Transformada de Laplace i equacions diferencials

Rafael Cubarsi

Àlgebra Lineal i Equacions Diferencials

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Calalunya

http://www-ma4.upc.edu/~rcubarsi

Departament de **Matemàtica Aplicada IV**

Índex

1 Introducció

La transformació de Laplace és un mètode alternatiu per a la resolució de problemes de valor inicial d'equacions diferencials lineals a coeficients constants. És especialment útil quan, per un sistema regit per aquestes equacions, es vol relacionar la resposta del sistema a un estímul extern amb la seva pròpia resposta natural (associada a la part homogènia de l'equació). En particular, quan es té determinat el comportament del sistema envers un *impuls* inicial, es pot avaluar la resposta davant de qualsevol altre estímul aplicat (donat pel terme no homogeni de l'equació) mitjançant la *integral de convolució*.

Així mateix, la transformada de Laplace també permet calcular de manera molt eficient, més que emprant els mètodes habituals ja estudiats, la resposta d'un sistema davant de certes excitacions discontínues. Per exemple, problemes d'impulsos i variacions de quantitat de moviment en mecànica, o problemes d'interruptors en circuïts elèctrics. Altres aplicacions més avançades de la transformació de Laplace es troben exemplificades en xarxes de circuïts connectats entre si, o amb induccions mútues, on la resposta d'un d'ells actua com a estímul extern d'un altre.

Originalment, Laplace (1749-1827) va ser el primer en fer ús de la transformada integral –que ara porta el seu nom– en els seus treballs sobre mecànica celest. Va ser, però, Heaviside (1850-1925) qui posteriorment realitzà el seu desenvolupament.

La transformada de Laplace no té una interpretació física immediata, com és el cas de la transformada de Fourier, que es pot relacionar, per exemple, amb l'espectre o el patró de difracció de fenòmens de naturalesa ondulatòria.

És una transformació lineal que permet transformar una equació diferencial,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

juntament amb unes condicions inicials adequades, per exemple, $y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$, en una equació algebraica de la forma

$$(a_n s^n + ... + a_1 s + a_0)\, Y(s) = F(s)$$

S'ha d'efectuar, doncs, una transformació, i posteriorment la inversió de la transformació.

La transformada de Laplace també es pot aplicar a un sistema de vàries equacions diferencials lineals simultànies per a transformar-lo en un sistema lineal de vàries equacions algebraiques simultànies. En altres casos, el mètode es pot utilitzar per a resoldre una equació diferencial lineal amb coeficients no constants per a transformar-la en una de menor ordre, eventualment de més fàcil resolució. Quan s'aplica a equacions diferencials en derivades parcials, les converteix en equacions diferencials ordinàries.

A continuació veurem les definicions i propietats bàsiques que permetran resoldre els problemes més elementals que s'han comentat.

2 Transformació de Laplace

Comencem definint formalment la transformada de Laplace.

Definició 1 *Sigui f una funció real definida per a $0 \leq t < \infty$, la* transformada de Laplace *de $f(t)$, que designarem per $\mathscr{L}\{f(t)\}$ o per $F(s)$, és la funció de la variable real s*

$$F(s) \equiv \mathscr{L}\{f(t)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

on

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt$$

En realitat, per a ser rigorosos, el límit inferior de la integral s'hauria d'avaluar en 0^+, és a dir, en un valor positiu $|h|$, quan $h \to 0$, però en la pràctica i en el que segueix, ho escriurem simplement com a 0.

Exemple 1 *Obtenir la transformada de Laplace de la funció $f(t) = 1$.*

Solució. A partir de l'equació (1)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1 - e^{-sA}}{s} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{s} & , \quad s > 0 \\ \infty & , \quad s \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

✓

Exemple 2 *Obtenir la transformada de Laplace de la funció $f(t) = e^{\alpha t}$.*

Solució. De l'equació (1)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} e^{\alpha t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{(\alpha - s)A} - 1}{\alpha - s} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{s - \alpha} & , \quad s > \alpha \\ \infty & , \quad s \leq \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

✓

Exemple 3 *Obtenir la transformada de Laplace de la funció $f(t) = \cos \omega t$, $g(t) = \sin \omega t$.*

Solució. De l'equació (1) es té

$$\mathscr{L}\{\cos \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t\, dt \qquad \text{i} \qquad \mathscr{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t\, dt$$

Observem, a més, que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos\omega t\} + i\mathscr{L}\{\sin\omega t\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{(i\omega-s)t}\,dt \\ &= \lim_{A\to\infty}\frac{e^{(i\omega-s)A}-1}{i\omega-s} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{s-i\omega} = \dfrac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} & , \quad s>0 \\ \\ \text{no definit} & , \quad s\le 0 \end{cases}\end{aligned}$$

En igualar les parts reals i imaginàries d'aquesta equació es té

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad , \quad \mathscr{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad , \quad s>0$$

✓

L'equació (1) associa a cada funció $f(t)$ amb una nova funció $F(s)$. Tal i com suggereix la notació $\mathscr{L}\{f(t)\}$, la transformada de Laplace és un operador que actua sobre funcions. A més, es tracta d'un operador lineal:

Propietat 1 (Linealitat) $\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}$.

Demostració. Per definició,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\big(af(t)+bg(t)\big)\,dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \\ &= a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

□

2.1 Funcions admissibles

Una dificultat a tenir en compte de la Definició 1 és que la integral podria no existir per a algun valor de s. Això succeeix per exemple en el cas de $f(t) = e^{t^2}$. Per a garantir que la transformada de Laplace de $f(t)$ existeixi almenys en un interval $s > s_0$, s'exigeixen a $f(t)$ les següents condicions:

a) La funció $f(t)$ és contínua per seccions. Això significa que $f(t)$ té com a molt un número finit de discontinuïtats en tot interval $0 \le t \le t_0$, i tant el límit per l'esquerra com per la dreta de f existeixen en tots els punts de discontinuïtat. Dit d'altra manera, $f(t)$ té tan sols un número finit de discontinuïtats "de salt" en tot interval finit. En la Figura 1 es representa la gràfica d'una típica funció contínua per seccions, o contínua a trossos.

b) La funció $f(t)$ és d'ordre exponencial, és a dir que existeixen constants M i γ tals que

$$|f(t)| \le Me^{\gamma t}, \qquad 0 \le t < \infty$$

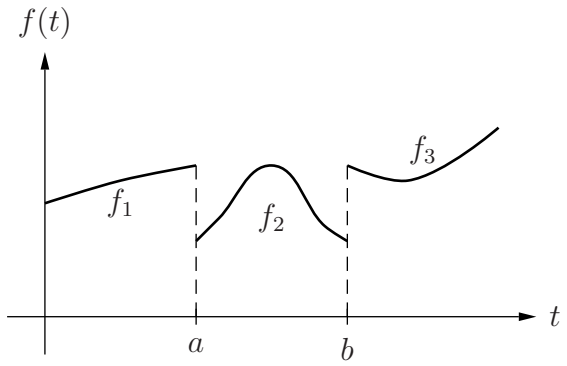

Figura 1: Gràfica d'una funció contínua per seccions.

Lema 1 *Sigui $f(t)$ una funció contínua per seccions i d'ordre exponencial, llavors la seva transformada de Laplace existeix per a tot s suficientment gran. En particular, si $f(t)$ és contínua per seccions i $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, llavors $F(s)$ existeix per a $s > \gamma$.*

Les funcions que compleixen això s'anomenen "funcions admissibles". La demostració del Lema 1 es farà amb l'ajuda del següent lema del càlcul integral, que s'anuncia a continuació però no es demostra.

Lema 2 *Sigui $g(t)$ una funció contínua per seccions. Llavors la integral impròpia $\int_0^\infty g(t)\,dt$ existeix si $\int_0^\infty |g(t)|\,dt$ existeix. Per a demostrar que aquesta última integral existeix, només cal provar que hi ha una constant K tal que*

$$\int_0^A |g(t)|\,dt \leq K$$

per a tot A.

Demostració (Lema 1). Ja que $f(t)$ és contínua per seccions, llavors la integral $\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt$ existeix per a tot A. Per tal de demostrar que la integral té un límit per a tot s suficientment gran, observem que

$$\begin{aligned} \int_0^A \left|e^{-st} f(t)\right| \, dt &\leq M \int_0^A e^{-st} e^{\gamma t}\,dt \\ &= \frac{M}{\gamma - s}\left(e^{(\gamma - s)A} - 1\right) \leq \frac{M}{s - \gamma} \end{aligned}$$

per a $s > \gamma$. Llavors, basant-nos en el Lema 2, es té que la transformada de Laplace de $f(t)$ existeix per a $s > \gamma$. Així doncs, a partir d'ara suposarem que $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$ i $s > \gamma$. □

3 Aplicació a les equacions diferencials

La utilitat real de la transformada de Laplace per a resoldre equacions diferencials recau en el fet que la transformada de Laplace de $f'(t)$ està molt relacionada amb la transformada de $f(t)$. Aquest és el contingut del següent lema.

Lema 3 (Derivació) *Sigui* $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. *Llavors*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{2}$$

Demostració. Només cal escriure la fórmula per a la transformada de Laplace de $f'(t)$, i integrar per parts. Així es té

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to\infty} e^{-st} f(t)\Big|_0^A + \lim_{A\to\infty} s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt \\
&= -f(0) + \lim_{A\to\infty} s\int_0^A e^{-st} f(t)\,dt \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

□

El següent pas es trobar una relació entre la transformada de Laplace de $f''(t)$ i la de $f'(t)$, cosa que no és més que una conseqüència del Lema 3.

Corol·lari 1 *Sigui* $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. *Llavors*

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3}$$

Demostració. Aplicant dues vegades el Lema 3 trobem que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''(t)\} &= s\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s\big(sF(s) - f(0)\big) - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

□

3.1 Equació diferencial lineal

Arribat aquest punt, ja tenim els elements necessaris per a passar a resoldre un problema de valor inicial

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t), \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0' \tag{4}$$

a partir de resoldre una equació algebraica. Siguin $Y(s)$ i $F(s)$ les transformades de Laplace de $y(t)$ i $f(t)$ respectivament. Aplicant l'operador de transformació a ambdós costats de l'equació diferencial s'obté

$$\mathscr{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} = F(s)$$

Tenint en compte la linealitat de l'operador de transformació s'obté

$$\mathscr{L}\left\{ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right\}=a\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\}+b\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\}+c\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$$

i d'acord amb el Lema 3 i el Corol·lari 1, es té que

$$\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\}=sY(s)-y_0 \quad , \quad \mathscr{L}\left\{y''(t)\right\}=s^2Y(s)-sy_0-y_0'$$

Per tant,

$$a\left(s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right)+b(sY(s)-y_0)+cY(s)=F(s)$$

Aquesta *equació algebraica* implica que

$$Y(s)=\frac{(as+b)y_0}{as^2+bs+c}+\frac{ay_0'}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c} \tag{5}$$

L'equació (5) descriu la transformada de Laplace de la solució $y(t)$ del problema de valors inicials (4). Per a avaluar $y(t)$ és necessari consultar les taules d'antitransformades de Laplace. Ara bé, així com $Y(s)$ s'expressa explícitament en termes de $y(t)$, és a dir $Y(s)=\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt$, també seria possible donar una fórmula explícita per a $y(t)$. No obstant això, aquesta fórmula, que s'escriu simbòlicament com $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$, implica una integració respecte d'una variable complexa, cosa que va més enllà del tema tractat en aquests apunts. Per això, en lloc d'aplicar la fórmula, es deduiran en la següent secció algunes propietats funcionals de l'operador transformada de Laplace. Les propietats permetran invertir per simple inspecció moltes transformades de Laplace, és a dir, permetran reconèixer de quines funcions són transformades. És comú referir-s'hi com a *transformada inversa* o *antitransformada*.

Exemple 4 *Resoldre el problema de valor inicial*

$$y''-3y'+2y=e^{3t}, \qquad y(0)=1, \qquad y'(0)=0$$

Solució. Sigui $Y(s)=\mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$. Aplicant la transformada de Laplace a ambdós membres de l'equació diferencial s'obté

$$s^2Y(s)-s-3\big(sY(s)-1\big)+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

i això implica que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-3)\left(s^2-3s+2\right)}+\frac{s-3}{s^2-3s+2} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}+\frac{s-3}{(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

Per a trobar $y(t)$, es desenvolupa en fraccions simples cada un dels termes del segon membre, i s'obté

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}$$

Això implica que

$$A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-1)(s-2)=1$$

En fer $s = 1$ s'obté $A = \frac{1}{2}$, fent $s = 2$ s'obté $B = -1$, i amb $s = 3$ s'obté $C = \frac{1}{2}$. Per tant,

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}$$

De manera similar,

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

i d'aquí

$$D(s-2) + E(s-1) = s - 3$$

Ara, fent $s = 1$ s'obté $D = 2$, mentre que amb $s = 2$ s'obté $E = -1$. Per tant,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \\ &= \frac{5}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} \end{aligned}$$

El primer terme és la transformada de Laplace de $\frac{5}{2}e^t$. De manera similar, el segon i el tercer terme són les transformades de $-2e^{2t}$ i $\frac{1}{2}e^{3t}$, respectivament. Conseqüentment,

$$Y(s) = \mathscr{L}\left\{\frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

✓

Observació. En realitat existeix una infinitat de funcions amb idèntica transformada de Laplace . Per exemple, la transformada de Laplace de les funcions

$$z(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \text{si} \quad t \neq 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si} \quad t = 1, 2, 3 \end{cases}$$

és també $Y(s)$, ja que $z(t)$ difereix de $y(t)$ tan sols en tres punts[1]. No obstant, només hi ha una funció *contínua* $y(t)$ que té per transformada de Laplace una funció donada $Y(s)$, i és en aquest sentit que s'escriu $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

3.2 Sistemes d'equacions

La transformada de Laplace també és útil per a resoldre sistemes d'equacions diferencials lineals a coeficients constants. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 5 *Resoldre el següent problema de valor inicial no homogeni.*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) + 2 \\ \\ x_2'(t) = -6x_1(t) - t \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1 \tag{6}$$

[1]Si $f(t) = g(t)$, excepte en un número finit de punts, llavors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$

Solució.

Notem $X_1(s) = \mathscr{L}\{x_1(t)\}, X_2(s) = \mathscr{L}\{x_2(t)\}$. Aplicant la transformada de Laplace a ambdós membres de les dues equacions diferencials s'obté

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = 3X_1(s) - 3X_2(s) + \frac{2}{s} \\ \\ sX_2(s) - x_2(0) = -6X_1(s) - \frac{1}{s^2} \end{cases} \tag{7}$$

Substituïnt les condicions inicials i simplificant, tenim

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s) + 3X_2(s) = \frac{2}{s} + 1 = \frac{s+2}{s} \\ \\ 6X_1(s) + sX_2(s) = -\frac{1}{s^2} - 1 = -\frac{s^2+1}{s^2} \end{cases} \tag{8}$$

Ara cal de resoldre el sistema d'equacions, és a dir, aïllar $X_1(s), X_2(s)$, i buscar les transformades inverses.

Per exemple, multipliquem la primera equació per s, la segona per -3 i sumem. Això dóna

$$(s^2 - 3s - 18)X_1(s) = 2 + s + \frac{3s^2+3}{s^2}$$

d'on

$$X_1(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)}$$

Desenvolupant en fraccions simples, queda

$$X_1(s) = \frac{1}{108}\left(\frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2}\right)$$

Antitransformant, obtenim la primera solució,

$$x_1(t) = \frac{1}{108}(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t)$$

De manera semblant, per a calcular la segona solució podríem tornar enrera, eliminar X_1 i trobar la transformada X_2. Ara bé, en aquest cas és més ràpid usar la segona de les equacions diferencials, on no apareix el terme en $x_2(t)$, i integrar directament,

$$x_2(t) = \int (-6x_1(t) - t)\, dt$$

Per tant, substituint-hi la primera solució tindrem

$$x_2(t) = -\frac{1}{18}\int (133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3)dt = -\frac{1}{108}(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t) + c$$

Ara, apliquem la segona condició inicial per a calcular la constant d'integració c,

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + c, \quad c = \frac{3}{4}$$

La segona solució és, doncs,

$$x_2(t) = -\frac{1}{108}(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81)$$

✓

4 Càlcul de transformades

En aquesta secció s'obtindran algunes propietats importants de les transformades de Laplace. Utilitzant aquestes propietats serà possible calcular la transformada de la majoria de les funcions sense haver de realitzar integracions pesades. A més, es podran invertir moltes transformades per simple inspecció.

Propietat 2 (Multiplicació per t) *Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, llavors*

$$\mathscr{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s) \tag{9}$$

Demostració. Per definició, $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,dt$. En derivar ambdós costats de l'equació respecte de s, s'obté

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st}\right)f(t)\,dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,dt \\ &= \mathscr{L}\{-tf(t)\}\end{aligned}$$

□

La Propietat 2 estableix que la transformada de Laplace de la funció $-tf(t)$ és la derivada de la transformada de Laplace de $f(t)$. Així doncs, si es coneix la transformada $F(s)$ de $f(t)$, llavors ja no és necessari realitzar una integració pesada per a trobar la transformada de $tf(t)$.

Exemple 6 *Obtenir la transformada de Laplace de te^t.*

Solució. La transformada de e^t és $\dfrac{1}{s-1}$. Per tant, per la Propietat 2, la transformada de Laplace de te^t és

$$\mathscr{L}\left\{te^t\right\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

✓

Exemple 7 *Obtenir la transformada de Laplace de t^n.*

Solució. Utilitzant n vegades consecutives la Propietat 2 s'obté

$$\mathscr{L}\{t^n\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{1\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

✓

La utilitat principal de la Propietat 2 és invertir transformades, com es mostra en els següents exemples.

Exemple 8 *Quina funció té per transformada de Laplace $\dfrac{-1}{(s-2)^2}$?*

Solució. Primerament observem que

$$-\frac{1}{(s-2)^2} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s-2} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{s-2} = \mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\}$$

Per tant, per la Propietat 2 es té que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -te^{2t}$$

✓

Exemple 9 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{-4s}{\left(s^2+4\right)^2}$*?*

Solució. Observem que

$$-\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2} = \frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} \qquad \text{i} \qquad \frac{2}{s^2+4} = \mathscr{L}\left\{\sin 2t\right\}$$

Per tant, per la Propietat 2 es té que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\} = -t\sin 2t$$

✓

Exemple 10 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{1}{(s-4)^3}$*?*

Solució. Podem reconèixer fàcilment que

$$\frac{1}{(s-4)^3} = \frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{2}\frac{1}{s-4}$$

Per tant, aplicant la Propietat 2 dues vegades trobem que

$$\frac{1}{(s-4)^3} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}t^2e^{4t}\right\}$$

✓

Propietat 3 (Multiplicació per $e^{\alpha t}$) *Si* $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$*, llavors*

$$\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}f(t)\right\} = F(s-\alpha) \tag{10}$$

Demostració. Per definició

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}f(t)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}f(t)\,dt \equiv F(s-\alpha)\end{aligned}$$

□

La Propietat 3 estableix que la transformada de Laplace de $e^{\alpha t}f(t)$ avaluada en el punt s és igual a la transformada de $f(t)$ en el punt $(s-\alpha)$. D'aquesta manera, si es coneix la transformada $F(s)$ de $f(t)$, llavors no és necessari calcular la integral per a trobar la transformada de Laplace de $e^{\alpha t}f(t)$, només cal substituir s per $s-\alpha$ en $F(s)$.

Exemple 11 *Determinar la transformada de Laplace de la funció* $e^{3t}\sin t$.

Solució. La transformada de $\sin t$ és $1/(s^2+1)$. Per tant, per a obtenir la transformada de Laplace de $e^{3t}\sin t$, només cal substituir s per $s-3$, és a dir

$$\mathscr{L}\left\{e^{3t}\sin t\right\} = \frac{1}{(s-3)^2+1}$$

✓

La utilitat real de la Propietat 3 es veu clarament en invertir les transformades de Laplace, tal i com ho mostren els següents exemples.

Exemple 12 *Quina funció* $g(t)$ *té la següent transformada de Laplace ?*

$$G(s) = \frac{s-7}{25+(s-7)^2}$$

Solució. Observem que

$$F(s) = \frac{s}{s^2+5^2} = \mathscr{L}\left\{\cos 5t\right\}$$

i que $G(s)$ s'obté de $F(s)$ quan substituim s per $s-7$. Per tant, per la Propietat 3,

$$\frac{s-7}{(s-7)^2+25} = \mathscr{L}\left\{e^{7t}\cos 5t\right\}$$

✓

Exemple 13 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{1}{s^2-4s+9}$*?*

Solució. Una manera de resoldre el problema és desenvolupar $1/(s^2-4s+9)$ en fraccions simples. Però una manera molt millor de resoldre'l és completant s^2-4s+9 en quadrats perfectes, de manera que

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{s^2-4s+4+(9-4)} = \frac{1}{(s-2)^2+5}$$

També tenim que

$$\frac{1}{s^2+5} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\right\}$$

Per tant, per la Propietat 3 tenim que

$$\frac{1}{s^2-4s+9} = \frac{1}{(s-2)^2+5} = \mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin\sqrt{5}t\right\}$$

✓

Exemple 14 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{s}{s^2-4s+9}$*?*

Solució. Observem que

$$\frac{s}{s^2-4s+9} = \frac{s-2}{(s-2)^2+5} + \frac{2}{(s-2)^2+5}$$

La funció $s/(s^2+5)$ és la transformada de Laplace de $\cos\sqrt{5}t$. Per tant, per la Propietat 3 es té que

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+5} = \mathscr{L}\left\{e^{2t}\cos\sqrt{5}t\right\}$$

i

$$\frac{s}{s^2-4s+9} = \mathscr{L}\left\{e^{2t}\cos\sqrt{5}t + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin\sqrt{5}t\right\}$$

✓

Com hem vist anteriorment, la transformada de Laplace és un operador lineal, és a dir, $\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$. Llavors, si es coneixen les transformades $F_1(s)$ i $F_2(s)$ no és necessari realitzar cap integració per tal de trobar la transformada de Laplace d'una combinació lineal de $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Per exemple, dues funcions que es presenten amb molta freqüència en l'estudi d'equacions diferencials són el cosinus i el sinus hiperbòlics. Aquestes funcions es defineixen per les equacions

$$\cosh\alpha t = \frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \quad , \quad \sinh\alpha t = \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}$$

Per tant, segons la linealitat de la transformada de Laplace, resulta que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cosh\alpha t\} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sinh\alpha t\} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha}-\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\end{aligned}$$

4.1 Propietats addicionals

En aquesta secció veurem algunes propietats més de la transformada de Laplace que resulten útils a l'hora de resoldre alguns problemes.

Propietat 4 (Integració) *Sigui* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$*, llavors*

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{11}$$

Demostració. Fent $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$ es té $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$, i per tant, utilitzant la propietat de derivació de la transformada de Laplace , es té

$$F(s) = \mathscr{L}\{g'(t)\} = s\mathscr{L}\{g(t)\} = s\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}$$

□

Propietat 5 (Divisió per t) *Si $\frac{f(t)}{t}$ és admissible, per la qual cosa només és necessari que existeixi el $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$, llavors*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du \tag{12}$$

Demostració. Fent $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, $f(t) = tg(t)$ i utilitzant la Propietat 2 s'obté que

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)\,du &= \lim_{A\to\infty}\int_s^A F(u)\,du \\ &= \lim_{A\to\infty}\int_s^A -\frac{d}{du}G(u)\,du \\ &= \lim_{A\to\infty}\big(G(s) - G(A)\big) = G(s) = \mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\end{aligned}$$

□

Observació. Aquí s'ha utilitzat el fet, que té interès per si mateix, que si una funció $f(t)$ és admissible, la seva transformada de Laplace satisfà

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \tag{13}$$

que és conseqüència immediata de l'acotació $|F(s)| \le \frac{M}{s-\gamma}$, vista anteriorment en el Lema 1.

Propietat 6 (Canvi d'escala) *Sigui $a > 0$, llavors*

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{14}$$

Demostració. Fent $a\,t = u$ tenim

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}f(u)\frac{ds}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

□

Propietat 7 (Funcions periòdiques) *Si* $f(t+T) = f(t)$, *llavors*

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sT}} \tag{15}$$

Demostració. Veiem que

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

i fent $t = T + u$ en l'última integral tenim

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-s(T+u)} f(T+u)\, du \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

d'on sobté

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sT}}$$

□

La Taula 1 mostra les anteriors propietats de la transformada de Laplace .

Taula 1: Propietats de la transformació de Laplace

1.	Linealitat	$\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\} + b\mathscr{L}\{g(t)\}$
2.	Derivació	$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$ $\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
3.	Multiplicació per t	$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{d}{ds}F(s)$
4.	Multiplicació per $e^{\alpha t}$	$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}f(t)\} = F(s-\alpha)$
5.	Integració	$\mathscr{L}\left\{\displaystyle\int_0^t f(u)\,du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6.	Divisió per t	$\mathscr{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^\infty F(u)\,du$
7.	Canvi d'escala	$\mathscr{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
8.	Funcions periòdiques	$f(t+T) = f(t)$ $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$

5 Equacions diferencials de terme no homogeni discontinu

En moltes aplicacions el segon membre de la equació diferencial $ay'' + by' + cy = f(t)$ té una o més discontinuïtats de salt. Per exemple, una partícula pot trobar-se en moviment sota la influència d'una força $f_1(t)$ i, de cop, en un temps t_1, patir els efectes d'una força addicional $f_2(t)$. En la secció actual es descriurà com tractar aquest tipus de problemes mitjançant la transformada de Laplace. Per començar, obtindrem les transformades de Laplace d'algunes funcions discontínues senzilles.

5.1 Funció de Heaviside

L'exemple més senzill d'una funció amb una sola discontinuïtat de salt és la funció

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t < c \\ 1 & , \quad t \ge c \end{cases} \tag{16}$$

Aquesta funció $H_c(t)$, de la qual es motra la gràfica en la Figura 2, es coneix amb el nom de *funció esglaó* o *funció de Heaviside*. De vegades també apareix sota les notacions $H(t-c)$ o $u(t-c)$, aquesta darrera derivada del mot anglès "up" per a descriure un salt ascendent. La seva transformada de Laplace és

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{H_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_c^A e^{st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{-cs} - e^{-sA}}{s} \\ &= \frac{e^{-cs}}{s} \quad , \quad s > 0 \end{aligned}$$

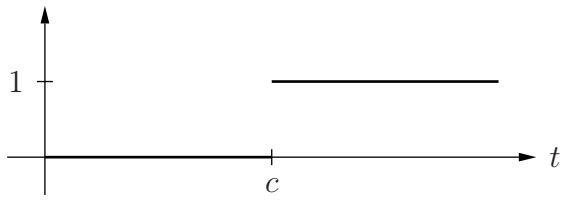

Figura 2: Gràfica de $H_c(t)$

Considerem ara una funció f definida en l'interval $0 \le t < \infty$, i sigui g la funció que s'obté de f en traslladar la gràfica de f c unitats cap a la dreta, tal i com mostra la Figura 3. Dit amb més precisió, $g(t) = 0$ per a $0 \le t < c$, i $g(t) = f(t-c)$ per a $t \ge c$. Una expressió analítica adequada per a $g(t)$ és

$$g(t) = H_c(t) f(t-c)$$

El factor $H_c(t)$ fa g igual a zero per a $0 \le t < c$, i en canviar l'argument t de f per $t-c$, f es desplaça c unitats cap a la dreta. Ja que $g(t)$ s'obté a partir de f de manera senzilla,

caldria esperar que la seva transformada de Laplace es pogués obtenir de manera senzilla a partir de la transformada de $f(t)$. A continuació es demostrarà que, efectivament, això succeeix.

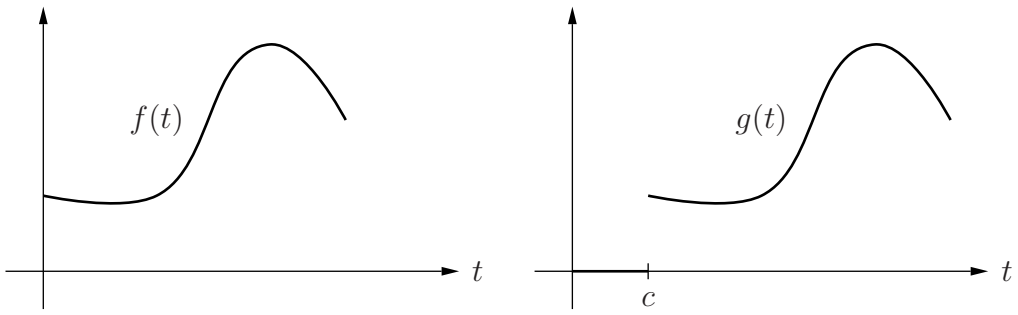

Figura 3: $f(t)$ i $g(t) = H_c(t)f(t-c)$.

Propietat 8 *Sigui* $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. *Llavors*

$$\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s) \tag{17}$$

Demostració. Per definició,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^\infty e^{-st}H_c(t)f(t-c)\,dt \\ &= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt\end{aligned}$$

Per a resoldre la integral convé fer el canvi $\xi = t - c$.

Llavors

$$\begin{aligned}\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt &= \int_0^\infty e^{-s(\xi+c)}f(\xi)\,d\xi \\ &= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi \\ &= e^{-cs}F(s)\end{aligned}$$

Per tant, $\mathscr{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathscr{L}\{f(t)\}$. □

Exemple 15 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{e^{-s}}{s^2}$ *?*

Solució. Sabem que $1/s^2$ és la transformada de la funció t, de manera que per la Propietat 8 resulta

$$\frac{e^{-s}}{s^2} = \mathscr{L}\{H_1(t)(t-1)\}$$

La Figura 4 mostra la gràfica de $H_1(t)(t-1)$. ✓

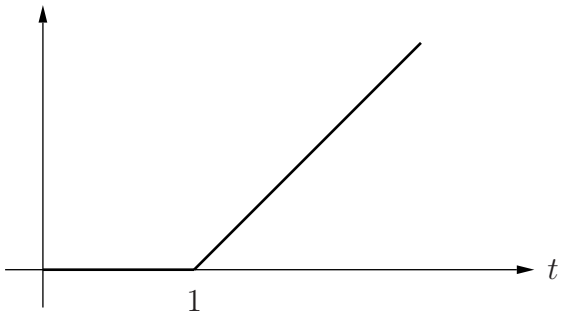

Figura 4: Gràfica de $H_1(t)(t-1)$.

Exemple 16 *Quina funció té per transformada de Laplace* $\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}$ *?*

Solució. Observem que

$$\frac{1}{s^2-2s-3}=\frac{1}{s^2-2s+1-4}=\frac{1}{(s-1)^2-2^2}$$

Ja que $1/(s^2-2^2)=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}\sinh 2t\right\}$, de la Propietat 3 podem concloure que

$$\frac{1}{(s-1)^2-2^2}=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}e^t\sinh 2t\right\}$$

i segons la Propietat 8 tenim que

$$\frac{e^{-3s}}{s^2-2s-3}=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{2}H_3(t)e^{t-3}\sinh 2(t-3)\right\}$$

✓

Exemple 17 *Sigui* $f(t)$ *la funció que val* t *per a* $0\le t<1$*, i que val 0 per a* $t\ge 1$*. Trobeu la transformada de Laplace de* f *sense realitzar cap integració.*

Solució. Observem primerament que $f(t)$ pot escriure's de la forma

$$f(t)=t\big(H_0(t)-H_1(t)\big)=t-tH_1(t)$$

Per tant, segons la Propietat 2,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} &= \mathscr{L}\{t\}-\mathscr{L}\{tH_1(t)\}\\ &= \frac{1}{s^2}+\frac{d}{ds}\frac{e^{-s}}{s}=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

✓

5.2 Problema de valor inicial amb funcions de Heaviside

Veurem un exemple on el terme no homogeni és una funció contínua per seccions.

Exemple 18 *Resoldre el problema de valor inicial*

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 1, \quad 0 \quad \text{si} \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le t < 3, \quad 0 \quad \text{si} \quad 3 \le t < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 \le t < 5, \quad 0 \quad \text{si} \quad 5 \le t < \infty \end{cases} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Solució. Siguin $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ i $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Quan s'aplica la transformada de Laplace als dos costats de l'equació diferencial s'obté que $(s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s)$, de manera que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2} = \frac{F(s)}{(s-1)(s-2)}$$

Una manera de calcular $F(s)$ és escriure $f(t)$ de la forma

$$f(t) = H_0(t) - H_1(t) + H_2(t) - H_3(t) + H_4(t) - H_5(t)$$

Per tant, basant-nos en la linealitat de la transformada de Laplace s'obté que

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$

Un altre mètode per a calcular $F(s)$ és avaluar la integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt &= \int_0^1 e^{-st}\, dt + \int_2^3 e^{-st}\, dt + \int_4^5 e^{-st}\, dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s} - e^{-5s}}{s} \end{aligned}$$

Com a conseqüència obtenim que

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s}}{s(s-1)(s-2)}$$

El següent pas és desenvolupar $\frac{1}{s(s-1)(s-2)}$ en fraccions simples, és a dir, de manera que s'escrigui de la forma

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

Això implica

$$A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1) = 1$$

Fent $s = 0$ trobem que $A = \frac{1}{2}$, fent $s = 1$ trobem que $B = -1$, i fent $s = 2$ s'obté que $C = \frac{1}{2}$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s-1)(s-2)} &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} \\ &= \mathscr{L}\left\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right\} \end{aligned}$$

Per tant, a partir de la Propietat 8,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right] - H_1(t)\left[\frac{1}{2} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right] \\ &\quad + H_2(t)\left[\frac{1}{2} - e^{(t-2)} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right] - H_3(t)\left[\frac{1}{2} - e^{(t-3)} + \frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right] \\ &\quad + H_4(t)\left[\frac{1}{2} - e^{(t-4)} + \frac{1}{2}e^{2(t-4)}\right] - H_5(t)\left[\frac{1}{2} - e^{(t-5)} + \frac{1}{2}e^{2(t-5)}\right] \end{aligned}$$

Observació. Pot verificar-se fàcilment que la funció

$$\frac{1}{2} - e^{(t-n)} + \frac{1}{2}e^{2(t-n)}$$

i les seves derivades s'anul·len en $t = n$. Per això, tant $y(t)$ com $y'(t)$ són funcions contínues en el temps, tot i ser $f(t)$ discontínua en $t = 1, 2, 3, 4$ i 5.

De forma més general, com la integral d'una funció de Heaviside és contínua, tant la solució $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

com la seva derivada $y'(t)$ són sempre funcions contínues en el temps, si $f(t)$ és contínua a trossos. ✓

5.3 Delta de Dirac

En moltes aplicacions físiques i d'enginyeria apareix sovint el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y'_0 \tag{18}$$

on $f(t)$ no es coneix explícitament. Aquests problemes es presenten generalment quan es treballa amb fenòmens de naturalesa impulsiva. En aquests casos, l'única informació que es té de $f(t)$ és que és igual a zero, excepte en un interval de temps molt curt $t_0 \leq t \leq t_1$, i que la integral sobre aquest interval és un cert número $I_0 \neq 0$. Si I_0 no és molt petit, llavors $f(t)$ serà molt gran en l'interval $t_0 \leq t \leq t_1$. Aquestes funcions es coneixen amb el nom de *funcions d'impuls* (parlant amb rigor matemàtic, ens hi hauríem de referir com a funcionals o distribucions). En la Figura 5 es mostra la gràfica d'un impuls $f(t)$ típic.

A principis de la dècada de 1930, Dirac, guanyador d'un premi Nobel per treballs relacionats amb la mecànica quàntica, va elaborar un mètode força controvertit per a treballar amb funcions d'impuls. El seu mètode es basa en el següent raonament: Sigui t_1 cada cop més proper a t_0. Llavors la funció $f(t)/I_0$ tendeix a la funció que és 0 per a $t \neq t_0$ i a ∞ per a $t = t_0$. A més, la seva integral sobre qualsevol interval que contingui t_0 val 1. Aquesta funció es coneix amb el nom de *funció delta de Dirac*, tot i que no és una funció en el sentit habitual –ja Dirac la va qualificar de funció "impròpia"–, i es denota per $\delta(t - t_0)$, o per $\delta_{t_0}(t)$. No obstant, pot operar-se formalment amb $\delta(t - t_0)$ com si es tractés d'una funció més.

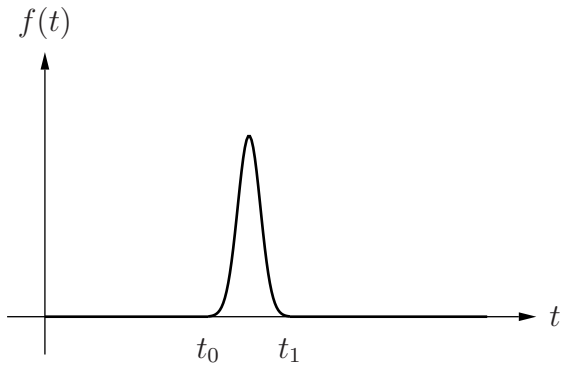

Figura 5: Gràfica d'una funció d'impuls $f(t)$.

Formalment es pot definir $\delta(t-t_0)$ d'una manera força genèrica, imposant que per a una funció qualsevol $g(t)$, es verifiqui

$$\int_a^b g(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} g(t_0) & , \quad a \le t_0 \le b \\ 0 & , \quad \text{altrament} \end{cases} \tag{19}$$

En particular, prenent $g(t) = 1$ obtenim la següent propietat que correspon a la definició donada originalment per a una funció d'impuls,

$$\begin{gathered} \delta(t-t_0) = 0 \quad \text{si} \quad t \neq t_0 \\ \textstyle\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt = 1 \quad \text{si} \quad a \le t_0 \le b \end{gathered}$$

És interessant posar de manifest la relació que hi ha entre la delta de Dirac i la funció de Heaviside.

Propietat 9 (Derivada de la funció esglaó) *Per a tot $c \ge 0$ es verifica*

$$\int_0^t \delta(u-c)\,du = H_c(t) \tag{20}$$

Aquest resultat és una conseqüència immediata de la definició. De vegades aquesta relació s'escriu, per analogia amb les funcions ordinàries, com

$$\delta(t-c) = \frac{d}{dt} H_c(t) \tag{21}$$

volent significar que "la derivada de la funció esglaó és un impuls". Ara bé, com s'ha d'entendre la relació anterior, si, de fet, la funció esglaó $H_c(t)$ no té derivada a $t = c$? La manera correcta d'interpretar aquesta relació seria pensar que les derivades d'una seqüència de funcions diferenciables, que en el límit tendeixen a $H_c(t)$, constitueixen una seqüència apropiada per a definir $\delta(t-c)$.

5.4 Terme no homogeni impulsiu

Ara podem veure que tota solució $y(t)$ de l'equació diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = I\,\delta(t-c) \tag{22}$$

és una funció contínua en el temps. Si integrem l'equació, tenint en compte l'expressió 20, resulta que $y'(t)$ és discontínua a la manera de $H_c(t)$. Com la seva integral és una funció contínua, llavors $y(t)$ serà una funció contínua. Dit amb un exemple, si $y(t)$ és la solució de l'equació del moviment d'una partícula que rep un impuls en el temps $t = c$, aquesta partícula no realitza el "canvi de lloc instantani", sinó que segueix una trajectòria contínua. La seva velocitat, en canvi, es veu sobtadament modificada.

Per a resoldre el problema de valor inicial que mostra l'equació (18) pel mètode de la transformada de Laplace, només cal saber quina és la transformada de Laplace de $\delta(t-t_0)$. Això ho podem obtenir directament de l'equació (19)

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} \equiv \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}, \qquad t_0 \geq 0$$

Exemple 19 *Trobar la solució del problema de valor inicial*

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 3\,\delta(t-1) + \delta(t-2), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

Solució. Sigui $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Quan apliquem la transformada de Laplace als dos costats de l'equació diferencial, obtenim que

$$s^2Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = 3e^{-s} + e^{-2s}$$

o el que és el mateix,

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) = s - 3 + 3e^{-s} + e^{-2s}$$

Per tant tenim que

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}$$

Observem ara que $1/(s-2)^2 = \mathscr{L}\{te^{2t}\}$. Llavors,

$$\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} = \mathscr{L}\left\{3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}\right\}$$

Per tal d'invertir el primer terme de $Y(s)$ observem que

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \mathscr{L}\left\{e^{2t}\right\} - \mathscr{L}\left\{te^{2t}\right\}$$

Així doncs,

$$y(t) = (1-t)e^{2t} + 3H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}$$

Observació. Resulta il·lustratiu resoldre aquest problema per la via llarga, és a dir, trobar $y(t)$, per separat, en cadascun dels intervals $0 \leq t < 1$, $1 \leq t < 2$ i $2 \leq t < \infty$. Per $0 \leq t < 1$ tenim que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$$

L'equació característica d'aquesta equació diferencial és $r^2 - 4r + 4 = 0$, que té per arrels $r_1 = r_2 = 2$. Per tant, qualsevol solució $y(t)$ ha de ser de la forma $y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{2t}$. Les constants a_1 i a_2 es determinen a partir de les condicions inicials

$$1 = y(0) = a_1 \qquad \text{i} \qquad 1 = y'(0) = 2a_1 + a_2$$

Per tant, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ i $y(t) = (1-t)e^{2t}$ per a $0 \leq t < 1$. Ara $y(1) = 0$ i $y'(1) = -e^2$. En l'instant $t = 1$ la derivada de $y(t)$ s'incrementa sobtadament en 3 unitats. Per tant, per a $1 \leq t < 2$ es té que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(1) = 0 \qquad y'(1) = 3 - e^2$$

Ja que les condicions inicials ens vénen donades en $t = 1$, la solució s'escriurà de la forma $y(t) = \big(b_1 + b_2(t-1)\big)e^{2(t-1)}$. Les constants b_1 i b_2 es determinen a partir de les condicions inicials

$$1 = y(1) = b_1 \qquad \text{i} \qquad 3 - e^2 = y'(1) = 2b_1 + b_2$$

Així doncs, $b_1 = 0$, $b_2 = 3 - e^2$ i $y(t) = (3-e^2)(t-1)e^{2(t-1)}$, on $1 \leq t < 2$. Ara tenim que $y(2) = (3-e^2)e^2$ i $y'(2) = 3(3-e^2)e^2$. En l'instant $t = 2$, la derivada de $y(t)$ s'incrementa sobtadament en 1 unitat. Conseqüentment, per a $2 \leq t < \infty$ tenim que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0 \qquad y(2) = e^2(3-e^2) \qquad y'(2) = 1 + 3e^2(3-e^2)$$

Per tant, $y(t) = \big(c_1 + c_2(t-2)\big)e^{2(t-2)}$. Les constants c_1 i c_2 es determinen a partir de les equacions

$$e^2(3-e^2) = c_1 \qquad \text{i} \qquad 1 + 3e^2(3-e^2) = 2c_1 + c_2$$

Així tenim que

$$c_1 = e^2(3-e^2), \qquad c_2 = 1 + 3e^2(3-e^2) - 2e^2(3-e^2) = 1 + e^2(3-e^2)$$

i

$$y(t) = \left[e^2(3-e^2) + \big(1 + e^2(3-e^2)\big)(t-2)\right] e^{2(t-2)} \quad , \quad t \geq 2$$

✓

Observació. Seria interessant verificar que, efectivament, aquesta expressió coincideix amb la que s'ha obtingut anteriorment mitjançant el mètode de la transformada de Laplace. A diferència del que succeïa en l'Exemple 18, on el resultat era una funció contínua amb derivada contínua, ara es pot comprovar que la solució obtinguda en l'Exemple 19 també és contínua, però, en canvi, la seva derivada no ho és. Es veu fàcilment que la funció $(t-n)e^{2(t-n)}$ és nul·la en $t = n$, però no ho és la seva derivada.

La Taula 2 mostra les transformades de Laplace de les funcions més usuals.

6 Integral de convolució

Considerem el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \tag{23}$$

Sigui $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ i $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Apliquem la transformada de Laplace als dos costats de l'equació i obtenim

$$(s^2 + ps + q)\, Y(s) = F(s)$$

que implica

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + ps + q}$$

Fixem-nos ara només en la part

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q} \tag{24}$$

Si la seva transformada inversa es denota per

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} \tag{25}$$

aquesta funció pot ser interpretada com la solució de l'equació homogènia, amb $f(t) = 0$, amb unes condicions inicials no homogènies $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Aquesta solució s'entén habitualment com la resposta natural del sistema, doncs és el resultat d'una mínima pertorbació de les condicions d'equilibri del sistema, sense estímuls externs.

Similarment, la funció $h(t)$ també es pot interpretar com la la solució de l'equació diferencial on la part no homogènia s'ha substituït per un impuls a l'origen, $f(t) = \delta(t)$, i que satisfà les condicions inicials homogènies $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Recordem que $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$. Per aquest motiu $h(t)$ també s'anomena *resposta impulsional*.

Ara interpretarem la solució particular $y(t)$ de l'equació completa. Mitjançant les respectives transformades, podem posar $y(t)$ en funció de $h(t)$ i $f(t)$,

$$\mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} \cdot \mathscr{L}\{h(t)\} = F(s) \cdot H(s)$$

A $H(s)$ se la denomina *funció de transferència*. Resulta natural preguntar-se si existeix un relació senzilla i directa entre aquestes funcions. Lògicament seria més fàcil si $y(t)$ fos el producte de $f(t)$ i $h(t)$, però òbviament això no succeeix. No obstant, existeix una manera de combinar dues funcions f i g per tal de formar una nova funció $f * g$ que és semblant a la multiplicació i compleix que

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} \cdot \mathscr{L}\{g(t)\}$$

Aquesta combinació de f i g apareix amb freqüència en moltes aplicacions i es coneix per *convolució* de f amb g.

Definició 2 *La convolució $(f * g)(t)$ de f amb g es defineix per mitjà de l'equació*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\, du \tag{26}$$

Observació. Els límits entre 0 i t de la integral de convolució van associats al fet que aquestes funcions estan definides per a $t \in [0, \infty)$. Si el seu domini fos $(-\infty, \infty)$, llavors la integral de convolució tindria límits entre $-\infty$ i ∞.

Per exemple, si $f(t) = \sin 2t$ i $g(t) = e^{t^2}$, llavors

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin 2(t-u) e^{u^2}\, du$$

6.1 Propietats

L'operador de convolució satisfà les propietats següents.

Propietat 1 *L'operador convolució compleix la llei commutativa de la multiplicació, és a dir,* $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Demostració. Per definició tenim que

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u)\, du$$

Fent el canvi $t - u = \zeta$ en la integral obtenim que

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= -\int_t^0 f(\zeta) g(t-\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_0^t g(t-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \equiv (g * f)(t) \end{aligned}$$

□

És igualment fàcil comprovar les següents propietats:

Propietat 2 *L'operador convolució compleix la llei distributiva de la multiplicació, és a dir,*

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

Propietat 3 *L'operador convolució compleix la llei associativa de la multiplicació, és a dir,* $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Propietat 4 *La convolució de qualsevol funció f amb la funció zero és igual a zero.*

D'altra banda, l'operador convolució es distingeix de l'operador multiplicació en que $f * 1 \neq f$ i $f * f \neq f^2$. De fet, la convolució d'una funció f amb ella mateixa pot inclús ser negativa.

Exemple 20 *Calcular la convolució de $f(t) = t^2$ amb $g(t) = 1$.*

Solució. A partir de la Propietat 1 tenim que

$$(f * g)(t) = (g * t)(t) = \int_0^t 1 \cdot u^2\, du = \frac{t^3}{3}$$

✓

Exemple 21 *Calcular la convolució de $f(t) = \cos t$ amb ella mateixa i demostrar que no sempre és positiva.*

Solució. Per definició tenim que

$$\begin{aligned}
(f * f)(t) &= \int_0^t \cos(t-u)\cos u\, du \\
&= \int_0^t (\cos t \cos^2 u + \sin t \sin u \cos u)\, du \\
&= \cos t \int_0^t \frac{1+\cos 2u}{2}\, du + \sin t \int_0^t \sin u \cos u\, du \\
&= \cos t \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + \frac{\sin^3 t}{2} \\
&= \frac{t\cos t + \sin t \cos^2 t + \sin^3 t}{2} \\
&= \frac{t\cos t + \sin t(\cos^2 t + \sin^2 t)}{2} \\
&= \frac{t\cos t + \sin t}{2}.
\end{aligned}$$

Aquesta funció és clarament negativa per a

$$(2n+1)\pi \le t \le (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}; \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

✓

A continuació es demostrarà que la transformada de Laplace de $f * g$ és el producte de la transformada de Laplace de f i la transformada de Laplace de g.

Teorema 1

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} \cdot \mathscr{L}\{g(t)\} \tag{27}$$

Demostració. Per definició tenim que

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-u)g(u)\, du\right] dt$$

Aquesta integral iterativa és igual a la integral doble

$$\iint_R e^{-st} f(t-u)g(u)\, du\, dt$$

on R és la regió triangular descrita en la Figura 6. Integrant primer respecte t, enlloc de u, s'obté

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty g(u) \left[\int_u^\infty e^{-st} f(t-u)\, dt\right] du$$

En fer $t - u = \xi$ trobem que

$$\int_u^\infty e^{-st} f(t-u)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(u+\xi)} f(\xi)\, d\xi$$

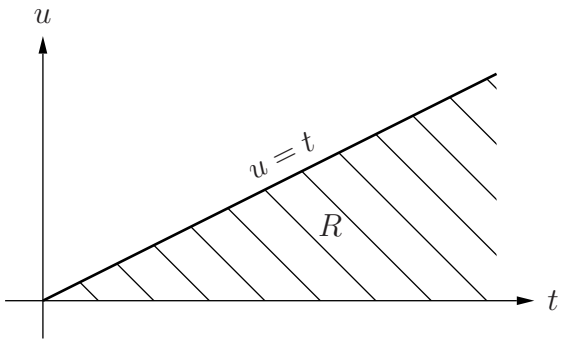

Figura 6: Àrea sota la funció $u = t$.

Per tant, es compleix que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{(f*g)(t)\} &= \int_0^\infty g(u)\left[\int_0^\infty e^{-st}e^{s\xi}f(\xi)\,d\xi\right]du \\ &= \left[\int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du\right]\left[\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi\right] \\ &\equiv \mathscr{L}\{f(t)\}\cdot\mathscr{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

□

Exemple 22 *Trobar la transformada de Laplace inversa de la funció*

$$\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

Solució. Observem que

$$\frac{1}{s^2} = \mathscr{L}\{t\} \qquad \text{i} \qquad \frac{a}{s^2+a^2} = \mathscr{L}\{\sin at\}$$

Per tant, pel Teorema 1 sabem que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right\} &= \int_0^t (t-u)\sin au\,du \\ &= \frac{at-\sin at}{a^2}\end{aligned}$$

✓

Exemple 23 *Trobar la transformada de Laplace inversa de la funció*

$$\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$$

Solució. Observem que

$$\frac{1}{s} = \mathscr{L}\{1\} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \mathscr{L}\left\{e^{-t}\sin t\right\}$$

Per tant, pel Teorema 1

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \int_0^t e^{-u}\sin u\,du \\ &= \frac{1}{2}\big(1-e^{-t}(\cos t+\sin t)\big)\end{aligned}$$

✓

Observació. Ara podem donar resposta al problema que es plantejava en l'equació 23. Sigui $h(t)$ la solució de l'equació $y''+py'+qy=0$, que satisfà les condicions inicials $h(0)=0$ i $h'(0)=1$. Llavors

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_0^t f(t-u)\,h(u)\,du \tag{28}$$

és la solució particular de l'equació $y''+py'+qy=f(t)$, que satisfà les condicions inicials $y(0)=y'(0)=0$. Freqüentment, l'equació (28) és força més fàcil d'utilitzar que el mètode de variació de paràmetres. La generalització a unes condicions inicials qualsevols és ben senzilla a partir de l'equació 5.

Taula 2: Transformades de Laplace de les funcions més comuns

	$f(t)$	$F(s)$			$f(t)$	$F(s)$	
1.	1	$\frac{1}{s}$	$(s>0)$	9.	$\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$(s>\alpha)$
2.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(s>0)$	10.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$	$(s>\alpha)$
3.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$(s>\alpha)$	11.	$t\cos \beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$(s>0)$
4.	$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$(s>0)$	12.	$t\sin \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$(s>0)$
5.	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$(s>0)$	13.	$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$(s>0)$
6.	$e^{\alpha t}\cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$(s>\alpha)$	14.	$H_c(t)=H(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$(s>0)$
7.	$e^{\alpha t}\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	$(s>\alpha)$	15.	$\delta(t)$	1	
8.	$\cosh \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$(s>\alpha)$	16.	$\delta_a(t)=\delta(t-a)$	e^{-as}	$(a\geq 0)$