Exercicis complementaris d'equacions diferencials lineals

2a part de l'assignatura d'Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials (ALED-ETSETB).

Rafael Cubarsi, DMA4-UPC
Barcelona, novembre de 2011

1 Equacions diferencials lineals

1. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de

$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$

troba'n un sistema fonamental de solucions.

2. Troba la solució general de l'equació $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.

3. Mitjançant el canvi $z = (\ln |y|)'$, calcula en quina equació es transforma l'equació diferencial $y'' + ay' + by = 0$, on $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Troba en quina equació es tranforma l'equació

$$y'' - f(x)y = 0$$

mitjançant el canvi $z = y'/y$.

5. Donada l'equació $y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$, amb $f(t) + g(t) + 1 = 0$, troba'n una solució

6. Calcula en quina equació es transforma $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = xe^x$, amb el canvi $y = xv$.

7. Calcula l'ordre mínim de l'equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants que admet com a solució particular la funció $12t^2 + 9t^3 \sin(t) - te^{13t}$.

8. Siguin $f_1, f_2 : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ 0 \text{ altrament} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1, 0] \\ x^3 \text{ altrament} \end{cases}$$

Considerem l'equació $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, amb $a(x), b(x)$ funcions contínues. Raona si $\{f_1, f_2\}$ pot ser-ne sistema fonamental de solucions.

9. Si fem el canvi de variable $s = \tan t$ dins l'equació $y'' - 2 \tan t\, y' + (1 + \tan^2 t)^2 y = 0$, quina equació diferencial obtenim en la nova variable s?

10. Troba la solució general de l'equació diferencial

$$y'' + y = \cos t + t$$

11. Calcula quina és l'equació lineal homogènia amb coeficients constants de menor ordre que admet com a solució $x \sin x$.

12. Considera l'equació lineal homogènia

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$

Sabent que la funció $y_1(t) = t$ n'és solució troba la solució que verifica que $y(1) = 0$ i $y'(1) = -1$

13. Sabent que

$$ty'' - y' + \frac{3}{4t}y = 0$$

admet solucions de la forma t^k, $k \in \mathbb{R}$, troba la solució general de l'equació

14. Si te^{2t} i e^{-t} són solucions de l'equació diferencial amb coeficientes constants $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, quantt val a_0?

RESPOSTES

1. $\{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$.
2. $y = C_1 \exp 2t + C_2 \exp(-t) + C_3 \exp(-3t)$.
3. $z' + z^2 + az + b = 0$.
4. $z' + z^2 = f(x)$.
5. $y(t) = e^t$ és solució.
6. $v'' + v = e^x$.
7. 13.
8. $\{f_1, f_2\}$ no pot ser sistema fonamental de solucions perquè $W(f_1(x), f_2(x))$=0, per a tot $x \in [-1, 1]$.
9. $y'' + y = 0$.
10. $\{y \mid y(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}t \sin t + a \sin t + b \cos t,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
11. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.
12. $y(t) = t - t^2$.
13. $y(t) = at^{\frac{1}{2}} + bt^{\frac{3}{2}}$.
14. $a_0 = 4$.

2 Sistemes d'equacions diferencials

1. Suposeu que

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

   és una solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Troba la matriu A.

2. Es considera el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$,
   amb $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcula e^{At}.

3. Sigui $\vec{x}(t)$ la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, 0)$. Calcula el vector $\vec{x}(1)$.

4. Quina és la matriu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associada al sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ que té per solucions $\vec{x}_1(t) = \vec{v}\cos t$ i $\vec{x}_2(t) = \vec{w}\sin t$, amb $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents?

5. Si $e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

   és solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, troba dues solucions linealment independents més.

6. El sistema $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ te per matriu fonamental de solucions, en un cert interval,

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

   Troba la matriu $A(t)$.

7. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula e^A.

8. Sabent que $\vec{x}(t) = e^t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ és solució de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, calcula A.

9. Sabent que

$$\vec{x}(t) = \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}, 2t + \frac{t^2}{2}, t + \frac{t^2}{2}\right) e^t$$

   és solució d'un sistema lineal homogeni a coeficients constants, troba un sistema fonamental de solucions.

10. Sigui A una matriu $n \times n$, constant. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = \dfrac{1}{t}A\vec{x}$. Aplicant el canvi $t = e^s$, en quin sistema es transforma?

11. Quant val la solució del PVI $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, -3)$, en $t = 1$?

12. Per a quins valors de α i β resulta que $V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\cos t + \beta\sin t & \sin t \\ 0 & \beta\cos t - \alpha\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental d'un sistema a coeficients constants?

13. Troba la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. Sigui $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ una solució del sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Calcula A, sabent que és constant.

15. Sigui el sistema lineal amb coeficients constants $\vec{x}' = A\vec{x}$. Qué ha de satisfer M perquè $e^{At}M$ sigui una matriu fonamental?

16. Sigui la solució $x(t)$ del problema de valor inicial
$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Calcula $\vec{x}(\pi)$.

17. Sigui $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Suposeu que $e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Troba la matriu e^{tA}.

18. Calcula la solució del problema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

RESPOSTES

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 1 - e^{-t} & 2 + t - e^{-t} & -2 - t + 2e^{-t} \\ 1 - e^{-t} & 1 + t - e^{-t} & -1 - t + 2e^{-t} \end{pmatrix}$.
3. $\vec{x}(1) = (1 - e^{-2}, 1 + e^{-2})$.
4. No existeix.
5. $e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.
6. $A(t) = \dfrac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 - t^2 & t^2 \\ 1 - t^2 & t^2 \end{pmatrix}$.
7. $e^A = \begin{pmatrix} e\cos(3) & -e\sin(3) \\ e\sin(3) & e\cos(3) \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
9. (e^t, e^t, e^t).
10. Amb el canvi $t = e^s$ es transforma en $\dot{\vec{x}}(s) = A\vec{x}(s)$.
11. $(e^2 + e^7, -4e^2 + e^7)$.
12. $\alpha \neq 0$.
13. $x(t) = (e^t + 2te^t + e^{2t}, e^{2t}, e^t)$.
14. $\begin{pmatrix} 19/4 & -37/20 & 1/5 \\ 17/4 & -23/20 & -1/5 \\ -1 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.
15. $e^{At}M$ és una matriu fonamental si i només si M és invertible.
16. $\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix}$.
17. $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.
18. $x(t) = (e^t + 2te^t, e^t)$.

3 Transformada de Laplace

1. Calcula per a quin valor de a la solució del problema

$$y' + y = a\delta(t-1),\ y(0) = 1$$

verifica $y(0) = y(1)$.

2. Quina és la solució del problema de valor inicial $y'' + y = u(t-1)$, $y(0) = 0 = y'(0)$, on $u(t)$ és la funció de Heaviside?

3. Troba la transformada de Laplace de la solució de l'equació $y' - \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau = u(t) + \delta(t-1)$, que satisfá $y(0) = 1$.

4. Quina és la funció que té per transformada de Laplace $e^{-s}\dfrac{1}{s^2} + e^{-2s}\dfrac{1}{s^2+4}$?

5. Calcula el valor de $\int_0^a \sin(\frac{a-x}{2})\cos(\frac{x}{2})dx$.

6. Usant la transformada de Laplace, calculeu la integral $\int_0^\infty e^{-\pi t} t \cos \pi t dt$.

7. Calcula la transformada de Laplace de la funció $u(t-a)\int_0^{t-a} f(\tau)d\tau$.

8. Quina és la transformada de Laplace de $te^{at}f(at)$?

9. Calcula l'antitransformada de Laplace de la funció

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

10. Calcula la solució del problema de valor inicial

$$y'' - y = 2\delta(t-1)\,,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

.

11. Considerem la funció $y(t)$, amb transformada $Y(s)$, tal que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n),\ y(0) = 1$$

digues si són certes les igualtats:

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n) * 1$

quant val $Y(s)$?

12. Prova que $L(e^{t-1}u(t-1))(s) = e^{-s}/(s-1)$?

13. Sigui $f_k(t) = e^{\alpha t} * \overset{(k)}{\cdots} * e^{\alpha t}$. Troba el valor de $f_k(t)$.

14. Si $f_n(t) = t^n$, n natural, quant val $(f_n * f_m)(t)$?

15. Si $f(t)$ és solució del problema $f'' - f = t\cos(t)$ amb condicions inicials $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, troba $F(s)$.

16. Donat $N \in \mathbb{N}$, calcula la solució $y(t)$ del problema

    $y'' + \pi^2 y = \pi \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \delta(t-n)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

RESPOSTES

1. $1 - e^{-1}$.
2. $y(t) = u(t-1)(1 - \cos(t-1))$.
3. $\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1} e^{-s}$.
4. $u(t-1)(t-1) + \dfrac{1}{2} u(t-2)\sin(2(t-2))$.
5. $\frac{a}{2}\sin(\frac{a}{2})$.
6. 0.
7. $\frac{e^{-as}}{s} F(s)$.
8. $-\frac{1}{a^2} F'(\frac{s-a}{a})$.
9. $f(t) = \displaystyle\sum_{k\geq 0} u(t-kT)$.
10. $y(t) = 2u(t-1)\sinh(t-1)$.
11. Les igualtats són certes. $Y(s) = \frac{1}{s}\frac{e^s}{e^s-1}$.
12.
13. $f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\alpha t}$.
14. $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} t^{n+m+1}$.
15. $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.
16. $y(t) = \sum_{n=0}^{N} \sin(\pi t) u(t-n)$.