són

$$\left. \begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ -x + y + z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

12. Quina és la posició relativa de la recta

$$\left. \begin{aligned} 3x + y + z &= -3 \\ -x + y + z &= 9 \end{aligned} \right\}$$

i el pla $x + 2y + 3z = 11$?

Solució

Calculem en primer lloc la intersecció de la recta i el pla; per això hem de resoldre el sistema format per les equacions cartesianes de la recta i la general del pla:

$$\left. \begin{aligned} 3x + y + z &= -3 \\ -x + y + z &= 9 \\ x + 2y + 3z &= 11 \end{aligned} \right\}.$$

Resolem aquest sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 + F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 0 & 5 & 8 & 36 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim 4F_3 - 5F_2}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 12 & 24 \end{array} \right).$$

Aleshores, la solució del sistema és

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + z = -3 \\ 4y + 4(2) = 24 \\ z = 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} 3x + 4 + 2 = -3 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\}.$$

La recta i el pla es tallen en el punt $(-3, 4, 2)$.

13. Quina és la posició relativa de les rectes

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = y-3 = 2-z \\ 2x+y-z=1 \\ x-y+3z=-2 \end{array} \right\} ?$$

Solució

Les equacions implícites de la primera recta són

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -7 \\ y + z = 5 \end{array} \right\}.$$

Per calcular la intersecció de les dues rectes hem de resoldre el sistema d'equacions format per les seves equacions implícites:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -7 \\ y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + 3z = -2 \end{array} \right\}.$$

Triangulant la matriu d'aquest sistema tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_3 \sim F_3 - 2F_1 \\ F_4 \sim F_4 - F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_3 \sim F_3 - 5F_2 \\ F_4 \sim F_4 - F_2}}{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_4 \sim 3F_4 + F_3}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Evidentment aquest sistema és incompatible, per tant, les dues rectes s'encreuen.

14. Quina és la posició relativa de la recta

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 1 \\ -2x + 3y + 2z = -2 \end{array} \right\}$$

i el pla $7x - 9y - 7z = 7$?

Solució

Per calcular la intersecció de la recta i el pla hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 1 \\ -2x + 3y + 2z = -2 \\ 7x - 9y - 7z = 7 \end{array} \right\}.$$

Triangulant la matriu d'aquest sistema tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & -9 & -7 & 7 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 + 2F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 7F_1}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - 5F_2} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aquest sistema és compatible indeterminat, per tant, la recta està continguda en el pla.

15. Trobeu a de manera que les rectes d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + z = a \\ 2ax - 3y - az = 1 \end{array} \right\} \quad i \quad \left. \begin{array}{l} -2x + 3y + 2az = -1 \\ ax + 2z = 3 \end{array} \right\}$$

siguin paral·leles.

Solució

Dues rectes són paral·leles si els seus vectors directors són linealment dependents. El vector di-

rector de la primera recta és

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 2a & -3 & -a \end{vmatrix} = (a + 3, 5a, 2a - 9)$$

i el vector director de la segona és

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 2a \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6, 2a^2 + 4, -3a).$$

Aquests dos vectors són linealment dependents si, i només si,

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} a + 3 & 6 \\ 5a & 2a^2 + 4 \\ 2a - 9 & -3a \end{pmatrix} = 1$$

i aquesta matriu té rang 1 si, i només si,

$$\begin{vmatrix} a + 3 & 6 \\ 5a & 2a^2 + 4 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 26a + 12 = 0 \quad \begin{vmatrix} a + 3 & 6 \\ 2a - 9 & -3a \end{vmatrix} = -3a^2 - 21a + 54 = 0.$$

Les solucions d'aquesta segona equació són

$$a = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 648}}{-6} = \frac{21 \pm \sqrt{1089}}{-6} = \frac{21 \pm 33}{-6} = \begin{cases} 2 \\ -9 \end{cases},$$

de les quals únicament $a = 2$ és solució de l'equació $2a^3 + 6a^2 - 26a + 12 = 0$. Per tant, les rectes són paral·leles quan $a = 2$.

Per comprovar si són paral·leles i diferents o si coincideixen, hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 4x - 3y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}.$$

Triangulant el sistema d'equacions tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \sim 3F_2 - 4F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 + 2F_1 \\ F_4 \sim F_4 + F_3}]{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 7 & 14 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_3 \sim 5F_3 + 7F_2 \\ F_4 \sim 5F_4 + 3F_2}]{}$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right).$$

Aquest sistema és incompatible, per tant, quan $a = 2$ les dues rectes són paral·leles i diferents.

16. Estudieu la posició relativa dels plans

$$\begin{aligned} 3ax + (2a + 1)y + (a + 1)z &= a \\ (2a - 1)x + (2a - 1)y + (a - 2)z &= a + 1 \\ (4a - 1)x + 3ay + 2az &= 1 \end{aligned}$$

en funció del paràmetre a .

Solució

Per estudiar la posició relativa d'aquests tres plans hem d'estudiar el sistema format per les equacions implícites d'aquests plans en funció del paràmetre a :

$$\left. \begin{aligned} 3ax + (2a + 1)y + (a + 1)z &= a \\ (2a - 1)x + (2a - 1)y + (a - 2)z &= a + 1 \\ (4a - 1)x + 3ay + 2az &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

El determinant d'aquest sistema és

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3a & 2a + 1 & a + 1 \\ 2a - 1 & 2a - 1 & a - 2 \\ 4a - 1 & 3a & 2a \end{vmatrix} &= 6a^2(2a - 1) + (2a + 1)(4a - 1)(a - 2) \\ &\quad + 3a(a + 1)(2a - 1) - (a + 1)(2a - 1)(4a - 1) \\ &\quad - 9a^2(a - 2) - 2a(2a - 1)(2a + 1) \\ &= a^3 - a^2 - a + 1. \end{aligned}$$

Si aquest determinant és diferent de zero, el sistema és compatible determinat. Els valors de a per als quals s'anul·la el determinant són les solucions de l'equació de tercer grau $a^3 - a^2 - a + 1 = 0$. La primera solució podem calcular-la pel mètode de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

i evidentment les altres solucions són $a = \pm 1$.

(a) Si $a \neq \pm 1$, els tres plans es tallen en un punt.

(b) Si $a = 1$, el sistema format per les equacions dels tres plans és

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

i és evident que el primer pla i el tercer coincideixen i que aquest pla i el segon es tallen en una recta.

(c) Si $a = -1$, el sistema format per les equacions dels tres plans és

$$\left. \begin{array}{l} -3x - y = -1 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ -5x - 3y - 2z = 1 \end{array} \right\}$$

i podem estudiar aquest sistema triangulant la matriu

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -5 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim 3F_3 - 5F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \sim F_3 - 2F_2} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aquest sistema és incompatible i no hi ha cap parell de plans paral·lels, per tant, els plans es tallen dos a dos en tres rectes paral·leles.

7.2 L'espai afí euclidià

17. Calculeu l'equació del pla P que passa pels punts $(1, 1, 2)$ i $(3, 0, 1)$ i és perpendicular al pla d'equació $3x - y + z = 2$.

Solució

En primer lloc el vector $\vec{u} = (2, -1, -1)$, que té origen en el punt $(1, 1, 2)$ i extrem $(3, 0, 1)$, ha d'estar contingut en el pla P , per tant, ha de ser perpendicular al vector associat a aquest pla.

En segon lloc el pla P ha de ser perpendicular al pla d'equació $3x - y + z = 2$, per tant, el seu vector associat ha de ser perpendicular al vector $(3, -1, 1)$.

És a dir, tenim que el vector associat al pla P ha de ser perpendicular als vectors $(2, -1, -1)$ i $(3, -1, 1)$, per tant, el podem calcular fent el producte vectorial d'aquests dos vectors:

$$(2, -1, -1) \wedge (3, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -5, 1).$$

Aleshores l'equació implícita del pla P és de la forma

$$2x + 5y - z + D = 0$$

i atès que passa pel punt $(1, 1, 2)$ obtenim que $D = -5$, per tant, P és el pla d'equació $2x + 5y - z - 5 = 0$.

18. Calculeu l'equació del pla perpendicular a la recta

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

que passa pel punt $(1, 0, 3)$.

Solució

El vector director de la recta $\vec{u}$ és perpendicular al pla, per tant, és un vector associat al pla (figura 7.2).

La recta ve donada com a intersecció de dos plans, aleshores el seu vector director és el producte vectorial dels vectors associats a aquests plans

$$\vec{u} = (1, -2, 3) \wedge (1, 1, -2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 5, 3).$$

Finalment, si $\vec{u} = (1, 5, 3)$ és un vector associat al pla P , la seva equació és de la forma

$$x + 5y + 3z + D = 0.$$

Per calcular el coeficient D , fem servir que aquest pla passa pel punt $(1, 0, 3)$. És evident que $D = -10$. Per tant, l'equació implícita del pla és

$$x + 5y + 3z - 10 = 0.$$

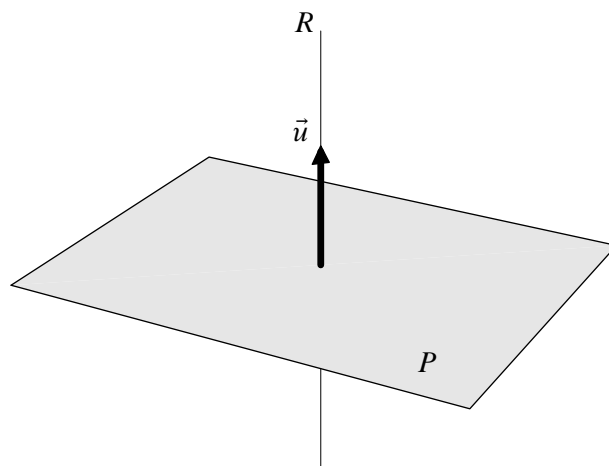


Figura 7.3: Pla i vector associat

19. Calculeu l'equació del pla que conté la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$$

i és perpendicular al pla $x + 2y - 3z = 1$.

Solució

Com que el pla que busquem ha de contenir la recta de l'enunciat, ha de passar pel punt $(1, -2, 0)$ i un dels seus vectors directores ha de ser $(2, -1, 3)$. D'altra banda, el fet de ser perpendicular al pla $x + 2y - 3z = 1$, implica que ha de contenir el vector $(1, 2, -3)$.

Així doncs, ja tenim un punt de pas i dos vectors directores de pla. Per tant, la seva equació serà

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & 2 & y+2 \\ 3 & -3 & z \end{vmatrix} = -3x + 9y + 5z + 21 = 0.$$

20. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $(3, 6, 5)$ respecte al pla d'equació general $x + 2y + 3z = 2$.

Solució

La projecció ortogonal d'un punt sobre un pla és la intersecció del pla i la recta perpendicular al pla que passa per aquest punt.

El vector associat al pla és $\vec{u} = (1, 2, 3)$, per tant, l'equació vectorial de la recta perpendicular al pla que passa pel punt $(3, 6, 5)$ és

$$(x, y, z) = (3, 6, 5) + \lambda(1, 2, 3).$$

Substituint a l'equació del pla

$$3 + \lambda + 12 + 4\lambda + 15 + 9\lambda = 2 \implies 14\lambda = -28 \implies \lambda = -2.$$

Per tant, la intersecció de la recta i el pla és el punt

$$(3, 6, 5) - 2(1, 2, 3) = (1, 2, -1).$$

És a dir, la projecció ortogonal del punt $(3, 6, 5)$ sobre el pla $x + 2y + 3z = 2$ és el punt $(1, 2, -1)$.

D'altra banda, si posem $a = (3, 6, 5)$ i $b = (1, 2, -1)$, el simètric a' del punt a respecte al pla compleix que b és el punt mitjà del segment aa' . Aleshores, si $a' = (a_1, a_2, a_3)$, s'ha de complir que

$$\frac{a_1 + 3}{2} = 1, \quad \frac{a_2 + 6}{2} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{a_3 + 5}{2} = -1.$$

Per tant, el simètric del punt $(3, 6, 5)$ respecte al pla és el punt $a' = (-1, -2, -7)$.

21. Calculeu la projecció ortogonal i el simètric del punt $(3, 5, -1)$ respecte a la recta d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + y - 3z = -1 \end{array} \right\}.$$

Solució

La projecció ortogonal d'un punt sobre una recta és la intersecció de la recta i el pla perpendicular a la recta que passa per aquest punt. El vector director de la recta és

$$(1, 3, 1) \wedge (1, 1, -3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-10, 4, -2).$$

Per tant, l'equació del pla perpendicular a aquesta recta és de la forma

$$5x - 2y + z + D = 0$$

i com que aquest pla ha de passar pel punt $(3, 5, -1)$, obtenim que $D = -4$.

Aleshores, la projecció ortogonal del punt $(3, 5, -1)$ sobre la recta s'obté en resoldre el sistema format per les equacions de la recta i l'equació del pla perpendicular

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ x + y - 3z = -1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{array} \right\}.$$

Triangulant la matriu del sistema tenim que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right) & \underset{\substack{F_2 \sim F_2 - F_1 \\ F_3 \sim F_3 - 5F_1}}{\simeq} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -17 & -4 & -21 \end{array} \right) \underset{F_3 \sim 2F_3 - 17F_2}{\simeq} \\ & \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \end{array} \right). \end{aligned}$$

La solució del sistema és

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ -2y - 4 = -6 \\ z = 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x + 3 + 1 = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\}.$$

Per tant, la projecció ortogonal és el punt $(1, 1, 1)$.

De la mateixa manera que a l'exercici anterior, si $a' = (a_1, a_2, a_3)$ és el simètric del punt $(3, 5, -1)$ respecte a la recta s'ha de complir que

$$\frac{a_1 + 3}{2} = 1, \quad \frac{a_2 + 5}{2} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{a_3 - 1}{2} = 1.$$

Aleshores, el simètric de $(3, 5, -1)$ respecte a la recta és el punt $a' = (-1, -3, 3)$.

22. Calculeu la distància del punt $(1, 3, -2)$ al pla d'equació $x - 2y + 5z - 1 = 0$.

Solució

Si $\vec{u}$ és el vector associat al pla P i b un punt d'aquest pla, la distància entre un punt A i el pla ve donada per

$$d = \frac{|\vec{ba} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}.$$

En aquest cas, tenim que $\vec{u} = (1, -2, 5)$ i per trobar un punt del pla hem de trobar una solució de l'equació $x - 2y + 5z - 1 = 0$. Com que tenim tres incògnites i només una equació, podem donar valors arbitraris a la y i a la z , per exemple $y = 0, z = 0$ i obtenim $x = 1$, és a dir, $b = (1, 0, 0)$.

Aleshores és clar que $\vec{ba} = (0, 3, -2)$ i que la distància entre el punt i el pla és

$$d = \frac{|-16|}{\sqrt{30}} = \frac{16}{\sqrt{30}} = \frac{8\sqrt{30}}{15}.$$

23. Calculeu la distància del punt $(1, 1, 1)$ a la recta

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = -5 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array} \right\}.$$

Solució

Si $\vec{u}$ és el vector director de la recta i p un punt d'aquesta recta, la distància entre un punt a i la recta ve donada per

$$d = \frac{\|\vec{pa} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

El vector director de la recta és

$$\vec{u} = (1, -1, 1) \wedge (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

i per trobar un punt de la recta donem a la z el valor $z = 0$ i resolem el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -5 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\} \implies x = 7 \text{ i } y = 12,$$

per tant, $p = (7, 12, 0)$.

Aleshores

$$\overrightarrow{pa} = (-6, -11, 1) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{pa} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -11 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-10, 4, -16).$$

Per tant, la distància entre el punt i la recta és

$$d = \frac{\sqrt{372}}{\sqrt{6}} = \sqrt{62}.$$

24. Calculeu la distància entre les rectes

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{array} \right\},$$

i l'equació de la perpendicular comuna que les talla.

Solució

El vector director de la primera recta és

$$\vec{u} = (1, -2, 1) \wedge (-2, 1, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5, -4, -3)$$

i el vector director de la segona

$$\vec{v} = (2, 1, 3) \wedge (1, 0, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, -1).$$

Per trobar un punt de la primera recta donem el valor $z = 2$ i resollem el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ -2x + y = -4 \end{array} \right\} \quad \implies \quad x = 3 \text{ i } y = 2,$$

per tant, $p_1 = (3, 2, 2)$. I per trobar un punt de la segona recta donem el valor $z = 0$ i obtenim directament $x = 1$ i $y = 0$, per tant, $p_2 = (1, 0, 0)$.

Aleshores,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-5, -14, 27),$$

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = (-2, -2, -2) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{p_1 p_2} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -16$$

Per tant, la distància entre les dues rectes és

$$d = \frac{|-16|}{\sqrt{950}} = \frac{16}{\sqrt{950}} = \frac{8\sqrt{38}}{95}.$$

D'altra banda, la perpendicular comuna que talla aquestes dues rectes es pot obtenir com a intersecció dels plans P i Q , on P és el pla que passa pel punt p_1 i té vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{u} \wedge \vec{v}$ i Q és el pla que passa pel punt p_2 i té vectors directors $\vec{v}$ i $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

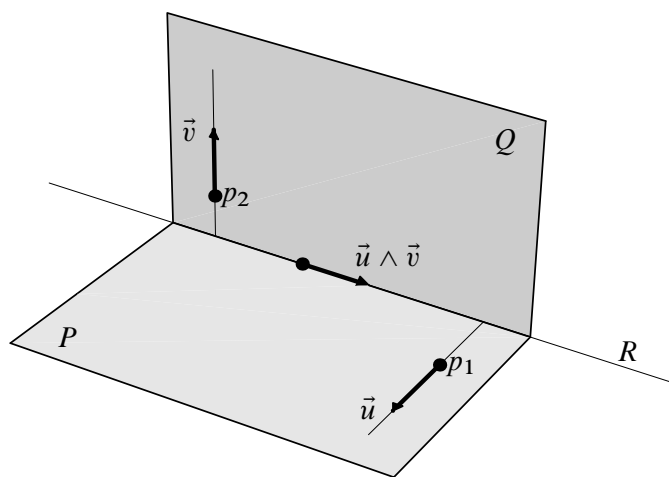


Figura 7.4: Recta perpendicular comuna

L'equació del pla P és

$$\begin{vmatrix} -5 & -5 & x-3 \\ -4 & -14 & y-2 \\ -3 & 27 & z-2 \end{vmatrix} = -150x + 150y + 50z + 50 = 0$$

i l'equació del pla Q és

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & x-1 \\ -3 & -14 & y \\ -1 & 27 & z \end{vmatrix} = -95x - 76y - 57z + 95 = 0.$$

Per tant, l'equació de la recta perpendicular a les dues de l'enunciat que les talla és

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 3y - z = 1 \\ 95x + 76y + 57z = 95 \end{array} \right\}.$$

25. Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs $(1, 2, -3)$, $(1, 1, 1)$ i $(-1, 4, 2)$.

Solució

L'àrea d'un triangle de vèrtexs a , b i c és

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{ab}\| \frac{\|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|}{\|\vec{ab}\|} = \frac{1}{2} \|\vec{ab} \wedge \vec{ac}\|.$$

En aquest cas, tenim que $a = (1, 2, -3)$, $b = (1, 1, 1)$ i $c = (-1, 4, 2)$. Per tant, $\vec{ab} = (0, -1, 4)$ i $\vec{ac} = (-2, 2, 5)$.

Aleshores

$$\vec{ab} \wedge \vec{ac} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-13, -8, -2)$$

i l'àrea del triangle és

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{237} = \frac{\sqrt{237}}{2}.$$

26. El punt p té coordenades $(-6, 10, -6)$ en el sistema de referència $\mathcal{S} = \{o; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ i el pla P té equació $2x' - y' + 3z' = 2$. Sabent que aquests vectors tenen longitud 2, que $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ formen un angle de 60° , $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$ de 120° i que $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ són perpendiculars, calculeu la projecció ortogonal de p sobre P i la distància del punt al pla.

Solució

En primer lloc, observem que el vector de components $(2, -1, 3)$ no és perpendicular al pla P ja que la referència no és rectangular. D'altra banda, tenim que els productes escalars entre els vectors de la base són

$$\begin{array}{lll} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 = 4 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = 4 & \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = 4 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = -2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0 \end{array}$$

D'altra banda, el subespai director del pla té equació implícita $2x' - y' + 3z' = 0$, per tant, podem prendre com a vectors directores del pla $\vec{u} = (1, 2, 0)$ i $\vec{v} = (0, 3, 1)$, on aquestes components estan referides a la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Un vector $\vec{w}$ és perpendicular al pla si, i només si, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ i $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Si les components de $\vec{w}$ en la base $\mathcal{B}$ són (a, b, c) , aquests productes escalars són

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= (\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3) \\ &= 4a + 2b - 2c + 4a + 8b = 8a + 10b - 2c = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= (3\vec{u}_2 + \vec{u}_3) \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3) \\ &= 6a + 12b - 2a + 4c = 4a + 12b + 4c = 0.\end{aligned}$$

Per tant, per a obtenir el vector $\vec{w}$ (les seves components en la base $\mathcal{B}$), hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned}8a + 10b - 2c &= 0 \\ 4a + 12b + 4c &= 0\end{aligned} \right\};$$

una possible solució del qual és $\vec{w} = (8, -5, 7)$, expressat en la base $\mathcal{B}$.

Aleshores, les equacions paramètriques de la recta perpendicular al pla que passa pel punt p en la referència $\mathcal{S}$ són

$$\left. \begin{aligned}x' &= -6 + 8\lambda \\ y' &= 10 - 5\lambda \\ z' &= -6 + 7\lambda\end{aligned} \right\}$$

i la intersecció d'aquesta recta amb el pla P s'obté en resoldre l'equació

$$\begin{aligned}2(-6 + 8\lambda) - (10 - 5\lambda) + 3(-6 + 7\lambda) &= 2 \\ 42\lambda &= 42 \\ \lambda &= 1.\end{aligned}$$

Per tant, la projecció ortogonal de p sobre el pla és el punt $q = (2, 5, 1)$.

Finalment, la distància del punt al pla és $d(p, P) = \|\vec{pq}\| = \sqrt{\vec{pq} \cdot \vec{pq}}$, on

$$\vec{pq} \cdot \vec{pq} = (8\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 + \vec{u}_3) \cdot (8\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = 168,$$

és a dir, $d(p, P) = 2\sqrt{42}$.

8

Còniques i quàdriques

8.1 Còniques

1. Calculeu l'equació de l'el·lipse que té els focus en els punts $F = (2, 1)$ i $F' = (0, 3)$ i el semieix major és $a = 2$.

Solució

El centre de l'el·lipse és el punt mitjà del segment FF' , és a dir, el punt $C = (1, 2)$, la distància entre el centre i un dels focus és $c = d(C, F) = \sqrt{2}$ i el semieix menor és $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$. Per tant, l'equació canònica de l'el·lipse és

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Multiplicant aquesta equació per 4 tenim l'equació equivalent $x'^2 + 2y'^2 = 4$.

Aquesta és l'equació de l'el·lipse en la referència

$$\mathcal{R} = \{(1, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\},$$

ja que l'origen d'aquesta referència és el centre de l'el·lipse, l'eix de les x' és la recta que passa pel centre i els focus (té vector director $(1, -1)$) i l'eix de les y' és la recta perpendicular a l'anterior que passa pel centre (té vector director $(1, 1)$).

L'equació del canvi de coordenades és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si aïllem (x', y') en funció de (x, y) obtenim

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}} \\ y' &= \frac{x + y - 3}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\}.$$

Substituint a l'equació $x'^2 + 2y'^2 = 4$ obtindrem l'equació de l'el·lipse:

$$\begin{aligned} \frac{(x - y + 1)^2}{2} + \frac{2(x + y - 3)^2}{2} &= 4 \\ x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y + 2(x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y) &= 8 \\ 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Una **altra manera** de trobar l'equació de l'el·lipse és fer servir la seva definició, és a dir, és el conjunt de punts del pla tals que $d(p, F) + d(p, F') = 2a$. Aleshores, l'equació és

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 4.$$

Si passem la segona arrel a l'altre costat de la igualtat i elevem els dos termes al quadrat tenim que

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 &= (4 - \sqrt{x^2 + (y - 3)^2})^2, \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 &= 16 - 8\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} + x^2 + y^2 - 6y + 9. \end{aligned}$$

Agrupant els termes, tenim que $-4x + 4y - 20 = -8\sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$, aleshores simplifiquem per -4 i tornem a elevar al quadrat:

$$\begin{aligned}(x - y + 5)^2 &= (2\sqrt{x^2 + (y - 3)^2})^2, \\ x^2 - 2xy + y^2 + 10x - 10y + 25 &= 4(x^2 + y^2 - 6y + 9), \\ x^2 - 2xy + y^2 + 10x - 10y + 25 &= 4x^2 + 4y^2 - 24y + 36.\end{aligned}$$

Finalment, agrupant els termes obtenim l'equació de l'el·lipse

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 11 = 0.$$

A la figura 8.1 podem veure el gràfic d'aquesta el·lipse.

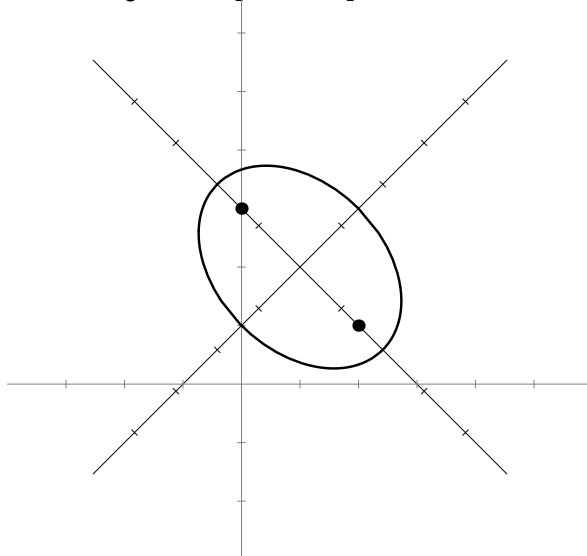


Figura 8.1: El·lipse d'equació $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x - 14y + 11 = 0$

2. Calculeu l'equació de la hipèrbola que té els focus en els punts $F = (-1, 2)$ i $F' = (3, 0)$ i el semieix real és $a = 2$.

Solució

El centre de la hipèrbola és el punt mitjà del segment FF' , és a dir, el punt $C = (1, 1)$, la distància entre el centre i un dels focus és $c = d(C, F) = \sqrt{5}$ i el semieix imaginari és $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5 - 4} = 1$. Per tant, l'equació canònica de l'el·lipse és

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Multiplicant aquesta equació per 4 tenim l'equació equivalent $x'^2 - 4y'^2 = 4$.

Aquesta és l'equació de la hipèrbola en la referència

$$\mathcal{R} = \{(1, 1); \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)\},$$

ja que l'origen d'aquesta referència és el centre de la hipèrbola, l'eix de les x' és la recta que passa pel centre i els focus (té vector director $(2, -1)$) i l'eix de les y' és la recta perpendicular a l'anterior que passa pel centre (té vector director $(1, 2)$).

L'equació del canvi de coordenades és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si aïllem (x', y') en funció de (x, y) obtenim

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} \\ y' &= \frac{x + 2y - 3}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\}.$$

Substituint a l'equació $x'^2 - 4y'^2 = 4$ obtindrem l'equació de la hipèrbola:

$$\begin{aligned} \frac{(2x - y - 1)^2}{5} - \frac{4(x + 2y - 3)^2}{5} &= 4 \\ 4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y - 4(x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y) &= 20 \\ -20xy - 15y^2 + 20x + 50y - 55 &= 0 \\ 4xy + 3y^2 - 4x - 10y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Una **altra manera** de calcular l'equació de la hipèrbola és fent servir la seva definició, és a dir, és el conjunt de punts del pla tals que $|d(p, F) + d(p, F')| = 2a$. Aleshores l'equació és

$$|\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}| = 4.$$

Aquesta igualtat també es pot posar sense el valor absolut

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \pm 4.$$

Si passem la segona arrel a l'altre costat de la igualtat i elevem els dos termes al quadrat tenim

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 &= (\pm 4 + \sqrt{(x-3)^2 + y^2})^2, \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 16 \pm 8\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2.\end{aligned}$$

Agrupant els termes, tenim que $8x - 4y - 20 = \pm 8\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, aleshores simplifiquem per 4 i tornem a elevar al quadrat:

$$\begin{aligned}(2x - y - 5)^2 &= (\pm 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2})^2, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 20x + 10y + 25 &= 4(x^2 - 6x + 9 + y^2), \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 20x + 10y + 25 &= 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2.\end{aligned}$$

Finalment, agrupant els termes obtenim l'equació de la hipèrbola

$$4xy + 3y^2 - 4x - 10y + 11 = 0.$$

A la figura 8.2 podem veure el gràfic d'aquesta hipèrbola.

3. Calculeu l'equació de la paràbola que té el focus en el punt $F = (-2, 1)$ i la recta directriu és la recta d'equació $R : x + 2y - 3 = 0$.

Solució

En aquest cas, calculem l'equació de la paràbola fent servir la seva definició, és a dir, és el conjunt de punts del pla tals que $d(p, F) = d(p, R)$. Aleshores l'equació és

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{5}}.$$

Elevant els dos termes de la igualtat al quadrat tenim

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + (y-1)^2 &= \frac{(x+2y-3)^2}{5}, \\ 5(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9, \\ 5x^2 + 20x + 20 + 5y^2 - 10y + 5 &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9.\end{aligned}$$

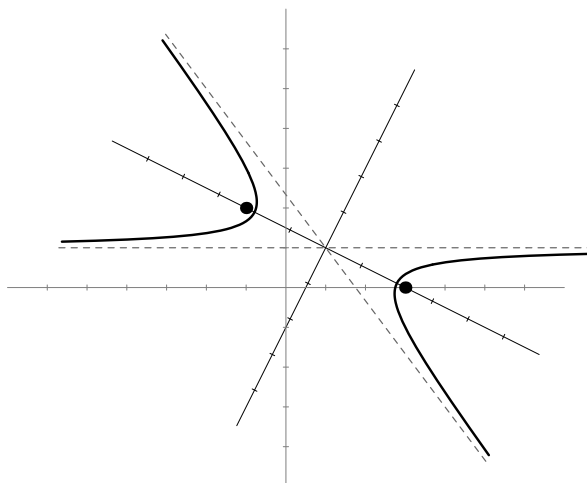


Figura 8.2: Hipèrbola d'equació $4xy + 3y^2 - 4x - 10y + 11 = 0$

Finalment, agrupant els termes obtenim l'equació de la paràbola

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 26x + 2y + 16 = 0.$$

A la figura 8.3 podem veure el gràfic d'aquesta paràbola.

4. Donada la cònica d'equació $10x^2 - 12xy - 6y^2 - 12x - 12y - 129 = 0$, Classifiqueu-la i calculeu-ne la seva equació reduïda i els seus elements geomètrics.

Solució

En primer lloc, comprovem si aquesta és una cònica amb centre o sense centre. Per això, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$QX + L = 0,$$

on Q és la matriu de la part quadràtica de la cònica i L la part lineal:

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, la solució del sistema d'equacions

$$\begin{cases} 10x - 6y - 6 = 0 \\ -6x - 6y - 6 = 0 \end{cases}$$

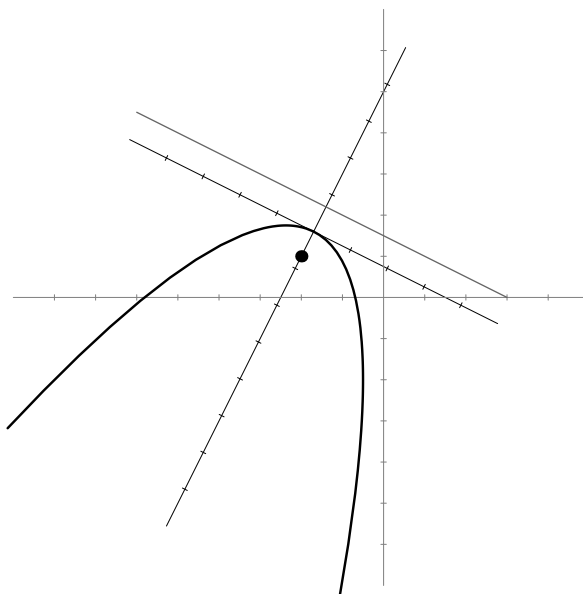


Figura 8.3: Paràbola d'equació $4x^2 - 4xy + y^2 + 26x + 2y + 16 = 0$

és $x = 0$ i $y = -1$. És a dir, es tracta d'una cònica amb centre en el punt $(0, -1)$.

En segon lloc hem de trobar els valors i els vectors propis de la matriu Q .

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x - 10 & 6 \\ 6 & x + 6 \end{vmatrix} = (x - 10)(x + 6) - 36 = x^2 - 4x - 96.$$

Valors i vectors propis:

Les arrels del polinomi característic són

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 384}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} = \begin{cases} 12 \\ -8 \end{cases},$$

per tant, els valors propis de la matriu Q són 12 i -8 .

Sabem que l'equació reduïda de la cònica és $12x'^2 - 8y'^2 + t' = 0$ on

$$t' = F(0, 1) = 10(0)^2 - 12(0)(-1) - 6(-1)^2 - 12(0) - 12(-1) - 129 = -123,$$

és a dir, l'equació reduïda de la cònica és $12x'^2 - 8y'^2 - 123 = 0$ i aquesta cònica és una hipèrbola.

Els vectors propis d'aquesta matriu són els nuclis de les matrius $Q - 12I$ i $Q + 8I$, respectivament:

$$Q - 12I = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -18 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -3y \Rightarrow \text{Nuc}(Q - 12I) = \langle (3, -1) \rangle,$$

$$Q + 8I = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 3x \Rightarrow \text{Nuc}(Q + 8I) = \langle (1, 3) \rangle.$$

Aleshores, l'equació del canvi de coordenades que passa de l'equació inicial de la cònica a l'equació reduïda és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Els eixos de la hipèrbola, que coincideixen amb els eixos de coordenades (x', y') són les rectes que passen pel centre i tenen vectors directors els vectors propis de la matriu Q . L'eix de les x' és la recta que passa pel centre i té vector director $(3, -1)$, és a dir, la recta d'equació $x + 3y + 3 = 0$, mentre que l'eix de les y' és la recta que passa pel centre i té vector director $(1, 3)$, és a dir, la recta d'equació $3x - y - 1 = 0$.

A la figura 8.4 podem veure el gràfic d'aquesta hipèrbola.

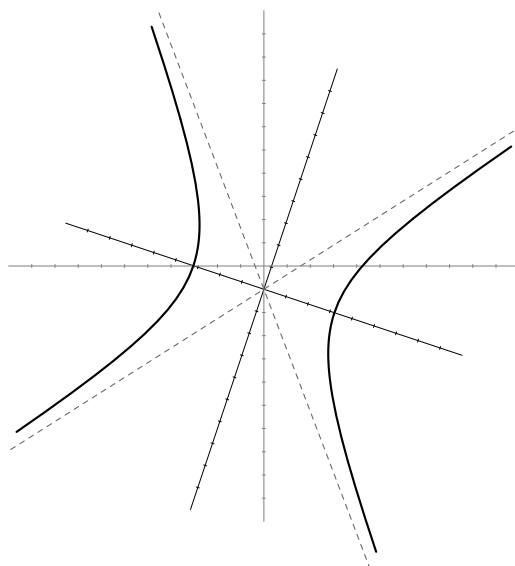


Figura 8.4: Hipèrbola d'equació $10x^2 - 12xy - 6y^2 - 12x - 12y - 129 = 0$

5. Calculeu l'equació reduïda de la cònica $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$. Classifiqueu-la i calculeu-ne l'eix o eixos de simetria.

Solució

Per saber si la cònica té centre, hem de resoldre el sistema d'equacions $QX + L = 0$, és a dir,

$$\begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases},$$

que és incompatible. Aquesta cònica no té centre i és una paràbola.

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x-1) - 1 = x^2 - 2x$$

Valors i vectors propis:

Les arrels del polinomi característic són 2 i 0, per tant, els valors propis de la matriu Q són 2 i 0.

Els vectors propis d'aquesta matriu són els nuclis de les matrius $Q - 2I$ i Q , respectivament:

$$Q - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = y \implies \text{Nuc}(Q - 2I) = \langle (1, 1) \rangle,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = -y \implies \text{Nuc}(Q) = \langle (-1, 1) \rangle.$$

L'equació reduïda de la paràbola és $2x'^2 + 2\ell'y' = 0$ on $\ell' = \vec{e}_2' \cdot (\ell_1, \ell_2)$, on $\vec{e}_2'$ és el vector propi unitari amb valor propi nul que apareix com a segon vector de la referència principal de la cònica:

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \cdot (4, -4) = \frac{-8}{\sqrt{2}}$$

i l'equació reduïda de la paràbola és

$$2x'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}y' = 0 \implies x'^2 - 4\sqrt{2}y' = 0.$$

Per calcular el vèrtex de la paràbola, necessitem el seu eix de simetria, que té equació

$$U^t(QX + L) = 0,$$

on U és un vector (columna) propi amb valor propi no nul. En aquest cas, $(1, 1) \cdot (x + y + 4, x + y - 4) = 0$, és a dir, $x + y = 0$. Aleshores, el vèrtex s'obté com a intersecció de la paràbola i l'eix de simetria:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Substituint $y = -x$ a la primera equació, obtenim

$$\begin{aligned}x^2 + 2x(-x) + (-x)^2 + 8x - 8(-x) + 16 &= 0 \\16x + 16 &= 0 \\x &= -1.\end{aligned}$$

El vèrtex de la paràbola és el punt $(-1, 1)$.

Els eixos de la paràbola són les rectes que passen pel vèrtex i tenen vectors directors els vectors propis de la matriu Q , és a dir, les direccions determinades per la base del nou sistema de referència. L'eix de les x' és la recta que passa pel vèrtex i té vector director $(1, 1)$, és a dir, la recta d'equació $x - y + 2 = 0$, mentre que l'eix de les y' és la recta que passa pel vèrtex i té vector director $(-1, 1)$, és a dir, la recta d'equació $x + y = 0$ (de fet, és l'eix de simetria de la paràbola). L'expressió del canvi de coordenades és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

A la figura 8.5 podem veure el gràfic d'aquesta paràbola.

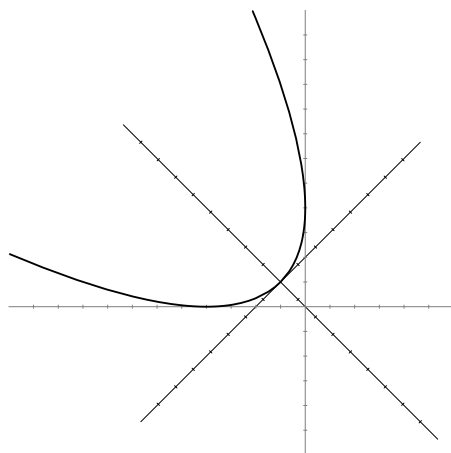


Figura 8.5: Paràbola d'equació $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$

- 6.** Estudieu la cònica d'equació $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x + 16 = 0$, calculeu tots els seus elements geomètrics, l'equació canònica i representeu-la gràficament.

Solució

Com sempre comencem comprovant si es tracta d'una cònica amb centre o sense resolent el sistema d'equacions $QX + L = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + 8 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right\}.$$

La solució d'aquest sistema és $x = -3$, $y = 1$, és a dir, el centre de la cònica és el punt $(-3, 1)$.

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8.$$

Valors i vectors propis:

Les arrels del polinomi característic són

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}.$$

Per tant, els valors propis de la matriu Q són 4 i 2.

L'equació reduïda de la cònica és $4x'^2 + 2y'^2 + t' = 0$ on

$$t' = F(3, -1) = 3(-3)^2 + 2(-3)(1) + 3(1)^2 + 16(-3) + 16 = -8,$$

és a dir, l'equació reduïda de la cònica és $4x'^2 + 2y'^2 - 8 = 0$ i aquesta cònica és una hipèrbola. Per obtenir l'equació canònica, només cal aïllar el terme independent i dividir:

$$4x'^2 + 2y'^2 = 8 \implies \frac{4x'^2}{8} + \frac{2y'^2}{8} = 1 \implies \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

A partir d'aquesta equació tenim que el semieix major és $Q = 2$, el semieix menor és $b = \sqrt{2}$ i la distància focal és $2\sqrt{2}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$).

Els vectors propis de la matriu Q són els nuclis de les matrius $Q - 4I$ i $Q - 2I$, respectivament:

$$Q - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = y \implies \text{Nuc}(Q - 4I) = \langle (1, 1) \rangle,$$

$$Q - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = -y \implies \text{Nuc}(Q - 2I) = \langle (-1, 1) \rangle.$$

L'eix de les x' és la recta que passa pel centre i té vector director $(1, 1)$, és a dir, $x - y + 4 = 0$, mentre que l'eix de les y' és la recta que passa pel centre i té vector director $(-1, 1)$, és a dir, $x + y + 2 = 0$.

Les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Els focus de l'el·lipse són els punts de coordenades $(0, \pm\sqrt{2})$ en la referència principal $\mathcal{R}'$ de la cònica, mentre que els vèrtex són els punts de coordenades $(0, \pm 2)$ i $(\pm\sqrt{2}, 0)$ (són els valors de la y' quan $x' = 0$ i els valors de x' quan $y' = 0$) en aquesta mateixa referència.

Substituint a les equacions del canvi de coordenades, obtenim que els focus tenen coordenades $(-4, 2)$ i $(-2, 0)$ i que els quatre vèrtexs de l'el·lipse són $(-3 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$, $(-3 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(-2, 2)$ i $(-4, 0)$.

Una vegada calculats tots els elements d'aquesta el·lipse, a la figura 8.6 podem veure la seva representació gràfica.

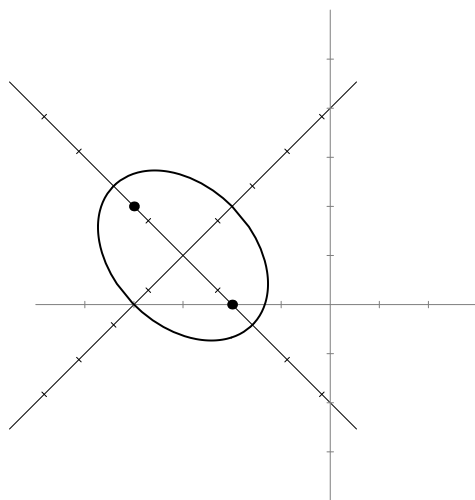


Figura 8.6: El·lipse d'equació $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x + 16 = 0$

7. Estudieu la cònica d'equació $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 11 = 0$, calculeu tots els seus elements geomètrics, l'equació canònica i representeu-la gràficament.

Solució

Comprovem si es tracta d'una cònica amb centre resolent el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 4x - 2y + 16 = 0 \\ -2x + y + 17 = 0 \end{cases}.$$

Aquest sistema és incompatible i la cònica és una paràbola.

Polinomi característic, valors i vectors propis de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = (x-4)(x-1) - 4 = x^2 - 5x.$$

Les arrels del polinomi característic són 5 i 0. Per tant, els valors propis de la matriu Q són 5 i 0 i els vectors propis d'aquesta matriu són els nuclis de les matrius $Q - 5I$ i Q , respectivament:

$$Q - 5I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = -2y \implies \text{Nuc}(Q - 5I) = \langle (2, -1) \rangle,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies y = 2x \implies \text{Nuc}(Q) = \langle (1, 2) \rangle.$$

L'equació reduïda de la paràbola és $5x'^2 + 2\ell'y' = 0$, on

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) \cdot (16, 17) = \frac{50}{\sqrt{5}}.$$

Per tant, l'equació reduïda és

$$x'^2 + \frac{100}{\sqrt{5}}y' = 0 \quad \text{o} \quad x'^2 + 20\sqrt{5}y' = 0$$

i l'equació canònica

$$y' = -\frac{\sqrt{5}}{100}x'^2.$$

El paràmetre de la paràbola és $p = 10\sqrt{5}$.

L'eix de simetria de la paràbola té equació

$$(2, -1) \cdot (4x - 2y + 16, -2x + y + 17) = 0,$$

és a dir, $10x - 5y + 15 = 0$, o bé $2x - y + 3 = 0$. El vèrtex de la paràbola és el punt d'intersecció entre aquesta i l'eix de simetria. Per tant, hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 11 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Substituint $y = 2x + 3$ a la primera equació tenim

$$4x^2 - 4x(2x + 3) + (2x + 3)^2 + 32x + 34(2x + 3) - 11 = 0$$

$$4x^2 - 8x^2 - 12x + 4x^2 + 12x + 9 + 32x + 68x + 102 - 11 = 0 \quad 100x + 100 = 0$$

El vèrtex de la paràbola és el punt $(-1, 1)$. L'eix de les y' és l'eix de simetria de la paràbola, és a dir, $2x - y + 3 = 0$, mentre que l'eix de les x' és la recta que passa pel vèrtex i té vector director $(2, -1)$, és a dir, $x + 2y - 1 = 0$.

Les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

El focus de la paràbola és el punt de coordenades $(0, -5\sqrt{5})$ en la referència $\mathcal{R}'$ i la recta directriu té equació $y' = 5\sqrt{5}$. Desfent el canvi de coordenades s'obté que el focus de la paràbola és el punt $(-6, -9)$ i la recta directriu té equació $x + 2y = 26$.

La representació gràfica d'aquesta paràbola es pot veure a la figura 8.7.

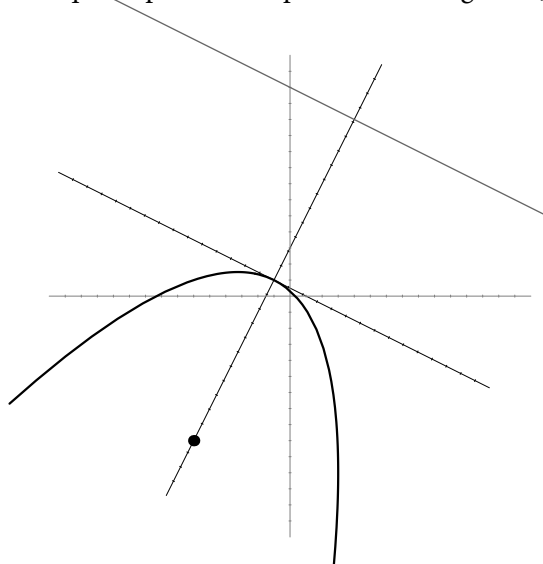


Figura 8.7: Paràbola d'equació $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 11 = 0$

8. Estudieu la cònica d'equació $3x^2 - 4xy - 8x + 8y = 0$, calculeu tots els seus elements geomètrics, l'equació canònica i representeu-la gràficament.

Solució

Resolem el sistema d'equacions $QX + L = 0$ per saber si aquesta cònica té centre.

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y - 4 = 0 \\ -2x + 4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Evidentment, la solució d'aquest sistema d'equacions és $x = 2$, $y = 1$, és a dir, el centre de la cònica és el punt $(2, 1)$.

Polinomi característic, valors i vectors propis de Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-3)x - 4 = x^2 - 3x - 4.$$

Les arrels del polinomi característic són

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}.$$

Per tant, els valors propis de la matriu Q són 4 i -1 .

Tenint en compte que

$$F(2, 1) = 3(2)^2 - 4(2)(1) - 8(2) + 8(1) = -4,$$

resulta que l'equació reduïda de la cònica és $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$ i l'equació canònica

$$x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

La cònica és una hipèrbola. El seu semieix real és $Q = 1$, el semieix imaginari és $b = 2$ i la distància focal és $2\sqrt{5}$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$).

Els vectors propis de la matriu Q són els nuclis dels endomorfismes $Q - 4I$ i $Q + I$, respectivament:

$$Q - 4I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = -2y \implies \text{Nuc}(Q - 4I) = \langle (2, -1) \rangle,$$

$$Q + I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies y = 2x \implies \text{Nuc}(Q + I) = \langle (1, 2) \rangle.$$

L'eix de les x' és la recta que passa pel centre i té vector director $(2, -1)$, és a dir, $x + 2y - 4 = 0$, mentre que l'eix de les y' és la recta que passa pel centre i té vector director $(1, 2)$, és a dir, $2x - y - 3 = 0$.

Les equacions del canvi de coordenades són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Els focus de la hipèrbola són els punts de coordenades $(\pm\sqrt{5}, 0)$ en la referència principal $\mathcal{R}'$ de la cònica, mentre que els vèrtex són els punts de coordenades $(\pm 1, 0)$ (són els valors de la x' quan $y' = 0$) en aquesta mateixa referència.

Substituint a les equacions del canvi de coordenades, obtenim que els focus tenen coordenades $(4, 0)$ i $(0, 2)$ i que els dos vèrtexs de la hipèrbola són $(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$ i $(2 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Finalment, les components dels vectors directors de les asímptotes de la hipèrbola en la referència principal són $(a, \pm b)$ on a i b són els semieixos real i imaginari. En el nostre cas $(1, \pm 2)$. Per calcular les seves components en la base canònica, hem de fer el canvi de base (no el canvi de coordenades)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Per tant, els vectors directors de les asímptotes de la hipèrbola són $(4, 3)$ i $(0, 1)$. Les asímptotes són les rectes que passen pel centre de la hipèrbola i tenen aquests vectors directors; en conseqüència, les seves equacions són $3x - 4y - 2 = 0$ i $x = 2$.

La representació gràfica d'aquesta hipèrbola es pot veure a la figura 8.8.

9. *Comproveu que la cònica d'equació $x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 14y + 15 = 0$ és un parell de rectes secants i calculeu les seves equacions.*

Solució

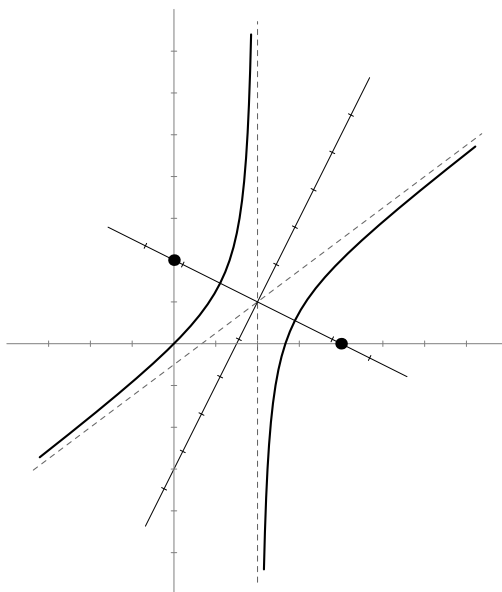
Calculem en primer lloc el centre d'aquesta cònica.

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}.$$

La solució d'aquest sistema d'equacions és $x = 2$, $y = 1$. Per tant, el centre de la cònica és el punt $(2, 1)$.

Polinomi característic, valors i vectors propis de Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3) - 4 = x^2 - 4x - 1.$$

Figura 8.8: Hipèrbola d'equació $3x^2 - 4xy - 8x + 8y = 0$

Les arrels del polinomi característic són

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 2 + \sqrt{5} \\ 2 - \sqrt{5} \end{cases}.$$

Per tant, els valors propis de la matriu Q són $2 + \sqrt{5}$ i $2 - \sqrt{5}$.

Tenint en compte que

$$F(2, 1) = (2)^2 + 4(2)(1) + 3(1)^2 - 8(2) - 14(1) + 15 = 0$$

i que un valor propi de la matriu Q és positiu i l'altra negatiu, resulta que la cònica és una parell de rectes secants.

Per calcular les seves equacions, expressem l'equació de la cònica com a producte de dues equacions de primer grau

$$x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 14y + 15 = (Ax + By + C)(ax + by + c).$$

Igualant coeficient a coeficient obtenim que

$$\left. \begin{array}{l} Aa = 1 \\ Ab + Ba = 4 \\ Bb = 3 \\ Ac + Ca = -8 \\ Bc + Cb = -14 \\ Cc = 15 \end{array} \right\} .$$

Si escollim $A = 1$ i $a = 1$, de la segona i tercera equacions tenim que

$$\left. \begin{array}{l} b + B = 4 \\ Bb = 3 \end{array} \right\}$$

i en substituir $B = 4 - b$ a la segona equació, ens queda l'equació de segon grau $-b^2 + 4b - 3 = 0$, que té solucions $b = 3$ i $b = 1$.

Si escollim $b = 3$, de la tercera equació tenim que $B = 1$ i la quarta i cinquena equacions ens queden

$$\left. \begin{array}{l} c + C = -8 \\ c + 3C = -14 \end{array} \right\} .$$

Aquest sistema té solució $c = -5$ i $C = -3$. Per tant, les equacions de les dues rectes són $x + y - 3 = 0$ i $x + 3y - 5 = 0$.

Observació: Si haguéssim escollit $b = 3$, haguéssim obtingut la mateixa solució.

Una **altra manera** de calcular les equacions de les dues rectes és tractar l'equació de la cònica com una equació de segon grau amb incògnita y . Agrupem el termes de la cònica, la seva equació es pot escriure

$$3y^2 + (4x - 14)y + x^2 - 8x + 15 = 0 .$$

Resolent aquesta equació de segon grau, obtenim

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-4x + 14 \pm \sqrt{(-4x + 14)^2 - 4(3)(x^2 - 8x + 15)}}{6} \\
 &= \frac{-4x + 14 \pm \sqrt{16x^2 - 112x + 196 - 12x^2 + 96x - 180}}{6} \\
 &= \frac{-4x + 14 \pm \sqrt{4x^2 - 16x + 16}}{6} \\
 &= \frac{-4x + 14 \pm \sqrt{(2x - 4)^2}}{6} \\
 &= \frac{-4x + 14 \pm (2x - 4)}{6} \\
 &= \begin{cases} \frac{-2x + 10}{6} \\ \frac{-6x + 18}{6} \end{cases} = \begin{cases} \frac{-x + 5}{3} \\ -x + 3 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Per tant, les equacions de les dues rectes són $x + 3y - 5 = 0$ i $x + y - 3 = 0$

8.2 Quàdriques

10. Estudieu la quàdrica d'equació $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz + 6y - 24z + 24 = 0$.

Solució

Per a aquesta quàdrica tenim que

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Calculem, en primer lloc, el centre d'aquesta quàdrica, resolent el sistema d'equacions $QX + L = 0$.

$$\begin{cases} 6x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + 3 = 0 \\ -2x + 7z - 12 = 0 \end{cases}.$$

Aquest sistema és compatible determinat i el centre de la quàdrica és el punt $(1, -1, 2)$.

Valors i vectors propis:

És immediat que el polinomi característic de la matriu Q és $p(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162$ i podem calcular una de les seves arrels mitjançant la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -18 & 99 & -162 \\ 3 & & 3 & -45 & 162 \\ \hline & 1 & -15 & 54 & 0 \end{array}$$

Les altres arrels s'obtenen a partir de l'equació $x^2 - 15x + 54 = 0$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{15 \pm 3}{2} = \begin{cases} 9 \\ 6 \end{cases}.$$

Els valors propis de la matriu Q són 3, 6 i 9. D'altra banda, tenim que $F(1, -1, 2) = -3$, per tant, l'equació reduïda de la quàdrica és $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 3 = 0$ i es tracta d'un el·lipsoide. A la figura 8.9 es pot veure la seva representació gràfica.

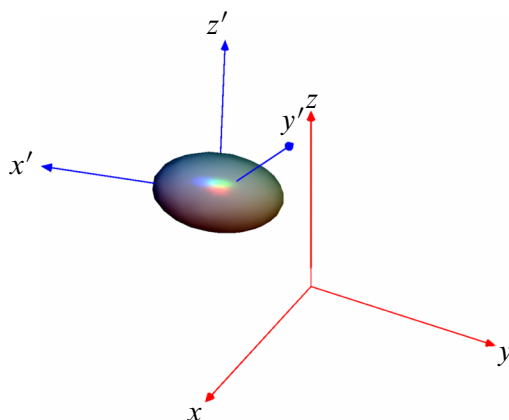


Figura 8.9: El·lipsoide

Els vectors propis de Q són els nuclis de les matrius $Q - 3I$, $Q - 6I$ i $Q - 9I$:

$$Q - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2z \\ y = -2z \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 3I) = \langle (2, -2, 1) \rangle.$$

$$Q - 6I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ z = 2x \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 6I) = \langle (1, 2, 2) \rangle.$$

$$Q - 9I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ z = -2y \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 9I) = \langle (-2, -1, 2) \rangle.$$

Hem escollit el vector $(-2, -1, 2)$ en lloc del vector $(2, 1, -2)$ per tal que la nova referència tingui orientació positiva.

La referència principal de l'elipsoide és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, -1, 2); \frac{1}{3}(2, -2, 1), \frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{3}(-2, -1, 2) \right\}$$

i les equacions del canvi de coordenades que transformen l'equació inicial de la quàdrica en la seva equació reduïda són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

11. Estudieu la quàdrica d'equació $x^2 - y^2 + 4xz - 4yz - 6x + 6y - 3 = 0$.

Solució

Comproven en primer lloc si aquesta quàdrica té centre o no, resolent el sistema d'equacions $QX + L = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z - 3 = 0 \\ -y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{array} \right\}.$$

Aquest sistema és compatible indeterminat i la seva solució és

$$\left. \begin{array}{l} x = -2z + 3 \\ y = -2z + 3 \end{array} \right\},$$

és a dir, tots els punts d'aquesta recta són centres de simetria de la quàdrica.

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 9x.$$

Les arrels d'aquest polinomi i, per tant, els valors propis de la matriu Q són 3, -3 i 9. L'equació reduïda de la quàdrica és $3x'^2 - 3y'^2 + t' = 0$ i per obtenir t' hem de substituir qualsevol dels centres de la quàdrica a la seva equació inicial. Si escollim el centre $(3, 3, 0)$, tindrem que

$$t' = F(3, 3, 0) = (3)^2 - (3)^2 + 4(3)(0) - 4(3)(0) - 6(3) + 6(3) - 3 = -3,$$

l'equació reduïda de la quàdrica és $3x'^2 - 3y'^2 - 3 = 0$ i la quàdrica és un cilindre hiperbòlic.

Vectors propis de Q :

$$Q - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = z \\ y = -\frac{z}{2} \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 3I) = \langle (2, -1, 2) \rangle.$$

$$Q + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{z}{2} \\ y = z \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q + 3I) = \langle (-1, 2, 2) \rangle.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2z \\ y = -2z \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q) = \langle (-2, -2, 1) \rangle.$$

Com a origen de coordenades de la referència principal del cilindre hiperbòlic escollim el punt $(3, 3, 0)$ (qualsevol dels centres), de manera que aquesta referència és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (3, 3, 0); \frac{1}{3}(2, -1, 2), \frac{1}{3}(-1, 2, 2), \frac{1}{3}(2, 2, -1) \right\}.$$

La seva representació gràfica es pot veure a la figura 8.10. Les equacions del canvi de coordenades

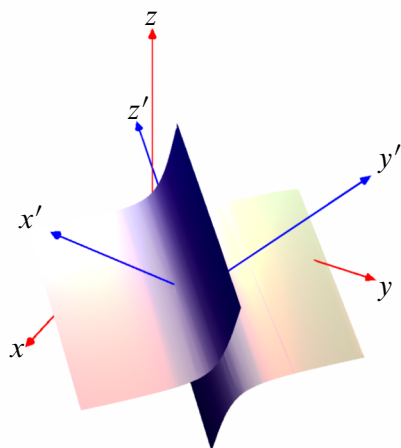


Figura 8.10: Cilindre hiperbòlic

que transformen l'equació inicial de la quàdrica en la seva equació reduïda són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Observem que l'eix de les z' coincideix amb la recta de centres del cilindre hiperbòlic.

12. Estudieu la quàdrica d'equació $9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 12xy - 12xz - 2x + 24y + 14z - 5 = 0$.

Solució

Per saber si la quàdrica té centres, resollem el sistema d'equacions $QX + L = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 9x - 6y - 6z - 1 &= 0 \\ -6x + 2y + 12 &= 0 \\ -6x - 4z + 7 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Aquest sistema és incompatible i la quàdrica no té centre. Per saber de quina tipus és, hem de calcular els valors propis de la matriu Q .

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-9 & 6 & 6 \\ 6 & x-2 & 0 \\ 6 & 0 & x+4 \end{vmatrix} = x^3 - 7x^2 - 98x.$$

Evidentment 0 és una arrel d'aquest polinomi, les altres són solució de l'equació $x^2 - 7x - 98 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 392}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{7 \pm 21}{2} = \begin{cases} 14 \\ -7 \end{cases},$$

és a dir, els valors propis són 14, -7 i 0. La quàdrica és un paraboloid hiperbòlic.

Vectors propis de Q :

$$Q - 14I = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & 0 \\ -6 & 0 & -18 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 0 & -24 & 36 \\ 0 & 12 & -18 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 0 & -24 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3z \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 14I) = \langle (6, -3, -2) \rangle.$$

$$Q + 7I = \begin{pmatrix} 16 & -6 & -6 \\ -6 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 16 & -6 & -6 \\ 0 & 54 & -18 \\ 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 16 & -6 & -6 \\ 0 & 54 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ z = 3y \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q + 7I) = \langle (3, 2, 6) \rangle.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -6 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}z \\ y = -2z \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q) = \langle (-2, -6, 3) \rangle.$$

El vèrtex d'aquest paraboloid és l'intersecció de l'eix de les z' amb el mateix paraboloid. De moment, l'únic que sabem de l'eix de les z' és que és la intersecció dels dos plans de simetria del paraboloid. Les equacions d'aquests plans de simetria són

$$U^t(AX + L) = 0,$$

on U són els vectors (columna) propis amb valors propi no nul.

El primer pla de simetria (el que conté els eixos y' i z') té equació

$$\begin{aligned} (6, -3, -2) \cdot (9x - 6y - 6z - 1, -6x + 2y + 12, -6x - 4z + 7) \\ 6x - 3y - 2z - 4 = 0, \end{aligned}$$

mentre que l'altre pla de simetria (el que conté els eixos x' i z') té equació

$$(3, 2, 6) \cdot (9x - 6y - 6z - 1, -6x + 2y + 12, -6x - 4z + 7) \\ 3x + 2y + 6z - 9 = 0.$$

Com que la solució del sistema format per aquestes dues equacions és

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{5-2z}{3} \\ y = 2-2z \end{array} \right\},$$

resulta que l'eix de les z' té vector director $(-2, -6, 3)$ (ja ho sabíem, ja que el vector propi amb valor propi nul de la matriu Q té aquesta direcció) i passa pel punt $(-1, -6, 4)$. La seva equació paramètrica és

$$(x, y, z) = (-1, -6, 4) + \alpha(-2, -6, 3).$$

El vèrtex del paraboloide és la intersecció d'aquest eix amb el paraboloide, per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 12xy - 12xz - 2x + 24y + 14z - 5 = 0 \\ (x, y, z) = (-1, -6, 4) + \alpha(-2, -6, 3) \end{array} \right\}.$$

Substituint x , y i z a la primera equació tenim

$$\begin{aligned} 9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2x(6y + 6z - 2) + 24y + 14z - 5 &= 0, \\ 9(-1 - 2\alpha)^2 + 2(-6 - 6\alpha)^2 - 4(4 + 3\alpha)^2 \\ -2(-1 - 2\alpha)[6(-6 - 6\alpha) + 6(4 + 3\alpha) - 2] + 24(-6 - 6\alpha) + 14(4 + 3\alpha) - 5 &= 0, \\ -98\alpha - 98 = 0 &\implies \alpha = -1. \end{aligned}$$

Per tant, el vèrtex del paraboloide és el punt $(1, 0, 1)$.

Aleshores, la referència principal del paraboloide és

$$\mathcal{R}' = \{(1, 0, 1); \frac{1}{7}(6, -3, -2), \frac{1}{7}(3, 2, 6), \frac{1}{7}(-2, -6, 3)\}.$$

Anàlogament al cas de la paràbola, l'equació reduïda del paraboloide hiperbòlic és $14x'^2 - 7y'^2 + 2\ell'z' = 0$, on $\ell' = \vec{e}'_3 \cdot (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ i $\vec{e}'_3$ és el vector propi unitari amb valor propi nul que apareix com a tercer vector de la referència principal.

$$\ell' = \frac{1}{7}(-2, -6, 3) \cdot (-1, 12, 7) = -7.$$

Per tant l'equació reduïda del paraboloid hiperbòlic es

$$14x'^2 - 7y'^2 - 14z' = 0 \quad \text{o bé} \quad 2x'^2 - y'^2 - 2z' = 0.$$

Finalment, les equacions del canvi de coordenades que transformen l'equació inicial de la quàdrica en la seva equació reduïda són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

La seva representació gràfica es pot veure a la figura 8.11.

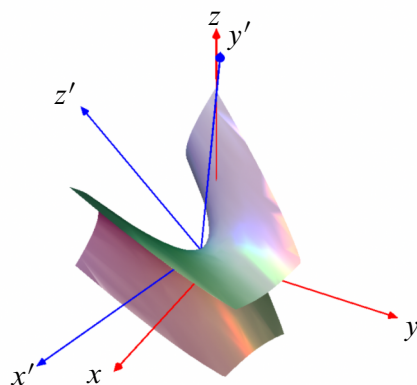


Figura 8.11: Paraboloid hiperbòlic

13. Estudieu la quàdrica d'equació $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 48x - 24y + 84 = 0$.

Solució

Com que el sistema d'equacions $QX + L = 0$, és a dir,

$$\left. \begin{aligned} x + y + 2z - 24 &= 0 \\ x + y + 2z - 12 &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

és incompatible, la quàdrica no té centre.

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -2 \\ -2 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2.$$

Els valors propis de Q són 6 i 0 amb multiplicitat 2. Per tant, la quàdrica és un cilindre parabòlic. A continuació, calculem els vectors propis de la matriu Q :

$$Q - 6I = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ z = 2y \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q - 6I) = \langle (1, 1, 2) \rangle.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = -y - 2z \implies \text{Nuc}(Q) = \langle (-1, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle.$$

El pla d'equació $U^t(AX + L) = 0$, on U és un vector (columna) propi amb valor propi no nul és l'únic pla de simetria del cilindre parabòlic. La seva equació és

$$\begin{aligned} (1, 1, 2) \cdot (x + y + 2z - 24, x + y + 2z - 12, 2x + 2y + 4z) &= 0 \\ x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

El vèrtex del cilindre parabòlic, que serà l'eix de les y' de la referència principal és la intersecció d'aquest pla amb el mateix cilindre, per tant, hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 48x - 24y + 84 = 0 \\ x + y + 2z = 6 \end{array} \right\}.$$

Substituint $x = 6 - y - 2z$ a la primera equació tenim

$$\begin{aligned} (6 - y - 2z)^2 + y^2 + 4z^2 + 2(6 - y - 2z)y \\ + 4(6 - y - 2z)z + 4yz - 48(6 - y - 2z) - 24y + 84 &= 0, \\ 24y + 96z - 168 &= 0. \end{aligned}$$

Per tant, l'eix de les y' és la recta

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 6 \\ y + 4z = 7 \end{array} \right\}.$$

El vector director d'aquesta recta és $(2, -4, 1)$, i com a nou origen de coordenades, podem prendre qualsevol punt d'aquesta recta, per exemple el punt $(1, 3, 1)$.

L'eix de les x' és la recta que passa pel punt $(1, 3, 1)$ i té vector director $(1, 1, 2)$ i l'eix de les z' és la recta que passa pel punt $(1, 3, 1)$ i el seu vector director ha de ser perpendicular als vectors directores dels eixos de les x' i de les y' :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (9, 3, -6) \sim (3, 1, -2).$$

Per tant, la referència principal del cilindre parabòlic és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, 3, 1); \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2), \frac{1}{\sqrt{21}}(2, -4, 1), \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2) \right\}.$$

Finalment, l'equació reduïda del cilindre parabòlic és $6x'^2 + 2\ell'z' = 0$, on $\ell' = \vec{e}'_3 \cdot (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ i $\vec{e}'_3$ és el tercer vector de la referència principal:

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2) \cdot (-24, -12, 0) = -\frac{84}{\sqrt{14}} = -6\sqrt{14}.$$

Per tant, l'equació reduïda del cilindre parabòlic és

$$6x'^2 - 12\sqrt{14}z' = 0 \quad \text{o bé} \quad x'^2 - 2\sqrt{14}z' = 0$$

i les equacions del canvi de coordenades que transformen l'equació inicial de la quàdrica en la seva equació reduïda són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

La seva representació gràfica es pot veure a la figura 8.12.

14. Estudieu la quàdrica d'equació $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 4yz - 4xz + 2x - 2y + 4z - 6 = 0$.

Solució

Com que el sistema d'equacions $QX + L = 0$, és a dir,

$$\begin{cases} 4x + y - 2z + 1 = 0 \\ x + 4y + 2z - 1 = 0 \\ -2x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

és compatible determinat i la seva solució és $x = 1, y = -1, z = 2$, el centre de la quàdrica és el punt $(1, -1, 2)$.

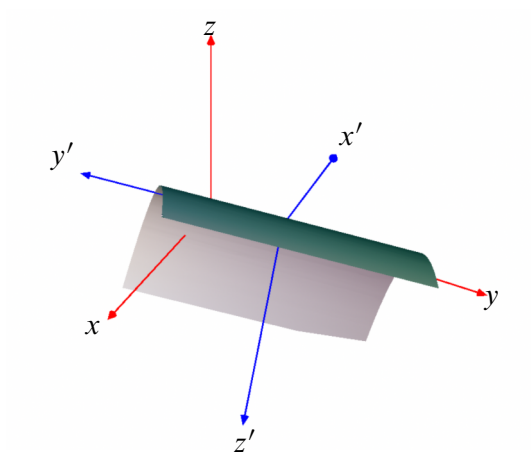


Figura 8.12: Cilindre parabòlic

Polinomi característic de la matriu Q :

$$p(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 2 \\ -1 & x-4 & -2 \\ 2 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 + 15x + 25.$$

Calculem la primera de les arrels d'aquest polinomi mitjançant la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 15 & 25 \\ -1 & & -1 & 10 & -25 \\ \hline & 1 & -10 & 25 & 0 \end{array}$$

Les altres s'obtenen a partir de l'equació $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = \begin{cases} 5 \\ 5 \end{cases},$$

és a dir, els valors propis de Q són 5 amb multiplicitat 2 i -1.

D'altra banda, tenim que $F(1, -1, 2) = 0$, per tant, l'equació reduïda de la quàdrica és $5x'^2 + 5y'^2 - z'^2 = 0$ i es tracta d'un con real.

Els vectors propis de la matriu Q són:

$$Q - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y - 2z \implies \text{Nuc}(Q - 5I) = \langle (1, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle.$$

Aquests dos vectors no són perpendiculars. Com que necessitem una base ortogonal d'aquest subespai de vectors propis, apliquem el mètode de Gram-Schmidt:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (-2, 0, 1) - \frac{(-2, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)}{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0)} (1, 1, 0) = (-2, 0, 1) + \frac{2}{2} (1, 1, 0) = (-1, 1, 1),$$

és a dir, $\text{Nuc}(Q - 5I) = \langle (1, 1, 0), (-1, 1, 1) \rangle$.

$$Q - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 24 & 12 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -y \\ z = -2y \end{array} \right\} \implies \text{Nuc}(Q + I) = \langle (-1, 1, -2) \rangle.$$

Per tant, la referència principal del con és

$$\mathcal{R}' = \left\{ (1, -1, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -2) \right\}.$$

La representació gràfica del con real es pot veure a la figura 8.13.

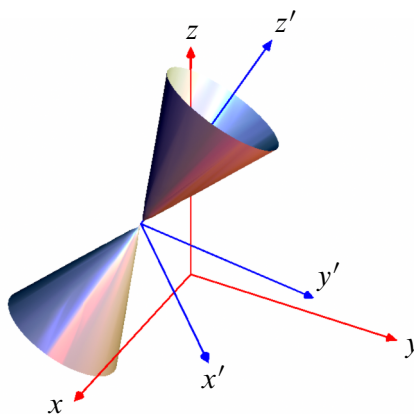


Figura 8.13: Con

Les equacions del canvi de coordenades que transformen l'equació inicial de la quàdrica en la seva equació reduïda són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

