

Equacions diferencials lineals

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

<http://www-ma4.upc.edu/~rcubarsi>



Departament de **Matemàtica Aplicada IV**

Copyright ©2010 by Rafael Cubarsi (rcubarsi@mat.upc.edu), DL B-16322-2011.



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 3.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

o envieu una carta a:

Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA

Índex

1	Equacions diferencials de primer ordre	5
1.1	Introducció	5
1.1.1	Interpretació geomètrica	6
1.2	Condicions d'integrabilitat	6
1.3	Equacions integrables elementalment	8
1.4	Equació lineal	10
1.4.1	Equació homogènia	10
1.4.2	Equació completa: mètode de variació de les constants	11
2	Equacions diferencials lineals d'ordre superior	12
2.1	Equacions de segon ordre	12
2.1.1	Solució de l'equació homogènia	13
2.2	Wronskià	14
2.3	Equacions homogènies	15
2.4	Equacions homogènies a coeficients constants	17
2.5	Equacions d'ordre superior	19
2.6	Equacions lineals no homogènies	20
2.6.1	Mètode de variació de les constants	21
2.6.2	Equació d'ordre n	23
2.6.3	Mètode dels coeficients indeterminats	24
2.6.4	Principi de superposició	26
3	Sistemes d'equacions diferencials lineals	28
3.1	Introducció	28
3.1.1	Propietats generals	28
3.2	Relació entre un sistema i una equació	29
3.3	Sistemes homogenis	30
3.3.1	Dependència i independència lineal de funcions	30
3.3.2	Matriu fonamental de solucions	31
3.4	Matriu exponencial	33
3.5	Sistema homogeni a coeficients constants	34
3.5.1	Solució del sistema	35
3.5.2	Arrels reals simples	35
3.5.3	Arrels complexes simples	36
3.5.4	Arrels múltiples	36
3.6	Sistemes no homogenis	38

Capítol 1

Equacions diferencials de primer ordre

1.1 Introducció

Definició 1 Una equació diferencial ordinària és una relació entre una funció d'una variable, $y(t)$ (que anomenarem variable dependent), la variable independent t , i una o vàries derivades successives de la funció,

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Suposarem que totes les variables són reals.

Si F no depèn de t direm que l'equació diferencial és autònoma. Quan hi ha vàries variables independents, $t_1, \dots, t_n$, les equacions s'anomenen equacions en derivades parcials. Llavors, la funció $y(t_1, \dots, t_n)$ es pot derivar respecte de cada una de les variables. Per exemple $\frac{\partial y}{\partial t_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t_i \partial t_j}$, etc. Les equacions en derivades parcials s'estudien en cursos posteriors. Vegem alguns exemples:

Exemple 1 Un cas el proporciona la segona llei de Newton pel moviment d'un cos de massa m , sota l'acció d'una força F . Si aquesta força depèn de l'instant t considerat, de la posició $y(t)$ i de la velocitat $\frac{dy(t)}{dt}$ del cos en aquest instant, es compleix

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt})$$

Exemple 2 L'estudi de circuits elèctrics és un altre exemple d'equacions diferencials. Per exemple, el corrent $I(t)$ d'un circuit, pel que la tensió $V(t)$ aplicada en cada instant t es reparteix entre la caiguda de tensió $RI(t)$ d'una resistència i la caiguda de tensió $L \frac{dI(t)}{dt}$ d'una autoinducció, posades en sèrie, satisfà l'equació diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V$$

Exemple 3 Un altre cas són les equacions que caracteritzen a una família de corbes del pla. Així, si considerem la família de paràboles $y = Ct^2$, derivant obtenim $y' = 2Ct$. Eliminant el paràmetre C amb les dues equacions, obtenim la equació diferencial

$$y' = 2 \frac{y}{t}$$

que expressa una propietat comú a totes les corbes de la família: el pendent de la tangent en un punt qualsevol és el doble del pendent de la recta que uneix el punt amb l'origen.

En general, si $g(t, y, C) = 0$ representa una família de corbes, eliminant C entre les equacions $g(t, y, C) = 0$ i $\frac{d}{dt}g(t, y(t), C) = 0$, obtindrem l'equació diferencial $F(t, y, y') = 0$ de la família de corbes. És a dir, canviariem la informació que proporciona C , per la que proporciona y' .

Definició 2 Anomenem ordre d'una equació diferencial al major ordre de la derivada que intervé en l'equació.

Per tant l'exemple 1 és d'una equació de segon ordre, mentre que els exemples 2 i 3 són d'equacions de primer ordre.

De moment, considerarem únicament equacions de primer ordre, que escriurem en la forma estàndard

$$y' = f(t, y) \quad (1.1)$$

En un interval I , una solució d'aquesta equació és una funció $y = \phi(t)$ derivable que satisfà

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall t \in I \quad (1.2)$$

1.1.1 Interpretació geomètrica

Podem interpretar una equació diferencial $y' = f(x, y)$ com una equació que a cada punt (x, y) en el que f està definida li associa una direcció de pendent $f(x, y)$.

El gràfic d'una solució $y = \phi(x)$ s'anomena *corba integral*, i els valors $f(x, y)$ s'anomenen *camp de velocitats o direccions*.

D'una equació $y' = f(x, y)$ n'obtenim una família uniparamètrica de solucions, $y = \phi(x, C)$, que rep el nom d'*integral general* o *solució general* de l'equació.

També podem estar interessats en determinar una *solució particular* de l'equació diferencial que, per a $x = x_0$, pren un valor donat y_0 . Geomètricament, es diu que es busca la solució que passa pel punt (x_0, y_0) . Aquesta condició determina el valor de C en la solució general, de manera que si $y_0 = \phi(x_0, C_0)$, la solució desitjada és $y = \phi(x, C_0)$.

Exemple 4 La solució general de l'equació $y' = e^x - y$ ve donada per $y = \frac{1}{2}e^x + C e^{-x}$, i la solució particular que satisfà $y(0) = 1$ s'obté quan $1 = \frac{1}{2} + C$, és a dir per a $C = \frac{1}{2}$, resultant $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$.

1.2 Condicions d'integrabilitat

Si coneixem el valor de la variable dependent y en t_0 , i admetem que aquesta variable evoluciona de manera:

- *determinista*, és a dir, que hi ha un lligam entre els valors passats, present i futurs,
- *finita*, és a dir, que en tot moment és quantificable,
- *diferenciable*, és a dir, que les seves variacions són prou suaus,

llavors, per a un valor de t proper a t_0 , podem fer una estimació de $y(t)$ a partir de l'aproximació lineal

$$y(t) - y(t_0) \approx y'(t_0)(t - t_0)$$

Una forma de poder seguir l'evolució de la variable y és disposar de la informació que proporciona l'equació

$$y' = f(t, y(t)) \quad (1.3)$$

Així, sabent el *valor inicial* $y_0 = y(t_0)$, obtindrem els valors de la funció $y(t)$ en el seu entorn,

$$y(t) \approx y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Quan fem aquest procés de manera *elemental*, estem precisament integrant l'equació diferencial Eq. 1.3,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.4)$$

tot calculant les constants d'integració a partir de les condicions inicials.

En resoldre una equació de primer ordre fem un procés que equival a una integració, on hi apareix una constant. En general, per a resoldre una equació d'ordre n calen n integracions, on hi apareixen n constants.

Per a una equació d'ordre n , les condicions inicials han de ser sempre de la forma $a_0 = y(t_0), a_1 = y'(t_0), \dots, a_{n-1} = y^{(n-1)}(t_0)$, totes avaluades en el mateix valor de la variable independent.

Ara bé, l'existència i unicitat de la solució del *problema de valor inicial* (PVI)

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.5)$$

necessita unes condicions mínimes. La més freqüentment utilitzada és la següent:

Teorema 1 (d'existència i unicitat) *Si f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues en un domini Ω , el problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, per a $(t_0, y_0) \in \Omega$, admet una única solució $y(t)$, que està definida en un interval obert $I \subset \Omega$ que conté el punt (t_0, y_0) .*

Un exemple on no es compleixen aquestes condicions suficients és el següent:

Exemple 5 *El problema de valor inicial $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$, no té solució única, doncs al menys $y_1(t) = (t/3)^3$, $y_2(t) \equiv 0$ són solucions del problema.*

També cal notar que les solucions poden tenir un abast limitat:

Exemple 6 *La solució de $y' = y^2$ amb $y(0) = 1$ és $y(t) = 1/(1 - t)$ en $-\infty < t < 1$. Però $y(t)$ no pot ser solució en un interval més gran ja que no està definida per a $t = 1$.*

1.3 Equacions integrables elementalment

Certes funcions, com ara $\sqrt{\cos t}$ i e^{-t^2} , no admeten una primitiva que sigui una funció elemental, és a dir, una combinació de funcions polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials, etc. Per tant, fins i tot en el cas de que $f(t, y)$ sigui una funció únicament de t , no sempre podrem trobar funcions elementals que siguin solucions de l'equació diferencial $y' = f(t, y)$.

En general, es considera que una equació diferencial és integrable elementalment quan és possible expressar la solució mitjançant funcions elementals, o bé primitives d'aquestes, que no tenen per què ser necessàriament funcions elementals.

Definició 3 Direm que una equació diferencial s'expressa en la seva forma diferencial si l'escrivim com

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0 \quad (1.6)$$

Evidentment, la forma estàndard d'aquesta equació s'obté fent $f(t, y) = -M(t, y)/N(t, y)$ en l'Eq. 1.1.

Definició 4 S'anomenen equacions de variables separades les que, en forma diferencial, s'escriuen com

$$M(t)dt + N(y)dy = 0$$

Llavors, la integració és immediata:

$$\int M(t) dt = - \int N(y) dy + C$$

També podem expressar-ho com

$$\int_{t_0}^t M(s) ds = - \int_{y_0}^y N(x) dx$$

Exemple 7 Integrar $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - 1}{y^2}$.

Solució. Ho escrivim com

$$y^2 dy = (t^2 - 1) dt$$

Llavors,

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} - t + C; \quad y = (t^3 - 3t + 3C)^{1/3}$$

✓

Exemple 8 Resoldre $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2} + t$.

Solució. Ho escrivim com

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) t$$

Separant variables obtenim

$$\frac{y^2}{1 + y^2} dy = t dt$$

i com $\frac{y^2}{1+y^2} = 1 - \frac{1}{1+y^2}$, integrant arribem a

$$y - \arctan y = \frac{t^2}{2} + C$$

En aquest cas ja no és possible aïllar y en funció de t .

✓

1.4 Equació lineal

Definició 5 Una equació lineal de primer ordre és la que es pot escriure com

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (1.7)$$

L'operador $L \equiv \frac{d}{dt} + a(t)$, que associa a una funció y la funció

$$L[y(t)] = y'(t) + a(t)y(t) \quad (1.8)$$

és lineal. És fàcil comprovar que si c_1 i c_2 són dues constants arbitràries, es té

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \quad (1.9)$$

Suposarem que $a(t)$ i $f(t)$ són funcions contínues en un cert interval $I \subset \mathbb{R}$. Considerarem que L és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^1(I)$ al $\mathcal{C}(I)$. Per tant, el conjunt de solucions de l'equació

$$L[y] = f(t) \quad (1.10)$$

viindrà donat per $y_p + y_h$, on y_p és una solució particular de l'Eq. 1.10, i y_h és del nucli de l'operador L , $\ker(L)$, és a dir, del conjunt de solucions de

$$L[y] = 0 \quad (1.11)$$

Aquesta darrera equació s'anomena *equació homogènia* associada a l'Eq. 1.10, que es designa, per contrast, com *equació completa*.

Recordem que $\ker(L)$ és un subspai vectorial de l'espai vectorial en el qual està definit l'operador L .

Observem, també, que la diferència de dues solucions particulars y_a i y_b de l'equació completa, Eq. 1.10, verifica $L[y_a - y_b] = f - f = 0$. Per tant $y_a - y_b \in \ker(L)$.

1.4.1 Equació homogènia

Resolem ara l'equació homogènia

$$y'_h + a(t)y_h = 0 \quad (1.12)$$

Si $y_h \neq 0$ podem escriure $y'_h/y_h = -a(t)$ i, integrant,

$$\ln |y_h| = - \int a(t) dt + K; \quad |y_h| = Ce^{-\int a(t) dt}$$

on $C = e^K$ és una constant positiva. Aquesta darrera equació equival a

$$y_h = \pm Ce^{-\int a(t) dt}$$

la qual podem resumir en

$$y_h = Ce^{-\int a(t) dt}, \quad C \neq 0$$

Però, en dividir per y_h , hem perdut la solució $y_h = 0$, que anomenarem solució *trivial*, que sempre és solució de l'equació lineal homogènia. Per tant, la solució general de l'Eq. (1.12) serà

$$y_h = Ce^{-\int a(t) dt} \quad (1.13)$$

per a C qualsevol.

El conjunt de solucions de la part homogènia de l'equació lineal de primer ordre formen un espai vectorial de dimensió 1.

1.4.2 Equació completa: mètode de variació de les constants

Per a integrar l'equació completa n'hi ha prou amb determinar una solució particular. Per això utilitzarem el mètode anomenat *de variació de les constants*, que permet integrar l'equació completa quan es coneix una solució particular de l'equació homogènia, per exemple, fent $C = 1$ en l'Eq. 1.13,

$$\phi(t) = e^{-\int a(t) dt} \quad (1.14)$$

Així, proposem una solució de la forma

$$y_p = K(t)\phi(t) \quad (1.15)$$

essent $K(t)$ una funció a determinar.

Substituint l'Eq. 1.15 a l'Eq. 1.10 obtenim

$$\begin{aligned} L[y_p] &= K'(t)\phi(t) + K(t)\phi'(t) + a(t)K(t)\phi(t) \\ &= K'(t)\phi(t) + K(t)[\phi'(t) + a(t)\phi(t)] \\ &= K'(t)\phi(t) = f(t) \end{aligned}$$

doncs $\phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0$.

Per tant, excepte una constant d'integració que podem suposar nul·la,

$$K(t) = \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt,$$

i la solució particular serà

$$y_p = \phi(t) \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt \quad (1.16)$$

Finalment, tot sumant-li la solució general de l'homogènia, la solució general de l'equació completa és

$$y = \phi(t) \left(\int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt + C \right) \quad (1.17)$$

Exemple 9 Integrar l'equació

$$y' \cos t + y \sin t = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Solució. L'escrivim com

$$y' + (\tan t) y = \frac{1}{\cos t}$$

Integrem primer l'equació homogènia, $y'_h + (\tan t) y_h = 0$,

$$y_h = C e^{-\int \tan t dt} = C \cos t$$

Ara busquem una solució particular de l'equació completa a partir de l'Eq. 1.16, en la forma $y_p(t) = K(t) \cos t$,

$$y_p = \cos t \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \sin t$$

Així, la solució general de l'equació és

$$y = \sin t + C \cos t$$

✓

Capítol 2

Equacions diferencials lineals d'ordre superior

2.1 Equacions de segon ordre

Una equació diferencial lineal de segon ordre es pot escriure com

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \quad (2.1)$$

on $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són funcions que només depenen de x . Notem que l'equació s'està escrivint en forma *mònica*, és a dir, el coeficient de la derivada d'ordre màxim és 1.

Fent servir la notació de l'operador lineal, podem també escriure

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x); \quad L[y(x)] = R(x) \quad (2.2)$$

Exemple 10 *Les equacions $y'' + y = 0$, $xy'' - y' + 2y = x^2$, són lineals de segon ordre. La primera té coeficients constants i la segona té coeficients que són funció de la variable independent.*

En general, voldrem resoldre el PVI constituït per l'Eq. 2.1 amb unes condicions inicials

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

En aquest cas, l'existència i unicitat de la solució ve garantida pel següent teorema.

Teorema 2 (d'existència i unicitat) *Si $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, i $x_0 \in I$, aleshores existeix una única solució $y(x)$ del problema de valor inicial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x); \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

en un entorn obert de x_0 dins de I .

Com en les equacions de primer ordre, usarem la denominació d'equació homogènia per a referir-nos a l'equació

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2.3)$$

i d'equació completa si ens referim a

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (2.4)$$

amb $R(x)$ no nul·la. La linealitat de l'operador L garanteix que la diferència de dues solucions de l'equació completa és solució de l'equació homogènia, és a dir, pertany al subespai vectorial $\ker L$. De la mateixa manera, per a trobar la solució general y de l'equació completa només cal conèixer una solució particular y_p de l'equació completa i la solució general y_h de l'equació homogènia:

$$y = y_p + y_h$$

2.1.1 Solució de l'equació homogènia

El càlcul de la solució general de l'equació homogènia es redueix a trobar una base del $\ker L$. Vegem el següent teorema, que també el farem servir en equacions d'ordre superior.

Teorema 3 (Principi de superposició) *Si $y_1, y_2, \dots, y_k$ són solucions d'una equació lineal homogènia, llavors $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$ també n'és solució, $\forall c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.*

Aquest resultat ens dona un mètode per a construir solucions, ja que amb dues solucions podem obtenir-ne infinites. Fixem-nos en dos casos particulars:

- Si y_1 és solució d'una equació lineal homogènia, aleshores $y = ky_1$ també ho és $\forall k \in \mathbb{R}$.
- En particular, fent $k = 0$, la solució trivial $y = 0$ sempre és solució d'una equació lineal homogènia.

Exemple 11 *Considerem l'equació $y'' + y' = 0$. És clar que la funció $y = 1$ n'és solució. D'altra banda, la funció $y = e^x$ n'és també solució. Per tant, les funcions de la forma $y(x) = c_1 + c_2e^x$, en són també solució.*

Exemple 12 *Anem a buscar solucions no trivials de l'equació $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.*

Solució. Podem resoldre aquesta equació assajant solucions de la forma $y = x^n$. Així, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$. Si ho introduïm a l'equació, queda

$$n(n-1)x^n + 2nx^n - 2x^n = [n(n-1) + 2n - 2]x^n = 0$$

Llavors, per a ser vàlida la igualtat per a valors $x \neq 0$, només cal que $n^2 + n - 2 = 0$. Per tant, les solucions s'obtenen de $n = 1, -2$, i són x, x^{-2} . En general, $y = c_1x + c_2x^{-2}$ són solució de l'equació. ✓

Quan estudiem sistemes d'equacions veurem que, per a un operador diferencial lineal L d'ordre n , es compleix $\dim \ker L = n$. Per tant, en l'exemple anterior ja hauriem obtingut la solució general de l'equació.

2.2 Wronskià

Generalitzant el que havíem dit per les equacions de primer ordre, si l'operador diferencial L és d'ordre n , considerarem que és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^n(I)$ a $\mathcal{C}(I)$, per a un cert interval $I \subset \mathbb{R}$. Naturalment, els conceptes de dependència i independència lineal de vectors també s'aplicaran a les funcions pertanyents a aquests espais vectorials. No obstant, veurem un mètode específic per a estudiar la dependència o independència lineal de funcions.

Definició 6 *Siguin $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, n funcions que suposarem derivables almenys fins a ordre $n - 1$ en un cert interval I . El seu wronskià es defineix com el determinant*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

En darrer terme, el wronskià $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ és una funció de la variable x en l'interval I , per això, de vegades també escriurem $W(x)$.

En àlgebra havíem vist que si el wronskià d'un conjunt de funcions $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ és no nul per a algun $x \in I$, llavors les funcions són linealment independents. El recíproc no és sempre cert, com ho veurem en el darrer dels següents exemples.

Exemple 13 *Calcularem el wronskià d'algunes famílies de funcions:*

- $W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$
- $W(x^2, x^3, x^4) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 2 & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = 2x^6$
- $W(\sin^2 x, 1 - \cos 2x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \sin x \cos x & 2 \sin 2x \end{vmatrix} =$
 $= 2 \sin^2 x \sin 2x - 2 \sin x \cos x (1 - \cos 2x) =$
 $= \sin 2x (2 \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$
- $W(\sin^2 x, 1 - \cos 2x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \sin x \cos x & 2 \sin 2x \end{vmatrix} =$
 $= 2 \sin^2 x \sin 2x - 2 \sin x \cos x (1 - \cos 2x) =$
 $= \sin 2x (2 \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0$
- *Les funcions $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = |x|^3$ són linealment independents en tot $\mathbb{R}$. És fàcil veure que, per a $x < 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, -x^3) = 0$, ja que les seves columnes són proporcionals. Igualment, per a $x \geq 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, x^3) = 0$. Per tant, que el wronskià sigui nul no és sempre equivalent a que les funcions siguin linealment dependents.*

2.3 Equacions homogènies

El nostre objectiu és ara obtenir la solució general de l'equació lineal homogènia. Ho farem a partir de combinacions lineals de solucions linealment independents.

Lema 1 *Siguin $y_1(x), y_2(x)$ dues solucions de l'equació homogènia, Eq. 2.3. Llavors, el seu wronskià, o bé no s'anul·la mai, o bé és idènticament nul.*

Demostració (Lema 1). El wronskià de y_1 i y_2 és $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Derivant, obtenim

$$W'(x) = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Tenint en compte que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0; \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

multipliquem la primera equació per y_2 , la segona per y_1 , i restem,

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

És a dir,

$$\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

Per tant, el wronskià és de la forma

$$W(x) = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

D'aquí es dedueix el resultat desitjat, ja que l'exponencial és sempre positiva.

Lema 2 *Dues solucions no nul·les $y_1(x), y_2(x)$ són linealment dependents en I si, i només si, el seu wronskià és idènticament nul.*

Demostració (Lema 1).

(Condicció suficient.) Suposem que $y_1(x), y_2(x)$ són linealment dependents en I . Llavors, $y_2(x) = c y_1(x)$, $y_2'(x) = c y_1'(x)$; $c \in \mathbb{R}$. Per tant, el wronskià és $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = y_1(x)c y_1'(x) - c y_1(x)y_1'(x) = 0$ en tot I .

(Condicció necessària.) Suposem ara $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$ en I . Observem que, si per a un punt $x_0 \in I$ fos $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, hauriem de concloure que $y_1(x)$ és la solució trivial, ja que la solució del PVI és única. El mateix es pot dir per a y_2 . Hem d'excloure, doncs, aquesta situació. Per tant, si $y_1(x_0) = 0$, llavors ha de ser $y_2(x_0) = 0$. I recíprocament, en els punts x tals que $y_2(x) \neq 0$, llavors $y_1(x) \neq 0$. Per tant, situem-nos en qualsevol x tal que $y_1(x)y_2(x) \neq 0$. Si dividim $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$ per $y_1(x)y_2(x)$, tenim $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = 0$, d'on $\frac{d \ln y_2(x)}{dx} = \frac{d \ln y_1(x)}{dx}$. Integrant, en resulta la proporcionalitat desitjada, $y_2(x) = c y_1(x)$, amb c constant. A més, es complirà $y_2'(x) = c y_1'(x)$. D'altra banda, si hi ha un punt x_0 tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, tindrem $y_2'(x_0) = c y_1'(x_0)$, i ja hem vist que aquestes derivades no poden ser nul·les. Per tant, també obtindrem proporcionalitat, $y_2(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x)$.

Ara ja estem en condicions d'enunciar el resultat següent. Ho farem generalitzant a ordres superiors.

Teorema 4 Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ són n solucions linealment independents en un interval I de l'equació lineal homogènia d'ordre n ,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I$$

llavors

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

n'és la solució general en I .

Demostració. Vegem la demostració en el cas de segon ordre. En efecte, sigui $y(x)$ una solució qualsevol de l'equació lineal homogènia Eq. 2.3. Volem veure que existeixen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Sabem que una solució queda unívocament determinada pel coneixement del valor de la solució i la seva derivada en un mateix punt. Per tant, només caldrà trobar els valors c_1 i c_2 tals que en algun punt $x_0 \in I$ verifiquin

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

Per a que aquest sistema tingui solució caldrà que el determinant

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

sigui diferent de zero. El teorema quedarà doncs demostrat si veiem que, per a dues solucions independents, aquest determinant és no nul. Però, això és cert pels lemes anteriors i, a més, és vàlid per a qualsevol punt $x_0 \in I$.

Exemple 14 Veure que les funcions de la forma $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són la solució general de l'equació $y'' + y = 0$. Calcular la solució que compleix $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

Solució. Vegem primer que $y = \sin x$ i $y = \cos x$ satisfan l'equació. En efecte, si $y = \sin x$, llavors $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ i $y'' + y = 0$. Així mateix, si $y = \cos x$, llavors $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ i també verifica l'equació. En general, les combinacions de la forma $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són també solució de l'equació.

Ara, per a comprovar que totes les solucions són d'aquesta forma, només caldrà veure que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$. En efecte, $W(\sin x, \cos x) = -1$.

Si volem que la solució compleixi les condicions inicials, imposen

$$\begin{aligned} c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 &= 2 \\ c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 &= 3 \end{aligned}$$

Llavors $c_1 = 3, c_2 = 2$, i la solució que busquem és $y = 3 \sin x + 2 \cos x$. ✓

Una altra aplicació interessant del wronskià és la de trobar l'equació diferencial lineal i homogènia de grau mínim satisfeta per una família determinada de funcions linealment independents. Ho veiem tot continuant l'exemple anterior.

Exemple 15 Calcular l'equació lineal i homogènia que té per solucions $\sin x, \cos x$.

Solució. Ja hem vist que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$. Per tant, aquestes són dues solucions linealment independents, en tot $\mathbb{R}$, d'una equació de segon ordre. Qualsevol altra solució $y(x)$ que sigui solució de l'equació buscada haurà de ser linealment dependent de les solucions anteriors. Per tant, hauran de verificar

$$W(\sin x, \cos x, y(x)) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y(x) \\ \cos x & -\sin x & y'(x) \\ -\sin x & -\cos x & y''(x) \end{vmatrix} = 0$$

Ara només hem de calcular el determinant, per exemple, per adjunts de la tercera columna,

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y = -y'' + 0 y' - y = 0$$

L'equació d'ordre mínim és, doncs, $y'' + y = 0$. ✓

2.4 Equacions homogènies a coeficients constants

En general, no és fàcil trobar solucions particulars d'una equació diferencial, encara que sigui lineal i homogènia, però quan l'equació té coeficients constants, veurem que és molt senzill. Primer ho resoldrem per a segon ordre. Suposem l'equació

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

amb $p, q \in \mathbb{R}$.

Podem escriure l'equació en la forma de l'operador diferencial

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + p \frac{d}{dx} + q; \quad L[y(x)] = 0 \quad (2.6)$$

Provem ara solucions de la forma $y = e^{mx}$, on m és una incògnita a determinar. Com $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$, tindrem

$$L[e^{mx}] = (m^2 + pm + q) e^{mx} = 0$$

Per tant, les funcions de la forma e^{mx} són solucions de l'Eq. 2.6 sempre que m sigui arrel del *polinomi característic*

$$P(m) = m^2 + pm + q \quad (2.7)$$

L'equació $P(m) = 0$ s'anomena *equació característica* associada a l'equació diferencial.

En la resolució d'aquesta equació convé distingir diversos casos.

- (i) Cas $p^2 - 4q > 0$. L'equació característica admet dues solucions reals diferents $m_1 \neq m_2$. A més, es compleix $W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) \neq 0$. Per tant, $y_1 = e^{m_1 x}$ i $y_2 = e^{m_2 x}$ són dues solucions independents de l'equació diferencial. Així doncs, la solució general serà

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (ii) Cas $p^2 = 4q$. Només hi ha una arrel real doble, m , de l'equació característica. Una solució és $y_1 = e^{mx}$, però per a trobar la solució general necessitem una altra solució linealment independent. Tot i que es pot trobar pel mètode de variació de les constants a partir de l'anterior, ho farem amb el següent raonament:

Com $L[e^{mx}] = P(m) e^{mx}$, derivant respecte de m obtenim

$$\frac{\partial}{\partial m} L[e^{mx}] = L\left[\frac{\partial}{\partial m} e^{mx}\right] = [P'(m) + mP(m)]e^{mx}$$

Com m és arrel doble de $P(m)$, també és arrel de $P'(m)$. Per tant, tindrem

$$L[xe^{mx}] = 0$$

Llavors, la solució general serà de la forma

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (iii) Cas $p^2 < 4q$. L'equació característica no té solucions reals. Per tant, tindrem arrels complexes conjugades $\alpha \pm i\beta$, i $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ seran solucions de l'Eq. 2.6, però en el camp complex. Ara bé, per a obtenir dues solucions reals independents només caldrà treballar amb una de les solucions complexes. Tenint en compte la fórmula d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

podem escriure

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (2.8)$$

Com $L[e^{(\alpha + i\beta)x}] = 0$, s'hauran d'anul·lar per separat les parts real i imaginària. Així,

$$L[e^{\alpha x} \cos \beta x] = 0; \quad L[e^{\alpha x} \sin \beta x] = 0 \quad (2.9)$$

Clarament aquestes solucions són linealment independents, doncs el seu wronskià val

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x) = \beta e^{2\alpha x}$$

que és diferent de zero perquè $\beta \neq 0$. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 16 Trobar la solució general de l'equació $y'' + y' - 6y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^2 + m - 6 = 0$, amb arrels

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}; \quad m_1 = 2, \quad m_2 = -3$$

La solució general de l'equació diferencial és doncs

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

✓

Exemple 17 Trobar la solució general de l'equació $y'' + 2y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica $m^2 + 2m + 1 = 0$ té arrel $m = -1$ doble. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

✓

Exemple 18 Resoldre l'equació $y'' + y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^2 + m + 1 = 0$, amb arrels complexes $m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Per tant, la solució general és

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

✓

2.5 Equacions d'ordre superior

Generalitzem els resultats anteriors a ordre n . Considerem l'equació lineal homogènia a coeficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2.10)$$

amb constants $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. L'equació característica és

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \dots + a_1m + a_0 = 0$$

que pot tenir arrels reals i complexes amb diferents multiplicitats. Vegem quina és la contribució de cada una d'elles a la solució general.

- Per a cada arrel real m amb multiplicitat k hi ha k solucions linealment independents de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, \dots, x^{k-1} e^{mx}$$

Aleshores la solució general serà

$$(c_1 + c_2x + \dots + c_kx^{k-1})e^{mx}$$

En particular, si l'arrel és simple ($k = 1$), només caldrà un sol terme $c e^{mx}$.

- Per a cada parella d'arrels complexes conjugades, $\alpha \pm i\beta$, amb multiplicitat k tindrem $2k$ solucions linealment independents de la forma

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Aleshores, cada parella d'arrels complexes contribuirà a la solució general amb

$$(c_1 + c_2x + \dots + c_kx^{k-1})e^{\alpha x} \cos \beta x + (c_{k+1} + c_{k+2}x + \dots + c_{2k}x^{k-1})e^{\alpha x} \sin \beta x$$

En particular, si la parella d'arrels complexes és simple ($k = 1$), tindrem dos termes,

$$(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$$

Exemple 19 Resoldre $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 3y' + y = 0$.

Solució. L'equació característica és

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3 = 0$$

L'arrel real $m = -1$ és triple. Aleshores la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2) e^{-x}$$

✓

Exemple 20 Resoldre $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y' + 4y = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 8m + 4 = (m^2 + 2m + 2)^2 = 0$. Les arrels complexes $m = -1 \pm i$ són dobles. Per tant, la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x) e^{-x} \cos x + (c_3 + c_4x) e^{-x} \sin x$$

✓

Exemple 21 Resoldre $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$.

Solució. Escrivim l'equació característica, $m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1 = 0$, que té les arrels $m = 1$ doble i $m = \pm i$ simples. Obtenim, doncs, la solució general

$$y = (c_1 + c_2x) e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

✓

Exemple 22 Resoldre $y^{(7)} = 0$.

Solució. L'equació característica és $m^7 = 0$, que té una única arrel $m = 0$, de multiplicitat 7. La solució general és

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 + c_7x^6$$

✓

2.6 Equacions lineals no homogènies

Recordem que per a resoldre l'equació completa cal conèixer una solució particular i la solució general de l'homogènia. Vegem com obtenir una solució particular de l'equació completa. Ho farem pel cas de l'equació d'ordre 2, Eq. 2.1, que és generalitza fàcilment a ordres superiors.

Considerarem dos mètodes:

- Mètode de variació de les constants. És un mètode general que serveix tant per a equacions amb coeficients constants com no constants.
- Mètode dels coeficients indeterminats. És un mètode ràpid que ens estalvia la integració, però que només es pot aplicar a equacions amb coeficients constants i per a uns tipus particulars d'equacions.

2.6.1 Mètode de variació de les constants

És la generalització del mètode que havíem usat per a equacions lineals de primer ordre, i és vàlid per a equacions diferencials amb coeficients constants o variables. Ho resolldrem per a una equació lineal de segon ordre, escrita en forma mònica,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2.11)$$

amb una funció arbitrària $f(x)$ del terme independent.

Per a trobar una solució particular y_p de l'Eq. 2.11, caldrà, però, saber la solució general

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

de la part homogènia de l'equació, on c_1, c_2 són constants i $y_1(x), y_2(x)$ són dues solucions particulars linealment independents de l'equació homogènia.

El mètode consisteix en substituir les constants c_1, c_2 per funcions desconegudes a determinar, $c_1(x), c_2(x)$, de manera que y_p sigui de la forma

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (2.12)$$

i sigui solució de l'Eq. 2.11.

El problema és ara trobar aquestes funcions incògnites $c_1(x)$ i $c_2(x)$. Però com que hem passat de tenir una funció desconeguda y_p a tenir-ne dues, necessitarem una equació que les relacioni. Derivem l'Eq. 2.12 i obtenim

$$y_p' = c_1'(x)y_1 + c_1(x)y_1' + c_2'(x)y_2 + c_2(x)y_2'$$

A continuació, si tornem a derivar, apareixeran les derivades segones de $c_1(x)$ i $c_2(x)$, però, per a evitar aquesta complicació, imposarem el lligam

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \quad (2.13)$$

Aquesta és doncs l'equació que les relaciona. Aleshores ens queda

$$y_p' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

i derivant,

$$y_p'' = c_1'(x)y_1' + c_1(x)y_1'' + c_2'(x)y_2' + c_2(x)y_2''$$

Ara, imposem que l'Eq. 2.12 sigui solució de l'Eq. 2.11,

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1' + c_1(x)y_1'' + c_2'(x)y_2' + c_2(x)y_2'' + P(x)c_1(x)y_1' + \\ + P(x)c_2(x)y_2' + Q(x)c_1(x)y_1 + Q(x)c_2(x)y_2 = f(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

i, reordenant de manera adequada, obtenim

$$c_1(x)[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + c_2(x)[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$$

En ser y_1, y_2 dues solucions de l'equació homogènia, els dos primers termes anteriors es fan zero,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

i tan sols ens queda,

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \quad (2.15)$$

Si apleguem les expressions Eq. 2.13 i Eq. 2.15, obtenim un sistema lineal de dues equacions amb les incògnites $c_1'(x)$ i $c_2'(x)$,

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

El determinant associat al sistema és el wronskià $W(y_1, y_2)$, que és no nul perquè y_1 i y_2 són linealment independents:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.17)$$

Resolent aquest sistema, obtindrem les derivades de les funcions incògnita, i després integrarem,

$$c_1(x) = \int -\frac{y_2 f}{W} dx; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

No cal sumar una constant d'integració perquè només ens interessa una solució particular.

Finalment, la solució particular que hem trobat és

$$y_p = y_1 \int -\frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (2.18)$$

La solució general de l'Eq. 2.11 és, doncs,

$$y = y_1 \left(\int -\frac{y_2 f}{W} dx + c_1 \right) + y_2 \left(\int \frac{y_1 f}{W} dx + c_2 \right) \quad (2.19)$$

amb c_1 i c_2 constants.

Exemple 23 *Resoldre l'equació diferencial*

$$y'' + 4y = \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x}$$

Solució. Comencem amb l'equació homogènia

$$y'' + 4y = 0$$

L'equació característica és $m^2 + 4 = 0$, amb arrels $m = \pm 2i$. Aleshores, la seva solució general és

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

amb c_1 i c_2 constants.

Ara, trobarem una solució particular de l'equació completa en la forma

$$y = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$$

Hem de resoldre el sistema,

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(-2 \sin 2x) + c_2'(x) 2 \cos 2x = \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{cases} \quad (2.20)$$

El wronskià és

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Aleshores, aplicant la regla de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(-\sin^2 2x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right)$$

Anàlogament,

$$c_2'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \sin 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\sin 2x \cos 2x - 1)$$

Integrant, obtenim

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) dx = -\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x|$$

$$c_2(x) = \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2}$$

La solució particular queda com

$$y_p = \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2} \right) \sin 2x$$

Finalment, la solució de l'equació demanada és

$$y = \left(c_1 + -\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(c_2 + \frac{1}{8} \sin^2 2x - \frac{x}{2} \right) \sin 2x$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

✓

2.6.2 Equació d'ordre n

Suposem que volem determinar una solució particular d'una equació d'ordre n ,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

on $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ poden ser coeficients constants o variables, i sigui

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

la solució general de l'equació homogènia associada, amb $c_1, c_2, \dots, c_n$ constants i $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ solucions linealment independents.

Busquem una solució particular del tipus

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

En aquest cas, les derivades de les funcions incògnites $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ són les solucions del sistema $n \times n$,

$$\begin{cases} c'_1 y_1 & + & c'_2 y_2 & + & \cdots & + & c'_n y_n & = & 0 \\ c'_1 y'_1 & + & c'_2 y'_2 & + & \cdots & + & c'_n y'_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ c'_1 y_1^{(n-1)} & + & c'_2 y_2^{(n-1)} & + & \cdots & + & c'_n y_n^{(n-1)} & = & f(x) \end{cases} \quad (2.21)$$

El determinant associat al sistema és el wronskià de $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, per tant, no nul. A partir d'aquí es segueix el mateix procediment indicat per a equacions de segon ordre, i s'integra cadascuna de les $c'_k(x)$ per a obtenir les n funcions $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$.

2.6.3 Mètode dels coeficients indeterminats

Buscarem solucions particulars de l'Eq. 2.11 quan $f(x)$ és una exponencial, un polinomi, un sinus o un cosinus. Veurem també que es pot aplicar en el cas de producte d'aquestes funcions, és a dir, quan

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^m) e^{\alpha x} \sin \beta x + (b_0 + a_1 x + \cdots + b_n x^m) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (2.22)$$

Descriurem el mètode mitjançant exemples. El mètode també es coneix amb el nom de *mètode de la conjectura prudent*.

Exemple 24 *Calcular una solució particular de*

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

Solució. Si assagem amb funcions de la forma

$$y = A \cos x + B \sin x$$

les seves derivades seran també funcions d'aquest forma i, llavors, el nostre problema consistirà en determinar A i B que satisfacin l'equació. En efecte,

$$y' = -A \sin x + B \cos x, \quad y'' = -A \cos x - B \sin x$$

Substituïnt, obtenim

$$-A \cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) - 4(A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x$$

és a dir

$$(-A - 3B - 4A) \cos x - (B - 3A + 4B) \sin x = 2 \sin x$$

Per tant,

$$-A - 3B - 4A = 0, \quad B - 3A + 4B = -2$$

La solució d'aquest sistema és $A = \frac{3}{17}, B = -\frac{5}{17}$. La solució particular que trobem és

$$y = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x)$$

✓

Exemple 25 Trobar una solució particular de l'equació

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

Solució. Si provem un polinomi del mateix grau que la part no homogènia i substituïm, obtindrem una igualtat entre polinomis que resolldrem igualant coeficients. Així,

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad y' = B + 2Cx, \quad y'' = 2C$$

Substituïnt,

$$-4Cx^2 - (6C + 4B)x + (2C - 3B - 4A) = 4x^2$$

I, igualant termes corresponents a les mateixes potències de la x , obtenim

$$-4C = 4, \quad 6C + 4B = 0, \quad 2C - 3B - 4A = 0$$

Per tant, $C = -1, B = \frac{3}{2}, A = -\frac{13}{8}$. Una solució particular és

$$y = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

✓

Exemple 26 Calcular la solució general de

$$y'' - 3y' - 3y = e^{-x}$$

Solució. Primer busquem una solució particular. Si assagem solucions del tipus

$$y = Ae^{-x}$$

s'obté

$$y' = -Ae^{-x}, \quad y'' = Ae^{-x}$$

Per tant, substituïnt,

$$Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) - 3(Ae^{-x}) = e^{-x}$$

d'on,

$$(A + 3A - 3A)e^{-x} = e^{-x}$$

Per tant $A = 1$, i una solució particular és

$$y = e^{-x}$$

Ara bé, la solució general de l'equació homogènia associada, $y'' - 3y' - 3y = 0$, és

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad m_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \quad m_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

Aleshores, la solució general de la completa és

$$y = e^{-x} + c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Observem que la solució particular que hem obtingut no és de la mateixa família d'exponencials que les obtingudes per a l'equació homogènia. ✓

Exemple 27 *Calcular una solució particular de l'equació*

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

Solució. Si proposem una funció de la forma

$$y = Ae^x$$

i substituïm, obtenim $0 = e^x$, que clarament no té solució. El problema amb què ens trobem és que la funció que proposem és ja solució de l'equació homogènia.

Si abans haguéssim resolt l'equació homogènia, hauríem vist que l'equació característica $m^2 - 2m + 1 = 0$ té per solució l'arrel $m = 1$, de multiplicitat 2. Per tant, la solució que proposem, i també totes les de la forma $y = (A + Bx)e^x$, són solucions de l'homogènia, associades a l'arrel $m = 1$.

En aquest cas, la solució que cal proposar és

$$y = Ax^2 e^x$$

és a dir, multiplicar Ae^x per x^k , amb k igual a la multiplicitat de la corresponent arrel de l'equació característica.

Així,

$$y' = 2Axe^x + Ax^2 e^x, \quad y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x$$

Substituïnt,

$$[(2A + 4Ax + Ax^2) - 2(2Ax + Ax^2) + Ax^2]e^x = e^x$$

Ara, simplificant i igualant termes corresponents a iguals potències de la x , obtenim

$$2A = 1, \quad 4A - 4A = 0, \quad A - 2A + A = 0$$

Per tant, $A = \frac{1}{2}$. Una solució particular és $\frac{1}{2}x^2 e^x$ i la solució general és

$$y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2)e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

✓

Podem donar aquest criteri de forma més general: si el terme no homogeni de l'equació és de la forma que apareix en l'Eq. 2.22, i l'equació característica té una arrel $\alpha + i\beta$ de multiplicitat k , llavors cal proposar una solució particular com

$$y = x^k [(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x] \quad (2.23)$$

2.6.4 Principi de superposició

Per acabar aquest capítol, presentem un resultat interessant per a calcular solucions particulars d'equacions diferencials lineals no homogènies. És un altre principi de superposició, que permet fer el càlcul d'una solució particular terme a terme.

Teorema 5 Si $y_1(x)$ verifica

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = f_1(x)$$

i $y_2(x)$ satisfà

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = f_2(x)$$

aleshores, $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ és solució de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Com aplicació d'aquest resultat vegem l'exemple següent.

Exemple 28 Determinar una solució particular de l'equació

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x + 4x^2$$

Solució. A partir del principi de superposició per a equacions no homogènies podem obtenir

$$y_p = y_1 + y_2$$

on y_1 és una solució particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

i y_2 ho és de

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

Anteriorment ja hem estudiat aquestes equacions per separat i teníem

$$y_1 = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x), \quad y_2 = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

Per tant,

$$y_p = \frac{1}{17}(3 \cos x - 5 \sin x) - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

✓

Capítol 3

Sistemes d'equacions diferencials lineals

3.1 Introducció

Definició 7 *Un sistema d'equacions diferencials lineals de primer ordre és un conjunt d'equacions en la forma*

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= a_1^1(t)x_1(t) + a_1^2(t)x_2(t) + \cdots + a_1^n(t)x_n(t) + b_1(t) \\x_2'(t) &= a_2^1(t)x_1(t) + a_2^2(t)x_2(t) + \cdots + a_2^n(t)x_n(t) + b_2(t) \\&\vdots \\x_n'(t) &= a_n^1(t)x_1(t) + a_n^2(t)x_2(t) + \cdots + a_n^n(t)x_n(t) + b_n(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

o de manera abreujada, en forma matricial,

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)\tag{3.2}$$

on $A(t)$ és la matriu de coeficients del sistema donat per l'Eq. 3.1, i $\vec{b}(t)$ és un vector de termes independents. El sistema serà homogeni si $\vec{b}(t) = \vec{0}$.

3.1.1 Propietats generals

Com en el capítol anterior, podem fer servir la notació d'operador diferencial per a escriure l'Eq. 3.2,

$$L[\vec{x}] = \left(\frac{d}{dt} - A(t) \right) \vec{x}\tag{3.3}$$

Llavors, el sistema homogeni associat a l'Eq. 3.2 ve donat per

$$L[\vec{x}] = \vec{0}$$

i el sistema complet és

$$L[\vec{x}] = \vec{b}(t)$$

Degut a la linealitat de l'operador L , l'estructura de les solucions prové de la generalització immediata de la que es tenia per a equacions diferencials escalars. Així, per exemple,

- les solucions del sistema homogeni són les que pertanyen al $\ker L$,

- la solució trivial és sempre solució del sistema homogeni,
- la diferència de solucions particulars del sistema complet és solució del sistema homogeni,
- la solució general del sistema complet s'obté sumant una solució particular qualsevol a la solució general del sistema homogeni,
- es compleix el principi de superposició, tant per les solucions del sistema homogeni, com per les del complet.

Teorema 6 (d'existència i unicitat de les solucions) Si $A(t)$ i $\vec{b}(t)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, llavors el problema de valor inicial

$$\vec{x}' = A(t) \vec{x} + \vec{b}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (3.4)$$

té una única solució en un obert contingut en I .

Destaquem les propietats i definicions següents:

- En particular, si els coeficients de $A(t)$ són continus $\forall t \in \mathbb{R}$, les solucions també ho són.
- La solució $\vec{x}(t)$ és un *camp vectorial* de classe $\mathcal{C}^1$ dins $\mathbb{R}^n$, anomenat *espai de les fases*.
- Per a una solució $\vec{x}(t)$, el conjunt de valors $(t, \vec{x}(t)) \in (I, \mathbb{R}^n)$ és una *corba integral*, gràfic de la solució del sistema.

3.2 Relació entre un sistema i una equació

Vegem quina relació hi ha entre un sistema de n equacions diferencials de primer ordre i una única equació diferencial d'ordre n .

Considerem l'equació

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (3.5)$$

que escrivim amb unes noves variables. Primer definim $x_1 = y$, i després definim recurrentment les successives derivades de y :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + f(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Llavors, comparant amb l'Eq. 3.1 tenim,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

El pas d'equació a sistema sempre és possible i, per tant, es pot considerar que les equacions d'ordre n constitueixen un cas particular dels sistemes d'equacions diferencials.

Exemple 29 *L'equació diferencial*

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

s'escriu en forma de sistema, definint $x_1 = y$, com

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

3.3 Sistemes homogenis

Teorema 7 *Les solucions del sistema homogeni*

$$L[\vec{x}(t)] = \vec{0} \quad (3.8)$$

formen un espai vectorial de dimensió n .

La idea és la següent. Considerem una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

En ella, qualsevol condició inicial s'expressa com

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

Considerem ara les solucions (que existeixen i són úniques) $\vec{\phi}_i$ dels n problemes de valor inicial

$$L[\vec{\phi}_i] = \vec{0}, \quad \phi_i(t_0) = \vec{e}_i; \quad i = 1, \dots, n$$

Llavors,

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t)$$

és una solució que verifica la condició inicial

$$\sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t_0) = \vec{x}_0$$

i, per tant, és única. Així, $\{\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)\}$ és una base de solucions del $\ker L$.

3.3.1 Dependència i independència lineal de funcions

Proposició 1 *Considerem un conjunt de funcions vectorials (no parlem encara de solucions d'una equació diferencial) $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ definides per a $t \in I$, amb valors a $\mathbb{R}^n$. Formem la matriu quadrada $X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)]$.*

Si $\det X(t) \neq 0$, per a algun $t \in I$, llavors les funcions són linealment independents en I .

O bé, si les funcions són linealment dependents en I llavors $\det X(t) = 0$, $\forall t \in I$.

El recíproc no és cert en general.

3.3.2 Matriu fonamental de solucions

Definició 8 Si $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ són n solucions l'Eq. 3.8, linealment independents en l'interval I , llavors, la matriu

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \quad (3.9)$$

s'anomena matriu fonamental de solucions del sistema homogeni.

Per tant, una matriu fonamental de solucions del sistema $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ satisfà

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

Vegem algunes propietats de la matriu fonamental de solucions en relació al PVI de l'Eq. 3.4.

- Tota solució de l'Eq. 3.4 s'obté a partir d'una combinació lineal de les columnes de $X(t)$. Si ho expressem matricialment, tenim

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} \quad (3.10)$$

El vector constant $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ es calcula a partir d'una condició inicial

$$\vec{x}_0 = X(t_0)\vec{c}$$

- Com les columnes de $X(t)$ són linealment independents, la matriu és invertible i, per tant,

$$\det X(t) \neq 0, \forall t \in I \quad (3.11)$$

El determinant de la matriu fonamental de solucions és el *wronskià* de les solucions.

- La solució del PVI es pot escriure substituïnt

$$\vec{c} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0$$

en l'Eq. 3.10:

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 \quad (3.12)$$

- En particular, la solució trivial $\vec{x}(t) = \vec{0}, \forall t \in I$, és la única solució del sistema homogeni amb condició inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{0}$.
- En general, si $X(t)$ és matriu fonamental de solucions i M és una matriu regular, llavors $X(t)M$ també és una matriu fonamental de solucions.
- La matriu fonamental obtinguda com

$$\Phi(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

verifica

$$\Phi(t_0) = I$$

i s'anomena matriu fonamental principal.

La segona de les propietats ens proporciona el recíproc de la Proposició 1:

Proposició 2 *Les columnes d'una matriu de solucions $X(t)$ són linealment independents si, i només si, $\det X(t) \neq 0$.*

Exemple 30 Si $\vec{x}_1 = (1, t)^T$, $\vec{x}_2 = (t^2, 0)^T$ són solució de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, calcular $A(t)$.

Solució. Derivant, obtenim $\vec{x}'_1 = (0, 1)^T$, $\vec{x}'_2 = (2t, 0)^T$. Per tant, es complirà

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Si $t \neq 0$, és a dir, per a $t < 0$ o per a $t > 0$, la matriu de solucions

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

és invertible (és una matriu fonamental de solucions). Llavors,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} -2t^2 & 2t \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix}$$

✓

Vegem un sistema senzill de resoldre.

Exemple 31 *Calcular la solució de*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

tal que $\vec{x}(t_0) = (a, b)^T$.

Solució. En aquest cas podem escriure i resoldre les dues equacions per separat

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = 2tx_2$$

d'on

$$x_1(t) = ae^{t-t_0}, \quad x_2(t) = be^{t^2-t_0^2}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Observem que la matriu fonamental del sistema és principal:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t_0^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix}$$

✓

3.4 Matriu exponencial

Havíem vist que les funcions exponencials generaven les solucions de les equacions diferencials lineals (excepte en un factor polinòmic, per a arrels múltiples), incloent també les solucions associades a arrels complexes de l'equació característica.

Això es pot generalitzar si usem una sèrie de matrius que pren com a patró la sèrie de la funció exponencial d'una variable real, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$.

Es pot demostrar que, com la sèrie escalar, la sèrie de matrius és uniformement convergent, la qual cosa permet sumar sèries d'aquest tipus, fer productes entre elles, inclús derivades i integrals, tot mantenint la convergència.

Definició 9 Si A és una matriu $n \times n$, la matriu exponencial es defineix com la sèrie infinita de matrius

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (3.13)$$

Per tant, $e^A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Propietat 1 Fem un resum de les propietats més importants:

- $e^0 = I$.
- Si $AB = BA$, llavors $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.
- $e^A e^{-A} = e^0 = I$, d'on $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- $\det e^A \neq 0$, $\forall A$.
- Si $A = P B P^{-1}$, aleshores $e^A = P e^B P^{-1}$.

Exemple 32 Vegem uns casos particulars:

1. Si λ és un escalar, $e^{\lambda I} = e^\lambda I$.
2. Si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, llavors $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$.
3. Si $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ és una matriu diagonal per blocs, llavors $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_n})$.
4. Si $A^n = 0$, llavors $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$.

Proposició 3 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriu constant i una variable $t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (3.14)$$

Ara podem passar de treballar amb sèries de matrius a fer-ho amb sèries de vectors. Per exemple, per a qualsevol vector $\vec{v}$, que no depengui de t ,

$$\frac{d}{dt} (e^{At} \vec{v}) = A e^{At} \vec{v} \quad (3.15)$$

I, també considerant sèries de vectors, tenim la següent propietat important:

Propietat 2 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ i una variable real t . Donat un escalar λ i un vector constant $\vec{v}$, es compleix

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} \quad (3.16)$$

Aquesta propietat és dedueix immediatament del primer dels exemples i del fet que les matrius λI i $(A - \lambda I)$ commuten. Si ara la combinem amb el darrer dels exemples, obtenim una propietat que serà molt útil a l'hora de resoldre sistemes d'equacions diferencials lineals:

Propietat 3 Si existeix un nombre natural n tal que $(A - \lambda I)^n \vec{v} = \vec{0}$, llavors

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t} \left(I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2}(A - \lambda I)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda I)^{n-1} \right) \vec{v} \quad (3.17)$$

En particular, tenim,

Proposició 4 Si $\vec{v}$ és vector propi de A amb valor propi λ , llavors $\vec{v}$ també és vector propi de e^A amb valor propi e^λ .

Es dedueix de la proposició anterior, amb $t = 1$.

3.5 Sistema homogeni a coeficients constants

Estudiem el cas en que la matriu del sistema homogeni

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad (3.18)$$

te coeficients constants, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Pels resultats que hem vist en la secció anterior, podem afirmar el següent:

- L'equació 3.14 garanteix que la matriu e^{At} és una matriu de solucions de l'Eq. 3.18.
- Com el determinant $\det e^{At} \neq 0$, les columnes de matriu de solucions són linealment independents $\forall t \in \mathbb{R}$. Per tant, e^{At} és una *matriu fonamental principal de solucions*.
- Si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'Eq. 3.18, existeix una matriu regular i constant C tal que $e^{At} = X(t)C$.

Fixades unes condicions inicials en $t = t_0$, tindrem $e^{At_0} = X(t_0)C$, d'on $C = X^{-1}(t_0)e^{At_0}$.

Podem doncs concloure,

Teorema 8 Tota matriu fonamental de solucions $X(t)$ del sistema homogeni, Eq. 3.18, és de la forma

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$$

3.5.1 Solució del sistema

Ara només queda saber com escriure la matriu fonamental e^{At} sense haver de recórrer a la sèrie infinita que la defineix. Per això només cal trobar n vectors linealment independents $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que proporcionin les n solucions linealment independents de l'Eq. 3.18, en la forma $e^{At}\vec{v}$. Aquests vectors els proporciona el teorema de descomposició primària d'endomorfismes, que el podem recordar tot enunciant-lo pel polinomi mínim associat a la matriu A .

Teorema 9 *Sigui $p_A(\lambda) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ ($\sum_{i=1}^k n_i \operatorname{gr}(p_i) = n$) la descomposició factorial del polinomi característic de la matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, i $m_A(\lambda) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ la del polinomi mínim. Aleshores, l'espai vectorial E es descomposa en suma directa dels següents subespais invariants,*

$$E = \ker p_1^{m_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{m_k}(f)$$

amb $\dim \ker p^{m_i} = \dim \ker p^{n_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$.

Vegem com són les solucions en termes de les arrels del polinomi característic.

3.5.2 Arrels reals simples

Sigui λ_j una arrel real simple de $p_A(\lambda)$, és a dir, un valor propi de A . Si $\vec{v}$ és el seu vector propi, es complirà

$$(A - \lambda_j I)\vec{v} = \vec{0}$$

aleshores, tenint en compte l'Eq. 3.17, tindrem una solució del sistema Eq. 3.18 en la forma

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{\lambda_j t}\vec{v} \quad (3.19)$$

Exemple 33 *Resoldre el PVI*

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solució.

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 6)$$

Per tant, les arrels del polinomi característic són $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$. Ara busquem els vectors propis. Per a $\lambda_1 = -1$, hem de resoldre

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 4x$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ara, per a $\lambda_2 = -6$, resollem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x = -y$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solució general d'aquest sistema homogeni és, doncs,

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular les constants, a fi de satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $c_1 = \frac{3}{5}$, $c_2 = -\frac{2}{5}$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-6t} \\ \frac{12}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

✓

3.5.3 Arrels complexes simples

De manera semblant a l'Exemple 7 de la secció *Descomposició primària* dels apunts d'àlgebra lineal *Polinomis de matrius i descomposició primària*, si $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$ són arrels complexes simples del polinomi característic amb vectors propis respectius $\vec{a} \pm i\vec{b}$, aleshores, les dues solucions reals són les parts real i imaginària de

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a} + i\vec{b}) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(\vec{a} + i\vec{b})$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t \vec{a} - \sin \beta t \vec{b}) \\ \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t}(\sin \beta t \vec{a} + \cos \beta t \vec{b}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.5.4 Arrels múltiples

Multiplicitats algebraica i geomètrica iguals

Si λ_j és una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat m , i existeixen m vectors propis linealment independents, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ associats a aquest valor propi, llavors les m solucions independents de l'Eq. 3.18 s'obtenen de la mateixa manera que en l'Eq. 3.19, una per a cada vector propi:

$$\vec{x}_i(t) = e^{At}\vec{v}_i = e^{\lambda_j t}\vec{v}_i; \quad i = 1, \dots, m$$

Si l'arrel és complexa, es fa el mateix amb les solucions de l'Eq. 3.20.

Multiplicitats algebraica i geomètrica diferents

Segui λ_j una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat n_j , i suposem que existeixen menys de n_j vectors propis linealment independents. Llavors, pel teorema de descomposició primària d'endomorfismes, sabem que $\dim \ker(A - \lambda_j I)^{m_j} = n_j$, on m_j és la potència del factor d'aquesta arrel en el polinomi mínim $m_A(\lambda)$. Llavors existeixen n_j vectors linealment independents $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}$ que compleixen

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} \vec{v}_i = \vec{0}; \quad i = 1, \dots, n_j$$

Per tant, d'acord amb l'Eq. 3.17, les n_j solucions independents seran de la següent forma. Si, $\vec{v} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$,

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} = e^{\lambda_j t} \left(\vec{w}_0 + t \vec{w}_1 + \frac{t^2}{2} \vec{w}_2 + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \vec{w}_{m_j-1} \right) \quad (3.21)$$

amb

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I)^k \vec{v}; \quad k = 0, \dots, m_j - 1$$

Si l'arrel és complexa, cal donar separatament una solució per la part real i la part imaginària de l'Eq. 3.21, com s'ha fet en l'Eq. 3.20.

Existeix una relació de recurrència entre els vectors $\vec{w}_k$ anteriors, que és útil a l'hora de simplificar els càlculs:

Proposició 5 *Considerem la solució de l'Eq. 3.21 associada a un vector $\vec{v} = \vec{w}_0 \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$. Llavors, els següents vectors de la sèrie verifiquen*

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I) \vec{w}_{k-1} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j-k}; \quad k = 1, \dots, m_j - 1 \quad (3.22)$$

Observació. Com que entre els n_j vectors del $\ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$ ja s'hi troba, com a mínim, un vector de cada $\ker(A - \lambda_j I)^k$, amb $1 \leq k \leq m_j$, podem formar una primera família de solucions amb el màxim nombre de vectors linealment independents del $\ker(A - \lambda_j I)$. Després, per a buscar vectors del $\ker(A - \lambda_j I)^2$ ho farem a partir dels anteriors, tot aplicant la llei de recurrència de l'Eq. 3.22. És a dir, si $\vec{v}_1 \in \ker(A - \lambda_j I)$, un vector $\vec{v}_2 \in \ker(A - \lambda_j I)^2$ el trobarem resolent el sistema

$$(A - \lambda_j I) \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \quad (3.23)$$

i així successivament, fins a completar els n_j vectors desitjats. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 34 *Resoldre el PVI*

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució.

Busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

Per tant, l'arrel del polinomi característic és $\lambda = 5$, doble. Ara busquem un vector propi per a aquest valor.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = -2x$. Per tant, un vector propi serà $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De moment, una solució particular del sistema homogeni serà

$$\vec{x}_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Evidentment, $\dim \ker(A - 5I) = 1$. Com la matriu del sistema no diagonalitza, haurem de trobar l'altra solució particular a partir d'un vector linealment independent de l'anterior, que sigui del $\ker(A - 5I)^2$. Aquest vector, $\vec{v}_2$, d'acord amb l'Eq. 3.23, el trobarem resolent $(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 1 - 2x$. Fent $x = 0$ tenim $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així, l'altra solució particular serà

$$\vec{x}_2(t) = e^{5t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

Finalment, la solució general del sistema homogeni és $\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t)$, que, en forma de matriu fonamental de solucions, s'escriu com

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular les constants per a satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $c_1 = 2, c_2 = -1$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 2 - t \\ -5 + 2t \end{pmatrix}$$

✓

3.6 Sistemes no homogenis

Com en el cas d'equacions no homogènies d'ordre n , veurem el mètode de variació de les constants per a sistemes d'equacions lineals. Aquest procediment permet trobar una solució particular del sistema complet a partir de la solució general del sistema homogeni, encara que la matriu del sistema no tingui coeficients constants.

Suposem que $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'Eq. 3.18, i assagem una solució de l'Eq. 3.2 en la forma

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \vec{c}(t) \quad (3.24)$$

Substituïnt aquesta solució proposada en l'Eq. 3.2, veurem com ha de ser la funció vectorial $\vec{c}(t)$:

$$X'(t)\vec{c}(t) + X(t)\vec{c}'(t) = A(t)X(t)\vec{c}(t) + \vec{b}(t)$$

Però com que la matriu fonamental de solucions del sistema homogeni compleix

$$X'(t)\vec{c}(t) = A(t)X(t)\vec{c}(t)$$

ens queda

$$X(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)$$

Resolent aquest sistema per a $\vec{c}'(t)$, i integrant, haurem obtingut la solució particular buscada. En efecte, com $\det X(t) \neq 0$, podem invertir el sistema,

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t)\vec{b}(t); \quad \vec{c}(t) = \int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt$$

Per tant, una solució particular serà

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt \quad (3.25)$$

Finalment, podem escriure la solució general del sistema complet tot afegint-hi la solució general del sistema homogeni:

$$\vec{x}(t) = X(t) \left(\int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt + \vec{c} \right), \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

Exemple 35 Trobar la solució general del sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{2t} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solució. El sistema homogeni ja havia estat estudiat en l'exemple 33. La matriu fonamental de solucions era

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix}$$

La seva inversa és

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució particular $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{c}(t)$ satisfarà

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t)\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -5e^{8t} \end{pmatrix}$$

Ara integrem cada component,

$$\int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \int e^{3t} dt \\ \int -5e^{8t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix}$$

I ja podem escriure la solució particular,

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

Finalment, la solució general del sistema complet és

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

Observem que també hauríem pogut provar el mètode dels coeficients indeterminats amb una solució particular de la forma $e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. ✓

En el mètode dels coeficients indeterminats per a sistemes d'equacions, la solució que es conjectura segueix bàsicament els mateixos criteris que per a equacions escalars, especialment quan el tipus de solució proposada no pot ser una solució del sistema homogeni. En cas contrari, cal tenir en compte que la independència de la solució proposada respecte de les solucions de l'homogènia recau més en el caràcter vectorial de les constants, que no pas en el tipus de funcions que es proposen. Per exemple, el sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

admet $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a solucions de la part homogènia. Podem proposar una solució particular, que no sigui solució del sistema homogeni, del tipus $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ i obtenir, per coeficients indeterminats, $a = -1$. Com que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ no és vector propi associat al valor propi 1, la solució particular $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, tot i contenir l'exponencial e^t , no satisfà l'equació homogènia, sinó que satisfà la completa.

A part dels mètodes vistos, hi ha maneres alternatives de resoldre equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals, com per exemple, aplicar la transformada de Laplace.