

# Modelizando el cálculo de varias variables en el aula

**A. Aragón-Ángel, R. Cubarsi**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

angela@ma4.upc.edu, rcubarsi@ma4.upc.edu

---

## Abstract

*La implantación de la modelización matemática en el ámbito del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) necesita de una revisión y adaptación de los contenidos y estrategias para abordar las asignaturas, en particular, aquellas más teóricas y abstractas, para fomentar su carácter interdisciplinario. Se presenta una nueva propuesta metodológica para la asignatura de Análisis Vectorial (cálculo multivariable) ofertada durante los últimos años por l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicacions de Barcelona (ETSETB) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Es una de las asignaturas de la fase selectiva de dicha titulación, con 4.5 créditos de teoría y 3 de prácticas (repartidos entre problemas y laboratorios).*

*The implantation of mathematical modelling in the framework of the European Higher Education Area (EHEA) needs a revision and adaptation of content and strategies to address the curricula, in particular those subjects which are more theoretical and abstract, to encourage their interdisciplinary character. We present a new proposal of methodology for the subject of Vector Analysis (multivariable calculus) offered last years by the Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona (ETSETB) of the Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). It is a subject within the selective phase of the undergraduate program with 4.5 credits for theory and 3 for practice (divided between problems and laboratories).*

---

**Keywords:** Métodos numéricos, proceso de aprendizaje, trabajo en grupo, evaluación, regulación continua de aprendizaje.

## 1 Metodología

En este trabajo se ha implementado una nueva propuesta metodológica en la cual de potencia que los alumnos participen en el proceso de aprendizaje. Con la premisa de abogar por una enseñanza de calidad, se ha intentado que hubiese un trade-off entre la inversión por parte del profesorado involucrado y los alumnos para poder conseguir el máximo resultado. Las diferentes sesiones de una hora, hora y media y dos horas, respectivamente, de la asignatura se han dividido en:

- Clases teóricas (25-50%) encaminadas, sobretodo, a enseñar pautas para la resolución de problemas (no sólo ejercicios).
- Clases prácticas en las cuales todo el tiempo se dedicaba a, primero, analizar y entender los enunciados de los problemas propuestos para extraer el máximo de información posible de ellos y, en segundo lugar, resolverlos (75-50%).

Algunos aspectos se han dejado para que los trabajen/estudien los alumnos por su cuenta (por ejemplo, los apuntes de la asignatura). El trabajo de las clases de problemas también implica una cantidad de trabajo del alumnado fuera del horario lectivo y por cuenta propia (aprendiendo a organizar y distribuir su tiempo entre las distintas asignaturas). Una parte importante de los problemas de clase han tenido como objetivo la aplicación de modelos matemáticos asociados a la asignatura. Además, cada problema se ha de intentar resolver de más de una manera, bien porque se pueden aplicar modelos diferentes (aproximación numérica y modelo analítico) o bien porque en la mayoría de los casos se pide, junto con la resolución analítica del problema, una resolución hecha con software matemático (tipo MAPLE<sup>®</sup>). Las resoluciones con software de modelización, manipulación algebraica han de tener:

- a) Una finalidad “prospectiva”, es decir, han de poner de manifiesto cuales son las variables a relacionar en un modelo, y cuales quedan descartadas, y la comparativa entre posibles modelos.
- b) Una finalidad “descriptiva”, es decir, cual es la relación entre estas variables, mostrada básicamente con gráficos, aportando ejemplos evolutivos para diferentes valores de los parámetros.

A continuación se describe la metodología utilizada en las diferentes sesiones de problemas. Se han dividido los problemas sencillos y complejos (bajo y alto nivel cognitivo). Los resultados de todas estas sesiones se recogen de cara a la evaluación formativa del proceso:

### PROBLEMAS SENCILLOS:

- Se han formado equipos de 5 personas al inicio del curso y se han conservado hasta la finalización del mismo.
- Se les ha encargado resolver 10 problemas por equipo. El grupo los reparte de manera que cada problema sea resuelto por dos alumnos diferentes.
- Los problemas se trabajan individualmente durante 20-30 minutos. Aunque los problemas se han de resolver de forma individual, aquellos alumnos que tienen una duda común pueden ayudarse si es necesario y/o pueden pedir ayuda al profesor.

- En una segunda parte de la clase, cada alumno explica los problemas que ha liderado a los compañeros y resuelve sus dudas.
- Finalmente, un representante de cada grupo sale a la pizarra a explicar un problema. La respuesta dada califica tanto al alumno como al resto de compañeros del grupo (nota global grupal del proceso de aprendizaje).

#### PROBLEMAS COMPLEJOS:

- Se mantienen los grupos anteriormente formados. Cada alumno se encarga de un único apartado.
- En los primeros 20 minutos, cada alumno se encarga de su apartado.
- Se reorganizan los grupos formando “comités de expertos”. Es decir, se hacen 10 grupos de 5, donde todos los miembros han resuelto el mismo apartado. Así se comparan las respectivas soluciones y, si hace falta, corrigen los errores.
- Se vuelve a los grupos de origen y se hace el problema completo en común.
- La corrección y valoración se puede hacer como antes o se puede puntuar, ocasionalmente, al alumno que sale a la pizarra.

#### PROBLEMAS INDIVIDUALES:

Además de las actividades ya comentadas, se proponen semanalmente algunos problemas que han de resolverse de manera individual. También son propuestos problemas “extra” de una dificultad más elevada, que se han de entregar. En particular, son problemas en los que se fomenta el uso de software matemático, como por ejemplo MAPLE<sup>©</sup>. Los alumnos, de forma voluntaria, pueden explicar la resolución en clase brindando otra manera, a parte de la corrección individual, de evaluar dicha contribución. La nota más alta se reserva para aquellos que hayan utilizado software matemático para resolver y graficar la resolución del problema.

Por ejemplo, cuando se estudian los *multiplicadores de Lagrange*, la condición del método de Lagrange es una condición necesaria pero no suficiente. Si consideramos la función:

$$f(x, y) = x + y,$$

Sujeta a la condición que:  $xy = 1$ , es decir:  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{xy} - \mathbf{1} = \mathbf{0}$  se obtiene que  $\lambda = 1$  y  $(x_0, y_0) = (\pm 1, \pm 1)$  pero  $f$  no tiene ni máximo ni mínimo. Esto se puede entender claramente a la vista de la figura 1, que ellos deben generar con MAPLE<sup>©</sup> o cualquier otro software que permita dibujar.

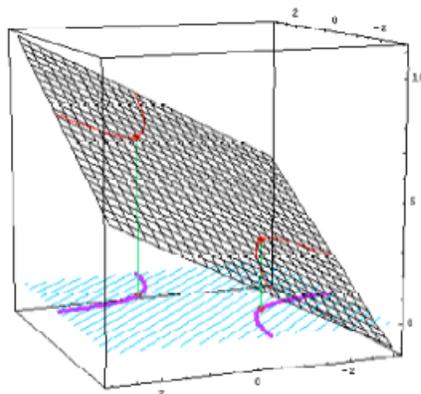


Figura 1: Ejemplo ilustrativo en el estudio de los multiplicadores de Lagrange.

Se realizan pruebas parciales al finalizar cada unidad didáctica. Con estas diferentes pruebas, se puede apreciar un cambio metodológico y evaluativo respecto a la manera tradicional. Estas pruebas permiten al docente y al alumno saber en qué momento del proceso de aprendizaje se encuentra cada alumno. Cabe distinguir entre dos tipos de pruebas:

#### PRUEBAS O CONTROLES FINALES DE LA UNIDAD:

Se realiza una prueba final de tipo test al final de cada tema. Los alumnos entregan sus respuestas, identificándose sólo con el DNI. En la misma clase se reordenan las hojas y se corrige la prueba intercambiando propietarios de las mismas. De esta manera, al finalizar esta prueba, el alumno puede saber en qué punto se encuentra del proceso de aprendizaje y cuáles son aquellos aspectos que necesita reforzar de cara a la prueba final de la asignatura.

#### PRUEBAS O CONTROLES PARA REALIZAR EN CASA:

Cada alumno ha de resolver, en casa y durante la semana siguiente, el control anterior. En este caso, se supone que lo ha de entregar con las respuestas correctas ya que habrá podido consultar bibliografía, apuntes, ejercicios y al propio profesor en sus horas de consulta. Se recomienda y valora que los alumnos hayan utilizado software informático para resolverlo. La nota final de la prueba correspondiente a cada unidad se calcula haciendo el promedio entre el control realizado en el aula y el control realizado en casa. Otra actividad que forma parte de la evaluación de esta asignatura son los laboratorios. Esta actividad es obligatoria. Se propone como ejercicio voluntario la repetición individual de la práctica, para ser entregada en formato documento bien razonada y documentada. La puntuación máxima se otorga cuando toda ella se ha realizado de forma digital (presentación en formato electrónico, datos, planteamiento, resolución y gráficos).

## 2 Evaluación del proceso

En todo proceso de aprendizaje, enseñar, aprender y evaluar están estrechamente relacionados, constituyendo un proceso de Regulación Continua de Aprendizaje (RCA). En este proceso, la evaluación es el eje vertebrador y motor que permite detectar la construcción del conocimiento. Por esta razón, siempre que se quiere modificar una práctica educativa es necesario replantear el sistema de evaluación. En nuestro caso, la evaluación ha considerado los apartados siguientes,

exigiendo un aprobado en cada uno de ellos: Problemas y trabajos individuales y en grupo | Pruebas o controles de clase y casa | Prueba o examen final de la asignatura | Laboratorios.

### 3 Resultados del proceso

En los gráficos siguientes se ve la incidencia de la metodología. En el gráfico de la izquierda tenemos la nota del examen final, mientras que en el gráfico de la derecha se muestra la nota media final con todas las contribuciones. Las irregularidades de la primera distribución quedan promediadas con las notas de la evaluación continua (controles, trabajos personales, salidas a la pizarra...) y laboratorios, obteniéndose una distribución más normalizada, bastante cerca de una distribución gaussiana, lo predicho por el teorema central del límite.

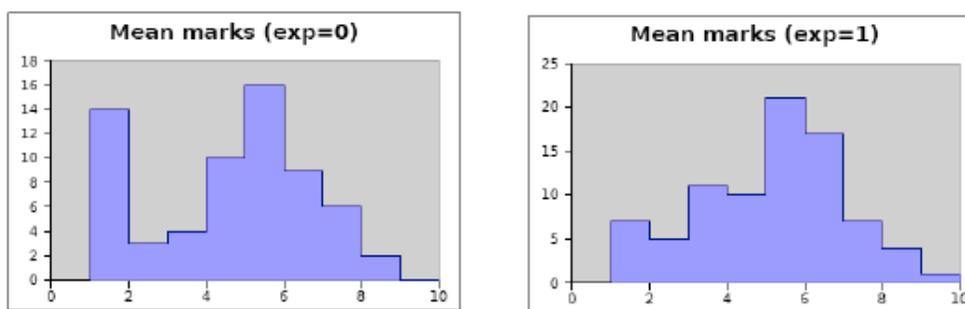


Figura 2: Comparativa notas examen final ( $\text{exp} = 0$ ) vs. nota media ( $\text{exp} = 1$ ).

### 4 Conclusiones

La nueva metodología permite a los alumnos ir construyendo su propio sistema de aprendizaje con la máxima autonomía posible. Los roles de profesores y alumnos han de potenciar que el alumnado juegue un papel activo en todo el proceso. La implementación presentada así lo ha permitido, y la evaluación presenta una distribución de las notas más uniforme y normalizada.



# Referencias

- [1] Allal, L.; “Assurer la Réussite des Apprentisages Scolaires” Les Propositions de la Pédagogie de Maîtrise?. En Huberman, M: Textes de base en Pédagogie. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, 1987.
- [2] Gómez, J.; “La resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado: El caso de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico”. Colombia. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa . 2009.
- [3] Mason, J.; Burton, L.; and Stacey, K.; “Thinking Mathematically”. Londres. Addison Wesley. 1982. Trad. De Martínez M.; Pensar matemáticamente. Barcelona. Labor.1988

