



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



Equacions diferencials i transformada de Laplace →

Rafael Cubarsí



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH



iniciativa
digital politècnica
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Equacions diferencials i transformada de Laplace →

Rafael Cubarsí

Primera edició: juliol de 2012

Disseny i dibuix de la coberta: Jordi Soldevila

Disseny maqueta interior: Jordi Soldevila

Maquetació: Mercè Aicart

© Rafael Cubarsí, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Dipòsit legal: B. 24046-2012

ISBN: 978-84-7653-941-5

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei. Si necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment d'aquesta obra, us he d'adreçar al Centre Espanyol de Drets Reprogràfics (CEDRO), <<http://www.cedro.org>>.

Índex

Prefaci	7
1. Equacions diferencials de primer ordre	11
1.1. Introducció	11
1.2. Condicions d'integrabilitat	13
1.3. Equacions d'integració immediata	14
1.4. Equació lineal	16
1.5. Estudi qualitatiu	18
1.6. Exercicis	20
1.7. Respostes	21
2. Equacions diferencials lineals d'ordre superior	25
2.1. Equacions de segon ordre	25
2.2. Wronskià	27
2.3. Equacions homogènies	28
2.4. Equacions homogènies a coeficients constants	30
2.5. Equacions d'ordre superior	32
2.6. Equacions lineals no homogènies	34
2.7. Exercicis	42
2.8. Respostes	43
3. Sistemes d'equacions diferencials lineals	45
3.1. Introducció	45
3.2. Relació entre un sistema i una equació	46
3.3. Sistemes homogenis	47
3.4. Matriu exponencial	50
3.5. Sistema homogeni a coeficients constants	51



3.6. Sistemes no homogenis	56
3.7. Exercicis	58
3.8. Respostes	59
4. Transformada de Laplace	63
4.1. Introducció	63
4.2. Transformació de Laplace	64
4.3. Aplicació a les equacions diferencials	67
4.4. Càlcul de transformades	72
4.5. Propietats addicionals	76
4.6. Exercicis	78
4.7. Respostes	79
5. Equacions amb terme no homogeni discontinu	81
5.1. Introducció	81
5.2. Funció de Heaviside	81
5.3. Delta de Dirac	86
5.4. Integral de convolució	90
5.5. Exercicis	94
5.6. Respostes	95
Apèndixs	97
Apèndix A	99
A.1. Polinomis de matrius	99
A.2. Operador derivada	100
Apèndix B	103
B.1. Polinomi anul·lador	103
B.2. Polinomi mínim	104
Apèndix C	107
C.1. Subespais invariants	107
C.2. Endomorfisme que diagonalitza	108
C.3. Valors propis complexos	108
Apèndix D	113
D.1. Descomposició primària	113
D.2. Polinomi en l'operador derivada	116



Prefaci

Amb la finalitat de consolidar l'Espai Europeu d'Educació Superior, i d'acord amb les directrius del procés de Bolonya, les assignatures dels nous plans d'estudis han estat objecte d'una revisió a fons dels continguts. Assignatures que abans tenien una durada de vuit mesos ara són quadrimestrals. Això fa necessari dissenyar un temari molt optimitzat, tot reforçant els conceptes, mètodes bàsics i exemples que són útils després en altres assignatures de la carrera. Aquest és el propòsit d'aquestes notes sobre equacions diferencials. El seu contingut suposa uns coneixements elementals d'àlgebra lineal i anàlisi matemàtica, comuns a tots els graus d'enginyeries i ciències. Després d'introduir les definicions i els conceptes que juguen un paper fonamental en la teoria d'equacions diferencials, es fa atenció en les equacions lineals, que són la base de gairebé tots els models que l'alumne estudiarà els primers anys. Altres tipus d'equacions, com ara les que es poden resoldre mitjançant canvis de variable, es tracten als exercicis. En general, s'han evitat les demostracions de proposicions i teoremes, excepte quan s'ha considerat que la demostració, senzilla, era il·lustrativa per als exercicis. En sistemes d'equacions, s'ha optat per fer ús de la matriu exponencial perquè, a part de proporcionar un mètode senzill per obtenir la solució general, convé, de cara a estudis posteriors, que l'estudiant en tingui coneixença. La justificació de la solució general dels sistemes homogenis a coeficients constants lligada al teorema de descomposició primària d'endomorfismes s'ha traslladat a l'apèndix. Serveix de repàs del temari d'àlgebra a qui ja havia estudiat aquest teorema, o de complement a qui encara no l'havia vist.

D'altra banda, en assignatures com electrònica o física, és costum resoldre equacions diferencials fent ús de la transformada de Laplace. El fet té la seva justificació, ja que en les assignatures de matemàtiques s'acostuma a suposar, per comoditat, la continuïtat en el domini de resolució del problema de totes les funcions presents a l'equació diferencial. En canvi, de vegades tenen molt d'interès algunes funcions o distribucions discontinües, com ara la funció de Heaviside i la delta de Dirac, que solen aparèixer com a pertorbació externa d'un sistema regit per una equació diferencial lineal. Per aquest motiu, s'introdueixen les definicions i propietats bàsiques d'aquesta transformació, i s'apliquen als problemes mencionats. No deixa de ser un exemple introductori a altres transformades que l'alumne veurà en cursos posteriors.



Els exercicis que acompanyen cada tema contenen problemes, potser reformulats, que han aparegut en exàmens al llarg dels anys. Algunes seccions d'aquestes notes s'inspiren en antics apunts de classe d'assignatures d'altres plans d'estudis. Cal agrair sincerament l'existència d'una llarga col·lecció d'aquests problemes al professorat del Departament de Matemàtica Aplicada IV que ha impartit aquests temes.



→ 1



Equacions diferencials de primer ordre

1.1. Introducció

Definició 1 Una equació diferencial ordinària és una relació entre una funció d'una variable, $y(t)$ (que anomenem variable dependent), la variable independent t , i una o diverses derivades successives de la funció,

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Suposem que totes les variables són reals.

Si F no depèn de t , diem que l'equació diferencial és *autònoma*. Per a la variable independent, tant fem servir t com x .

Quan hi ha diverses variables independents, $t_1, \dots, t_n$, les equacions s'anomenen equacions en derivades parcials. Llavors, la funció $y(t_1, \dots, t_n)$ es pot derivar respecte de cada una de les variables. Per exemple, $\frac{\partial y}{\partial t_i}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t_i \partial t_j}$, etc. Les equacions en derivades parcials s'estudien en cursos posteriors.

Vegem-ne alguns exemples:

Exemple 1 Un cas el proporciona la segona llei de Newton pel moviment d'un cos de massa m , sota l'acció d'una força F . Si aquesta força depèn de l'instant t considerat, de la posició $y(t)$ i de la velocitat $y'(t)$ del cos en aquest instant, es compleix

$$my'' = F(t, y, y')$$

■

Exemple 2 L'estudi dels circuits elèctrics és un altre exemple d'equacions diferencials. Per exemple, el corrent $i(t)$ d'un circuit, pel qual la tensió $v(t)$ aplicada en cada instant



t es reparteix entre la caiguda de tensió $Ri(t)$ d'una resistència i la caiguda de tensió $Li'(t)$ d'una autoinducció, posades en sèrie, satisfà l'equació diferencial

$$Li' + Ri = v$$

■

Exemple 3 Un altre cas són les equacions que caracteritzen una família de corbes del pla. Així, si considerem la família de paràboles $y = Cx^2$, derivant tenim que $y' = 2Cx$. Eliminant el paràmetre C entre ambdues equacions, obtenim l'equació diferencial

$$y' = 2 \frac{y}{x}$$

que expressa una propietat comuna a totes les corbes de la família: el pendent de la tangent en un punt qualsevol és el doble del pendent de la recta que uneix el punt amb l'origen. ■

En general, si $g(x, y, C) = 0$ representa una família de corbes, eliminant C entre les equacions $g(x, y, C) = 0$ i $\frac{d}{dx}g(x, y(x), C) = 0$, obtenim l'equació diferencial $F(x, y, y') = 0$ de la família de corbes. És a dir, canviem la informació que proporciona C per la que proporciona y' .

Definició 2 Anomenem ordre d'una equació diferencial el major ordre de la derivada que intervé en l'equació.

Per tant, l'exemple 1 és d'una equació de segon ordre, mentre que els exemples 2 i 3 són d'equacions de primer ordre.

De moment, considerem únicament equacions de primer ordre, que escrivim en la forma estàndard

$$y' = f(t, y) \quad (1.1)$$

En un interval I , una solució d'aquesta equació és una funció $y = \phi(t)$ derivable que satisfà

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)); \quad \forall t \in I \quad (1.2)$$

La variable dependent y pren valors en l'anomenat *espai de fases*.

1.1.1. Interpretació geomètrica

Podem interpretar una equació diferencial $y' = f(x, y)$ com una equació que a cada punt (x, y) en què f està definida li associa una direcció de pendent $f(x, y)$.

El gràfic d'una solució $y = \phi(x)$ s'anomena *corba integral* i els valors $f(x, y)$ s'anomenen *camp de velocitats o direccions*.

D'una equació $y' = f(x, y)$, n'obindrem una família uniparamètrica de solucions, $y = \phi(x, C)$, que rep el nom d'*integral general* o *solució general* de l'equació.



També podem estar interessats a determinar una *solució particular* de l'equació diferencial que, per a $x = x_0$, pren un valor donat y_0 . Geomètricament, es diu que es busca la solució que passa pel punt (x_0, y_0) . Aquesta condició determina el valor de C en la solució general, de manera que, si $y_0 = \phi(x_0, C_0)$, la solució desitjada és $y = \phi(x, C_0)$.

Exemple 4 La solució general de l'equació $y' = e^x - y$ ve donada per $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$, i la *solució particular* que satisfà $y(0) = 1$ s'obté quan $1 = \frac{1}{2} + C$, és a dir, per a $C = \frac{1}{2}$, i en resulta $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$. ■

1.2. Condicions d'integrabilitat

Si coneixem el valor de la variable dependent y a t_0 , i admetem que aquesta variable evoluciona de manera:

- *determinista*, és a dir, que hi ha un lligam entre els valors passats, present i futurs,
- *finita*, és a dir, que en tot moment és quantificable,
- *diferenciable*, és a dir, que les seves variacions són prou suaus,

llavors, per a un valor de t proper a t_0 , podem fer una estimació de $y(t)$ a partir de l'aproximació lineal

$$y(t) - y(t_0) \approx y'(t_0)(t - t_0)$$

Una forma de poder seguir l'evolució de la variable y és disposar de la informació que proporciona l'equació

$$y' = f(t, y(t)) \quad (1.3)$$

Així, sabent el *valor inicial* $y_0 = y(t_0)$, obtindrem els valors de la funció $y(t)$ en el seu entorn,

$$y(t) \approx y(t_0) + f(t_0, y_0)(t - t_0)$$

Quan fem aquest procés de manera *elemental*, estem precisament integrant l'equació diferencial 1.3,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.4)$$

tot calculant les constants d'integració a partir de les condicions inicials.

En resoldre una equació de primer ordre, fem un procés que equival a una integració, on sorgeix una constant additiva. En general, per resoldre una equació d'ordre n calen n integracions, que hi fan aparèixer n constants.

Per a una equació d'ordre n , les condicions inicials han de ser sempre de la forma $a_0 = y(t_0), a_1 = y'(t_0), \dots, a_{n-1} = y^{(n-1)}(t_0)$, totes avaluades en el mateix valor de la variable independent.



Ho tindríem malament si, per exemple, deixem caure una pedra a un pou i volem trobar l'equació del seu moviment a partir de l'equació $y'' = -10$, amb unes condicions (no inicials) $y'(0) = 0$ i $y'(1) = 1$.

L'existència i la unicitat de la solució del *problema de valor inicial* (PVI)

$$y' = f(t, y); \quad y(t_0) = y_0 \quad (1.5)$$

requereixen unes condicions mínimes. La que s'utilitza més sovint és la següent:

Teorema 1 (d'existència i unicitat) Si f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ són contínues en un domini Ω , el problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, per a $(t_0, y_0) \in \Omega$, admet una única solució $y(t)$, que està definida en un interval obert $I \subset \Omega$ que conté el punt (t_0, y_0) .

En general, si $f \in \mathcal{C}^r$ en tots els seus arguments, la solució y també ho és, tant en termes de la variable independent, com de la constant d'integració.

Un exemple en què no es compleixen aquestes condicions suficients és el següent:

Exemple 5 El problema de valor inicial $y' = y^{2/3}$, $y(0) = 0$, no té solució única, ja que almenys $y_1(t) = (t/3)^3$, $y_2(t) = 0$ són solucions del problema. ■

També cal notar que les solucions poden tenir un abast limitat:

Exemple 6 La solució de $y' = y^2$, amb $y(0) = 1$, és $y(t) = 1/(1 - t)$ en $-\infty < t < 1$. Però $y(t)$ no pot ser solució en un interval més gran ja que no està definida per a $t = 1$. ■

1.3. Equacions d'integració immediata

Determinades funcions, com ara e^{-t^2} i $\sqrt{\sin t}$, no admeten una primitiva que sigui una funció elemental, és a dir, una combinació de funcions polinòmiques, racionals, trigonomètriques, exponencials, etc. Per tant, fins i tot en el cas que $f(t, y)$ sigui una funció únicament de t o de y , no sempre podrem trobar funcions elementals que siguin solucions de l'equació diferencial $y' = f(t, y)$.

En general, es considera que una equació diferencial és integrable elementalment quan és possible expressar la solució mitjançant funcions elementals, o bé primitives d'aquestes, que no tenen per què ser necessàriament funcions elementals.

Definició 3 Diem que una equació diferencial s'expressa en la seva forma diferencial si l'escrivim com

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0 \quad (1.6)$$

Evidentment, la forma estàndard d'aquesta equació s'obté fent

$$f(t, y) = -M(t, y)/N(t, y)$$

a l'equació 1.1.



Definició 4 S'anomenen equacions de variables separades les que, en forma diferencial, s'escriuen com

$$M(t)dt + N(y)dy = 0$$

Llavors, la integració és immediata:

$$\int M(t) dt = - \int N(y) dy + C$$

També podem expressar-ho com

$$\int_{t_0}^t M(s) ds = - \int_{y_0}^y N(x) dx$$

Exemple 7 Integreu $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - 1}{y^2}$.

Solució

Ho escrivim com

$$y^2 dy = (t^2 - 1) dt$$

Llavors,

$$\frac{y^3}{3} = \frac{t^3}{3} - t + C; \quad y = (t^3 - 3t + 3C)^{1/3} \quad \blacksquare$$

Exemple 8 Resoleu $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y^2} + t$.

Solució

Ho escrivim com

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right) t$$

Separant variables, obtenim

$$\frac{y^2}{1 + y^2} dy = t dt$$

i, com que $\frac{y^2}{1 + y^2} = 1 - \frac{1}{1 + y^2}$, integrant arribem a

$$y - \arctan y = \frac{t^2}{2} + C$$

En aquest cas, ja no és possible aïllar y en funció de t . ■



1.4. Equació lineal

Definició 5 Una equació lineal de primer ordre és la que es pot escriure com

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \quad (1.7)$$

L'operador $L \equiv \frac{d}{dt} + a(t)$, que transforma una funció y en una funció

$$L[y(t)] = y'(t) + a(t)y(t) \quad (1.8)$$

és lineal. És fàcil comprovar que, si c_1 i c_2 són dues constants arbitràries, llavors

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \quad (1.9)$$

Suposem que $a(t)$ i $f(t)$ són funcions contínues en un determinat interval $I \subset \mathbb{R}$. Considerem que L és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^1(I)$ al $\mathcal{C}(I)$. Per tant, les solucions de l'equació

$$L[y] = f(t) \quad (1.10)$$

es poden escriure com

$$y = y_p + y_h \quad (1.11)$$

on y_p és una solució particular de l'equació 1.10, i y_h és una solució, la més general possible, del nucli de l'operador L , $\ker(L)$, és a dir, del conjunt de solucions que satisfan

$$L[y] = 0 \quad (1.12)$$

Aquesta darrera equació s'anomena *equació homogènia* associada a l'equació 1.10, que es designa, per contrast, com a *equació completa*.

Recordem que $\ker(L)$ és un subespai vectorial de l'espai vectorial en el qual està definit l'operador L .

Observem, també, que, en la solució general, equació 1.11, la solució particular y_p que prenguem és indiferent, ja que la diferència de dues solucions particulars y_a i y_b de l'equació completa, equació 1.10, verifica $L[y_a - y_b] = f - f = 0$. Per tant, $y_a - y_b \in \ker(L)$.

1.4.1. Equació homogènia

Resolem ara l'equació homogènia

$$y'_h + a(t)y_h = 0 \quad (1.13)$$

Si $y_h \neq 0$, podem escriure $y'_h/y_h = -a(t)$ i, integrant,

$$\ln |y_h| = - \int a(t) dt + K; \quad |y_h| = Ce^{-\int a(t) dt}$$



on $C = e^K$ és una constant positiva. Aquesta darrera equació equival a

$$y_h = \pm C e^{-\int a(t) dt}$$

que podem resumir en

$$y_h = C e^{-\int a(t) dt}, \quad C \neq 0$$

Però, en dividir per y_h , hem perdut la solució $y_h = 0$, que anomenem *solució trivial*, que sempre és solució de l'equació lineal homogènia. Per tant, la solució general de l'equació 1.13 serà

$$y_h = C e^{-\int a(t) dt} \quad (1.14)$$

per a C qualsevol.

El conjunt de solucions de la part homogènia de l'equació lineal de primer ordre forma un espai vectorial de dimensió 1.

1.4.2. Equació completa: mètode de variació de les constants

Per integrar l'equació completa, n'hi ha prou a determinar una solució particular. Per a això, utilitzem el mètode anomenat *de variació de les constants*, que permet integrar l'equació completa quan es coneix una solució particular de l'equació homogènia, per exemple, fent $C = 1$ a l'equació 1.14,

$$\phi(t) = e^{-\int a(t) dt} \quad (1.15)$$

Així, proposem una solució de la forma

$$y_p = C(t) \phi(t) \quad (1.16)$$

essent $C(t)$ la funció per determinar.

Substituint l'equació 1.16 a l'equació 1.10, obtenim

$$\begin{aligned} L[y_p] &= C'(t)\phi(t) + C(t)\phi'(t) + a(t)C(t)\phi(t) = \\ &= C'(t)\phi(t) + C(t)[\phi'(t) + a(t)\phi(t)] = \\ &= C'(t)\phi(t) = f(t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

ja que $\phi'(t) + a(t)\phi(t) = 0$.

Per tant, tot integrant $C'(t)\phi(t) = f(t)$, excepte una constant d'integració, que podem suposar nul·la, obtenim

$$C(t) = \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt,$$



i la solució particular serà

$$y_p = \phi(t) \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt \quad (1.18)$$

Finalment, tot sumant-hi la solució general de l'homogènia, la solució general de l'equació completa és

$$y = \phi(t) \left(C + \int \frac{f(t)}{\phi(t)} dt \right) \quad (1.19)$$

Exemple 9 Integreu l'equació

$$y' \cos t + y \sin t = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Solució

L'escrivim com

$$y' + (\tan t)y = \frac{1}{\cos t}$$

Integrem primer l'equació homogènia, $y'_h + (\tan t)y_h = 0$,

$$y_h = Ce^{-\int \tan t dt} = C \cos t$$

Ara busquem una solució particular de l'equació completa a partir de l'equació 1.18, en la forma $y_p(t) = C(t) \cos t$,

$$y_p = \cos t \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \sin t$$

Així, la solució general de l'equació és

$$y = \sin t + C \cos t \quad \blacksquare$$

1.5. Estudi qualitatiu

De vegades, interessa conèixer les propietats d'algunes solucions particulars d'una equació diferencial sense necessitat de resoldre-la explícitament. Ho veurem en el cas d'una equació autònoma,

$$y' = f(y) \quad (1.20)$$

El camp de vectors, donat per $f(y)$, permet identificar els valors y dins l'espai de fases pels quals la funció $y(t)$ és creixent (quan $f(y) > 0$), decreixent (quan $f(y) < 0$) o constant (quan $f(y) = 0$). Així, per exemple, si la solució particular $y(t)$ que compleix la condició inicial $y(t_0) = y_0$ verifica $f(y_0) > 0$, llavors podem afirmar que, a l'entorn de t_0 , $y(t)$ és creixent.



El cas més important correspon a les solucions anomenades d'*equilibri* o constants. Si y_0 és un zero de f , és a dir, $f(y_0) = 0$, llavors la solució particular que satisfà la condició inicial $y(t_0) = y_0$ es manté sempre constant, $y(t) = y_0$, en el seu domini, ja que en y_0 l'equació 1.20 ens proporciona una variació $y'(t_0) = f(y_0) = 0$ d'aquesta solució. Diem que y_0 és un punt d'equilibri de l'equació 1.20.

Exemple 10 Per a l'equació

$$y' = ay; \quad a > 0$$

és clar que la solució d'equilibri és $y(t) = 0$. D'altra banda, qualsevol solució que passi per un punt $y_0 > 0$ serà creixent, ja que $f(y_0) > 0$. Qualsevol altra solució que passi per un punt $y_1 < 0$ serà decreixent, ja que $f(y_1) < 0$. Això es pot veure fàcilment si fem un gràfic y' en funció de y , com el dibuix (a) de la figura 1.1.

Les tendències de les solucions a créixer o decreixer es poden representar com a vectors en l'espai de fases.

Si limitem els valors de l'espai de fases a $y \geq 0$, l'equació diferencial anterior correspon al model de creixement de poblacions donat per la *lei de Malthus*, o model de creixement il·limitat. En aquest cas, la solució d'equilibri $y = 0$ ens diu una obvietat: si la població inicial és nul·la, d'acord amb aquesta llei, no hi ha variació de població. Qualsevol població inicial y_0 positiva dóna lloc a un creixement indefinit de la població. El cas d'un valor $y_1 < 0$ no té sentit. ■

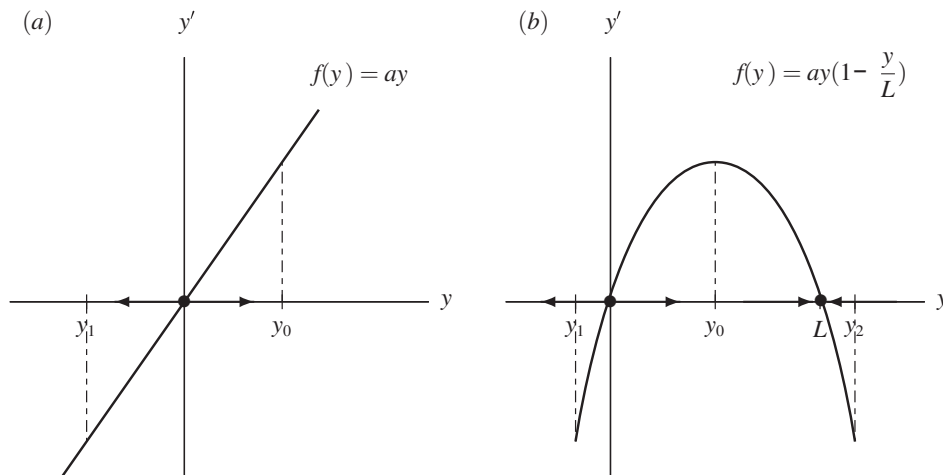


Fig. 1.1
Gràfics que representen y' en termes de y per a una equació $y' = f(y)$. A l'eix y estan ressaltats els punts d'equilibri i el camp de direccions

Exemple 11 L'equació

$$y' = ay(1 - \frac{y}{L}); \quad a, L > 0$$

té dues solucions d'equilibri que satisfan $f(y) = 0$ a l'equació 1.20. Són $y(t) = 0$ i $y(t) = L$. Fixant-nos en el gràfic (b) de la figura 1.1, veiem que qualsevol solució que passi



per $y_1 < 0$ decreixerà indefinidament, ja que $f(y_1) < 0$. Una solució que passi per $y_0 \in (0, L)$ creixerà fins a arribar a $y = L$, i allà s'aturarà, perquè haurà arribat a un punt d'equilibri. Una solució que passi per $y_2 > L$ decreixerà fins a arribar a $y = L$, i allà també s'aturarà. Podem dir, doncs, que aquestes dues darreres solucions particulars tenen un comportament asimptòtic definit: $y(t) \rightarrow L$ quan $t \rightarrow +\infty$.

Si limitem els valors de l'espai de fases a $y \geq 0$, l'equació diferencial anterior correspon al model de creixement de poblacions donat per la *lei logística*, o model de creixement limitat. En aquest cas, qualsevol població inicial no nul·la tendeix a una població límit L . ■

A l'exemple 11, figura 1.1 (b), hem trobat dos tipus de punts d'equilibri. El punt $y = 0$ és un punt *repulsor* de les solucions particulars del seu voltant, mentre que el punt $y = L$ és un punt *atractor* de les solucions del seu entorn. El primer s'anomena *punt d'equilibri inestable* i el segon, *punt d'equilibri estable*, perquè solucions diferents acaben tendint-hi. També es podrien trobar punts *semiestables*, quan són atractors per un costat i repulsors per l'altre.

Si observem el recorregut de les possibles solucions particulars a l'eix y , corresponent a l'espai de fases (sense representar-hi per a res la variable independent t), obtenim les *òrbites* de l'equació diferencial, que donen els diferents comportaments –qualitativament parlant– de totes les possibles solucions. Els punts d'equilibri són, per definició, òrbites de l'equació. A l'exemple 11, a més de les òrbites puntuals $\{0\}$ i $\{L\}$, en tenim tres més: els intervals oberts $(-\infty, 0)$, $(0, L)$ i $(L, +\infty)$.

1.6. Exercicis

1. Quina és l'equació diferencial de la família de corbes $x^3 + y^3 = C$?
2. Una equació $y' = f(x, y)$ és de tipus homogeni si $\forall \alpha \neq 0$ es compleix $f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$. Són homogènies les equacions $y' + 1 = e^{x/y}$, $\ln x^2 = y' + 2 \ln(2y)$?
3. Una equació de tipus homogeni es resol amb el canvi de variables $y(x) = xu(x)$. Trobeu la solució del problema $y' = -(\frac{x}{y})^2$, $y(0) = 1$.
4. De quin tipus és l'equació diferencial tal que la família de corbes $C = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $C \in \mathbb{R}$ n'és la solució general?
5. De quina classe són les corbes tals que, en cada punt (x, y) , la projecció ortogonal del segment de normal comprès entre el punt de contacte a la corba i l'eix OX té punt mitjà $(2x, 0)$.
6. Trobeu l'expressió de les corbes tal que tot punt és punt mitjà del segment de recta tangent en aquest punt, comprès entre els dos eixos.
7. Calculeu quines corbes satisfan que la projecció sobre l'eix OY del tros de normal limitat pel punt de contacte amb la corba i l'eix OY té longitud $\frac{1}{2}$.
8. Per a quina classe de corbes l'àrea del triangle limitat per l'eix OY , el radi vector i la recta tangent a un punt de la corba és igual que l'àrea del triangle limitat per l'eix OX , el radi vector i la recta normal.



9. Trobeu la corba que passa per $(0, 1)$ i en que la recta tangent en el punt (x, y) talla l'eix OX en el punt $(y, 0)$.
10. Quina equació diferencial verifica la corba per la qual l'àrea del triangle que formen l'eix d'abscisses, la tangent a la corba i el radi vector del punt de contacte (x, y) és constant i igual a a^2 ?
11. Calculeu la corba que passa pel punt $(1, 1)$ tal que la tangent a cada punt (x, y) talla l'eix OY a $(0, x^2)$.
12. Quin és l'interval de definició de la solució del problema de valor inicial $y' = xy^2$, $y(0) = 1$.
13. Considerem l'equació $y' + \frac{y}{t} = t^3 y^3$. Trobeu on està definida la solució $y(t)$ tal que $y(1) = 1$.
14. Donada l'equació diferencial $y' = f(x, y)$ d'una família de corbes, la família de corbes que en cada punt són ortogonals a les anteriors ve donada per $y' = -1/f(x, y)$. Calculeu la família de corbes que té per trajectòries ortogonals les solucions de l'equació $x^2 y' - y^2 y' = 2xy$.
15. Trobeu la família de corbes ortogonals a les hipèrboles $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$.
16. Quina equació satisfan les trajectòries ortogonals a la família $x^2 - y^2 = kx$, $k \in \mathbb{R}$?
17. Trobeu l'equació que resulta de fer el canvi $v = \frac{1}{\cos y}$ a l'equació $y' \sin y = \cos y(1 - x \cos y)$.
18. Trobeu la solució del problema de valor inicial $ty' + (2t + 1)y = te^{-2t}$, $y(1) = 0$.
19. La temperatura d'un cos evoluciona temporalment segons la llei $\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$. Justifiqueu que (a) si $k > 0$ i $T(0) > 100$, llavors $T(t) > T(0)$, $\forall t > 0$, i (b) si $k < 0$ i $T(0) < 100$, llavors $T(0) < T(t) \leq 100$, $\forall t > 0$.

1.7. Respostes

1. $y' = -(x/y)^2$.
2. Les dues ho són.
3. $y(x) = (1 - x^3)^{1/3}$.
4. Homogènia.
5. Hipèrboles.
6. $y = \frac{k}{x}$.
7. $y = x^2 + C$.
8. Rectes.
9. $y = e^{-x/y}$.
10. $x - y \frac{dx}{dy} = \frac{2a^2}{y}$.
11. $y(x) = 2x - x^2$.



12. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

13. És definida per $0 < t < \sqrt{2}$.

14. $x^2 + y^2 = 2ax$.

15. $\log y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$.

16. $y' = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

17. $v' = v - x$.

18. $y(t) = (t^2 - 1)e^{-2t} / (2t)$.

19. —



→ 2



Equacions diferencials lineals d'ordre superior

2.1. Equacions de segon ordre

Una equació diferencial lineal de segon ordre es pot escriure com

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \quad (2.1)$$

on $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són funcions que només depenen de x . Observeu que l'equació s'està escrivint en forma *mònica*, és a dir, el coeficient de la derivada d'ordre màxim és 1.

Fent servir la notació de l'operador lineal, podem també escriure

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x); \quad L[y(x)] = R(x) \quad (2.2)$$

Exemple 12 Les equacions $y'' - y' + y = 0$, $x^2y'' - xy' + 2y = x^2$ són lineals de segon ordre. La primera té coeficients constants i la segona té coeficients que són funció de la variable independent. ■

En general, volem resoldre el PVI constituït per l'equació 2.1 amb unes condicions inicials

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

En aquest cas, l'existència i la unicitat de la solució són garantides pel següent teorema.

Teorema 2 (d'existència i unicitat) Si $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, i $x_0 \in I$, aleshores existeix una única solució $y(x)$ del problema de valor inicial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x); \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

en un entorn obert de x_0 dins de I .



Com en les equacions de primer ordre, fem servir la denominació d'equació homogènia per referir-nos a l'equació

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2.3)$$

i d'equació completa si ens referim a

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (2.4)$$

amb $R(x)$ no nul·la. La linealitat de l'operador L garanteix que la diferència de dues solucions de l'equació completa és solució de l'equació homogènia, és a dir, pertany al subespai vectorial $\ker L$. Així mateix, per trobar la solució general y de l'equació completa només cal conèixer una solució particular y_p de l'equació completa i la solució general y_h de l'equació homogènia:

$$y = y_p + y_h$$

2.1.1. Solució de l'equació homogènia

El càlcul de la solució general de l'equació homogènia es redueix a trobar una base del $\ker L$. Vegem el teorema següent, que també farem servir en equacions d'ordre superior.

Teorema 3 (Principi de superposició) *Si $y_1, y_2, \dots, y_k$ són solucions d'una equació lineal homogènia, llavors $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$ també n'és solució, $\forall c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.*

Aquest resultat ens dona un mètode per construir solucions, ja que amb dues solucions podem obtenir-ne infinites. Fixem-nos en dos casos particulars:

- Si y_1 és solució d'una equació lineal homogènia, aleshores $y = ky_1$ també ho és $\forall k \in \mathbb{R}$.
- En particular, fent $k = 0$, la solució trivial $y = 0$ sempre és solució d'una equació lineal homogènia.

Exemple 13 Considerem l'equació $y'' + y' = 0$. És clar que la funció $y = 1$ n'és solució. D'altra banda, la funció $y = e^x$ n'és també solució. Per tant, les funcions de la forma $y(x) = c_1 + c_2e^x$ en són també solució. ■

Exemple 14 Busquem ara solucions no trivials de l'equació $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solució

Podem resoldre aquesta equació assajant solucions de la forma $y = x^n$. Així, $y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n-1)x^{n-2}$. Si ho introduïm a l'equació, queda

$$n(n-1)x^n + 2nx^n - 2x^n = [n(n-1) + 2n - 2]x^n = 0$$

Llavors, perquè la igualtat per a valors $x \neq 0$ sigui vàlida, només cal que $n^2 + n - 2 = 0$. Per tant, les solucions s'obtenen de $n = 1, -2$, i són x, x^{-2} . En general, $y = c_1x + c_2x^{-2}$ són solució de l'equació. ■

Quan estudiem sistemes d'equacions, veurem que, per a un operador diferencial lineal L d'ordre n , es compleix $\dim \ker L = n$. És a dir, la solució general d'una equació lineal



homogènia d'ordre n s'obté a partir de n solucions linealment independents. Per tant, a l'exemple anterior ja hauríem obtingut la solució general de l'equació.

2.2. Wronskià

Generalitzant el que havíem dit a les equacions de primer ordre, si l'operador diferencial L és d'ordre n , considerem que és una aplicació lineal de l'espai vectorial $\mathcal{C}^n(I)$ a $\mathcal{C}(I)$, per a un cert interval $I \subset \mathbb{R}$. Naturalment, els conceptes algebraics de dependència i independència lineal de vectors també s'apliquen a les funcions pertanyents a aquests espais vectorials. No obstant això, veurem un mètode específic per estudiar la dependència o la independència lineal de les funcions.

Definició 6 *Siguin $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, n funcions que suposem derivables almenys fins a ordre $n-1$ en un cert interval I . El seu wronskià es defineix com el determinant*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

En darrer terme, el wronskià $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ és una funció de la variable x en l'interval I ; per això, de vegades també escriurem $W(x)$.

En àlgebra, havíem vist que, si el wronskià d'un conjunt de funcions $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ és no nul per a algun $x \in I$, llavors les funcions són linealment independents. El recíproc no és sempre cert, com veurem en el darrer dels exemples següents.

Exemple 15 Calculem el wronskià d'algunes famílies de funcions:

$$\blacksquare W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$\blacksquare W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

$$\begin{aligned} \blacksquare W(\sin^2 x, 1 - \cos 2x) &= \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 - \cos 2x \\ 2 \sin x \cos x & 2 \sin 2x \end{vmatrix} = \\ &= 2 \sin^2 x \sin 2x - 2 \sin x \cos x (1 - \cos 2x) = \\ &= \sin 2x (2 \sin^2 x - 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \end{aligned}$$

Recordem que es verifica $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$.

- $\blacksquare$ Les funcions $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = |x|^3$ són linealment independents en tot $\mathbb{R}$. És fàcil veure que, per a $x < 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, -x^3) = 0$, ja que les seves columnes són proporcionals. Igualment, per a $x \geq 0$, $W(f_1, f_2) = W(x^3, x^3) = 0$. Per tant, que el wronskià sigui nul no sempre equival a que les funcions siguin linealment dependents. $\blacksquare$

El recíproc és cert, per exemple, si les funcions $f_1, f_2, \dots, f_n$ són analítiques, és a dir, si admeten un desenvolupament de Taylor en tot punt, com passa amb les funcions dels tres primers exemples.



2.3. Equacions homogènies

El nostre objectiu és ara obtenir la solució general de l'equació lineal homogènia. Ho farem a partir de combinacions lineals de solucions linealment independents.

Lema 1 *Siguin $y_1(x), y_2(x)$ dues solucions de l'equació homogènia 2.3. Llavors, el seu wronskià, o bé no s'anul·la mai, o bé és idènticament nul.*

Demostració. El wronskià de y_1 i y_2 és $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Derivant obtenim

$$W'(x) = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

Tenint en compte que y_1 i y_2 són solucions de la mateixa equació diferencial,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0; \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

multipliquem la primera equació per y_2 , la segona per y_1 , i restem,

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + P(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

És a dir,

$$\frac{dW}{dx} + P(x)W = 0$$

Per tant, el wronskià és de la forma

$$W(x) = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

És clar, doncs, que $W(x)$ només s'anul·la quan $C = 0$, ja que l'exponencial és sempre positiva.

Lema 2 *Dues solucions no nul·les $y_1(x), y_2(x)$ són linealment dependents en I si, i només si, el seu wronskià és idènticament nul.*

Demostració.

(*Condició suficient.*) Suposem que $y_1(x), y_2(x)$ són linealment dependents en I . Llavors, $y_2(x) = c y_1(x)$, $y_2'(x) = c y_1'(x)$; $c \in \mathbb{R}$. Per tant, el wronskià és $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = y_1(x)c y_1'(x) - c y_1(x)y_1'(x) = 0$ en tot I .

(*Condició necessària.*) Suposem ara $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$ en I . Observem que, si per a un punt $x_0 \in I$ fos $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, hauríem de concloure que $y_1(x)$ és la solució trivial, ja que la solució del PVI és única. El mateix es pot dir per a y_2 . Hem d'excloure, doncs, aquesta situació. Per tant, si $y_1(x_0) = 0$, llavors ha de ser $y_2(x_0) = 0$. I, recíprocament, en els punts x tals que $y_2(x) \neq 0$, llavors $y_1(x) \neq 0$. Per tant, situem-nos en qualsevol x tal que $y_1(x)y_2(x) \neq 0$. Si dividim $y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$ per $y_1(x)y_2(x)$, tenim $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = 0$, d'on $\frac{d \ln y_2(x)}{dx} = \frac{d \ln y_1(x)}{dx}$. Integrant, en resulta la proporcionalitat volguda, $y_2(x) = c y_1(x)$, amb c constant. A més, es compleix $y_2'(x) = c y_1'(x)$. D'altra banda, si hi ha un punt x_0 tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, tindrem $y_2'(x_0) = c y_1'(x_0)$, i ja hem vist que aquestes derivades no poden ser nul·les. Per tant, també obtenim proporcionalitat, $y_2(x) = \frac{y_2'(x_0)}{y_1'(x_0)} y_1(x)$.



Ara ja estem en condicions d'enunciar el resultat següent. Ho fem generalitzant a ordres superiors.

Teorema 4 Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ són n solucions linealment independents en un interval I de l'equació lineal homogènia d'ordre n ,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I$$

llavors

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

n'és la solució general en I .

Demostració. Vegem la demostració en el cas de segon ordre. Sigui $y(x)$ una solució qualsevol de l'equació lineal homogènia equació 2.3. Volem veure que existeixen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Sabem que una solució queda totalment determinada quan se sap el valor de la solució i la seva derivada en un mateix punt. Per tant, hem de trobar els valors c_1 i c_2 que en un punt $x_0 \in I$ verifiquen

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0)$$

Perquè aquest sistema tingui solució única, cal que el wronskià

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

sigui diferent de zero. Però, degut als lemes anteriors, aquest determinant és no nul per a solucions linealment independents en un interval I , i, a més, és vàlid per a qualsevol punt $x_0 \in I$. Així queda, doncs, demostrat el resultat en el cas de segon ordre. La generalització a ordres superiors és immediata.

Exemple 16 Comproveu que les funcions de la forma $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són la solució general de l'equació $y'' + y = 0$. Calculeu la solució que compleix $y(0) = y'(0) = 1$.

Solució

Vegem primer que $y = \sin x$ i $y = \cos x$ satisfan l'equació. En efecte, si $y = \sin x$, llavors $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ i $y'' + y = 0$. Així mateix, si $y = \cos x$, llavors $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ i també verifica l'equació. En general, les combinacions de la forma $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ són també solució de l'equació.

Ara, per comprovar que totes les solucions són d'aquesta forma, només cal veure que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$. Això estava vist a l'exemple 15, essent $W(\sin x, \cos x) = -1$.

Si volem que la solució compleixi les condicions inicials, imposen

$$y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 1$$

$$y'(0) = c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = 1$$



Llavors $c_1 = 1, c_2 = 1$, i la solució que busquem és $y(x) = \sin x + \cos x$. ■

Una altra aplicació interessant del wronskià és trobar l'equació diferencial lineal i homogènia de grau mínim que satisfà una família determinada de funcions linealment independents. Ho veiem tot continuant l'exemple anterior.

Exemple 17 Trobeu l'equació lineal i homogènia d'ordre mínim que té per solucions $\sin x, \cos x$.

Solució

Ja hem vist que $W(\sin x, \cos x) \neq 0$. Per tant, aquestes són dues solucions linealment independents, a tot $\mathbb{R}$, d'una equació de segon ordre. Qualsevol altra solució $y(x)$ que sigui solució de l'equació buscada ha de ser linealment dependent de les solucions anteriors. Per tant, ha de verificar

$$W(\sin x, \cos x, y(x)) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y(x) \\ \cos x & -\sin x & y'(x) \\ -\sin x & -\cos x & y''(x) \end{vmatrix} = 0$$

Ara només hem de calcular-ne el determinant, per exemple, per adjunts de la tercera columna,

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} y = -y'' + 0 y' - y = 0$$

L'equació d'ordre mínim és, doncs, $y'' + y = 0$. ■

2.4. Equacions homogènies a coeficients constants

En general, no és fàcil trobar solucions particulars d'una equació diferencial, encara que sigui lineal i homogènia, però quan l'equació té coeficients constants, veurem que és molt senzill. Primer ho resolldrem per a segon ordre. Suposem l'equació

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

amb $p, q \in \mathbb{R}$.

Podem escriure l'equació en la forma de l'operador diferencial

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + p \frac{d}{dx} + q; \quad L[y(x)] = 0 \quad (2.6)$$

Provem ara solucions de la forma $y = e^{mx}$, on m és una incògnita per determinar. Com que $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2 e^{mx}$, tenim

$$L[e^{mx}] = (m^2 + pm + q)e^{mx} = 0$$

Per tant, les funcions de la forma e^{mx} són solucions de l'equació 2.6 sempre que m sigui arrel del polinomi característic

$$P(m) = m^2 + pm + q \quad (2.7)$$



L'equació $P(m) = 0$ s'anomena *equació característica* associada a l'equació diferencial.

En la resolució d'aquesta equació, convé distingir diversos casos.

- (i) Cas $p^2 - 4q > 0$. L'equació característica admet dues solucions reals diferents $m_1 \neq m_2$. A més, es compleix $W(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}) \neq 0$. Per tant, $y_1 = e^{m_1 x}$ i $y_2 = e^{m_2 x}$ són dues solucions independents de l'equació diferencial. Així doncs, la solució general és

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (ii) Cas $p^2 = 4q$. Només hi ha una arrel real doble, m , de l'equació característica. Una solució és $y_1 = e^{mx}$, però per trobar la solució general necessitem una altra solució linealment independent. Tot i que es pot trobar pel mètode de variació de les constants a partir de l'anterior, ho farem amb el raonament següent:

Com que $L[e^{mx}] = P(m)e^{mx}$, derivant respecte de m obtenim

$$\frac{\partial}{\partial m} L[e^{mx}] = L\left[\frac{\partial}{\partial m} e^{mx}\right] = [P'(m) + mP(m)]e^{mx}$$

Com que m és arrel doble de $P(m)$, també és arrel de $P'(m)$. Per tant, tindrem

$$L[xe^{mx}] = 0$$

Llavors, la solució general serà

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{mx}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (iii) Cas $p^2 < 4q$. L'equació característica no té solucions reals. Per tant, tindrem arrels complexes conjugades $\alpha \pm i\beta$, i $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ seran solucions de l'equació 2.6, però en el camp complex. Ara bé, per obtenir dues solucions reals independents només cal treballar amb una de les solucions complexes. Tenint en compte la fórmula d'Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

podem escriure

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \quad (2.8)$$

Com que $L[e^{(\alpha + i\beta)x}] = 0$, s'han d'anul·lar per separat les parts real i imaginària. Així,

$$L[e^{\alpha x} \cos \beta x] = 0; \quad L[e^{\alpha x} \sin \beta x] = 0 \quad (2.9)$$

Clarament aquestes solucions són linealment independents, ja que el seu wronskià val

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x) = \beta e^{2\alpha x}$$

que és diferent de zero perquè $\beta \neq 0$. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



Exemple 18 Trobeu la solució general de l'equació $y'' - y' - 2y = 0$.

Solució

L'equació característica és $m^2 - m - 2 = 0$, amb arrels $m_1 = -1$, $m_2 = 2$. La solució general de l'equació diferencial és, doncs,

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad \blacksquare$$

Exemple 19 Trobeu la solució general de l'equació $y'' + 2y' + y = 0$.

Solució

L'equació característica $m^2 + 2m + 1 = 0$ té arrel $m = -1$ doble. Llavors, la solució general serà

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x} \quad \blacksquare$$

Exemple 20 Resoleu l'equació $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Solució

L'equació característica és $m^2 + 2m + 2 = 0$, amb arrels complexes $m_1 = -1 + i$, $m_2 = -1 - i$. Per tant, la solució general és

$$y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x \quad \blacksquare$$

2.5. Equacions d'ordre superior

Generalitzem els resultats anteriors a ordre n . Considerem l'equació lineal homogènia a coeficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2.10)$$

amb constants $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. L'equació característica associada és

$$m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0$$

que pot tenir arrels reals i complexes amb diferents multiplicitats. Vegem quina és la contribució de cada una d'elles a la solució general.

- Per a cada arrel real m amb multiplicitat k , hi ha k solucions linealment independents de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, \dots, x^{k-1} e^{mx}$$

Aleshores, la solució general és

$$(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{mx}$$

Si l'arrel és simple, només considerem el terme $c_1 e^{mx}$.



- Per a cada parella d'arrels complexes conjugades $\alpha \pm i\beta$, amb multiplicitat k , tenim $2k$ solucions linealment independents de la forma

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Llavors, cada parella d'arrels complexes conjugades contribueix a la solució general amb

$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x + (c_{k+1} + c_{k+2} x + \dots + c_{2k} x^{k-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Si la parella d'arrels complexes és simple, només tenim dos termes,

$$(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

Observació. Als apèndixs A.2 i D.2 s'obtenen les solucions d'aquestes equacions tot fent ús de l'operador derivada, a partir del teorema de descomposició primària d'endomorfismes. És un mètode alternatiu que pot seguir l'alumne que hagi estudiat un curs complet d'àlgebra lineal.

Exemple 21 Resoleu $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y' - y = 0$.

Solució

L'equació característica és

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = (m - 1)^3 = 0$$

L'arrel real $m = 1$ és triple. Llavors, la solució general és

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x \quad \blacksquare$$

Exemple 22 Resoleu l'equació $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y' + 4y = 0$.

Solució

L'equació característica és $m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 8m + 4 = (m^2 + 2m + 2)^2 = 0$. Les arrels complexes $m = -1 \pm i$ són dobles. Per tant, la solució general és

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x} \cos x + (c_3 + c_4 x) e^{-x} \sin x \quad \blacksquare$$

Exemple 23 Resoleu l'equació $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y^{(2)} + 4y' + 4y = 0$.

Solució

L'equació característica associada és, $m^4 + 4m^3 + 5m^2 + 4m + 4 = 0$, que té les arrels $m = -2$ doble i $m = \pm i$ simples. Per tant, la solució general és

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \quad \blacksquare$$

Exemple 24 Resoleu l'equació $y^{(5)} = 0$.

*Solució*

L'equació característica associada és $m^5 = 0$, que té una única arrel $m = 0$ de multiplicitat 5. La solució general és

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4$$

■

2.6. Equacions lineals no homogènies

Hem vist que, per resoldre l'equació completa, cal conèixer una solució particular, juntament amb la solució general de l'equació homogènia. Vegem com obtenir una solució particular de l'equació completa. Ho farem per al cas d'una equació d'ordre 2, equació 2.1, que es generalitza fàcilment a ordres superiors.

Considerem dos mètodes:

- Mètode de variació de les constants: És un mètode general que serveix tant per a equacions amb coeficients constants com no constants.
- Mètode dels coeficients indeterminats: És un mètode que ens estalvia la integració, però que només es sol aplicar a equacions amb coeficients constants i per a uns casos especials del terme no homogeni de l'equació.

2.6.1. Mètode de variació de les constants

És la generalització del mètode que havíem utilitzat per a equacions lineals de primer ordre i és vàlid per a equacions diferencials amb coeficients constants o variables. Ho resoldrem per a una equació lineal de segon ordre, escrita en forma mònica,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (2.11)$$

amb una funció arbitrària $f(x)$ del terme independent.

Per trobar una solució particular y_p de l'equació 2.11, cal, però, saber la solució general

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

de la part homogènia de l'equació, on c_1, c_2 són constants i $y_1(x), y_2(x)$ són dues solucions particulars linealment independents de l'equació homogènia.

El mètode consisteix a substituir les constants c_1, c_2 per funcions desconegudes a determinar, $c_1(x), c_2(x)$, de manera que y_p sigui de la forma

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (2.12)$$

i sigui solució de l'equació 2.11.

El problema és ara trobar aquestes funcions incògnites $c_1(x)$ i $c_2(x)$. Però, com que hem passat de tenir una funció desconeguda y_p a tenir-ne dues, necessitem una equació que les relacioni. Derivem l'equació 2.12 i obtenim



$$y_p' = c_1'(x)y_1 + c_1(x)y_1' + c_2'(x)y_2 + c_2(x)y_2'$$

Ara tornem a derivar i, a fi d'evitar que apareguin les derivades segones de $c_1(x)$ i $c_2(x)$, imposam el lligam

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \quad (2.13)$$

Aquesta és, doncs, l'equació que les relaciona. Aleshores, ens queda

$$y_p' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

i derivant,

$$y_p'' = c_1'(x)y_1' + c_1(x)y_1'' + c_2'(x)y_2' + c_2(x)y_2''$$

Ara, imposam que l'equació 2.12 sigui solució de l'equació 2.11,

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1' + c_1(x)y_1'' + c_2'(x)y_2' + c_2(x)y_2'' + P(x)c_1(x)y_1' + \\ + P(x)c_2(x)y_2' + Q(x)c_1(x)y_1 + Q(x)c_2(x)y_2 = f(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

i, reordenant els termes, obtenim

$$c_1(x)[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + c_2(x)[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$$

Com que y_1, y_2 són dues solucions de l'equació homogènia, els dos primers termes anteriors es fan zero,

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

i tan sols ens queda

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \quad (2.15)$$

Les equacions 2.13 i 2.15 constitueixen un sistema lineal de dues equacions amb les incògnites $c_1'(x)$ i $c_2'(x)$,

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

El determinant associat al sistema és el wronskià $W(y_1, y_2)$, que és no nul, perquè y_1 i y_2 són dues solucions linealment independents,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.17)$$

La resolució d'aquest sistema (e.g. per la regla de Cramer) ens dóna les derivades de les funcions incògnita, que després integrarem,

$$c_1(x) = \int -\frac{y_2 f}{W} dx; \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

No cal sumar una constant d'integració, perquè només ens interessa una solució particular.



La solució particular que hem trobat és, doncs,

$$y_p = y_1 \int -\frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx \quad (2.18)$$

i la solució general de l'equació 2.11 és

$$y = y_1 \left(\int -\frac{y_2 f}{W} dx + c_1 \right) + y_2 \left(\int \frac{y_1 f}{W} dx + c_2 \right) \quad (2.19)$$

amb c_1 i c_2 constants.

Exemple 25 Resoleu l'equació diferencial

$$y'' + 4y = \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x}$$

Solució

Resolem primer l'equació homogènia

$$y'' + 4y = 0$$

amb equació característica associada $m^2 + 4 = 0$ i arrels $m = \pm 2i$. Aleshores, la solució general de l'equació homogènia és

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

amb c_1 i c_2 constants.

Ara proposem una solució particular de l'equació completa que sigui de la forma

$$y = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$$

El mètode de variació de les constants ens porta a resoldre el sistema

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(-2 \sin 2x) + c_2'(x) 2 \cos 2x = \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{cases} \quad (2.20)$$

Com el wronskià és no nul,

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2$$

el sistema tindrà solució única. Aplicant, per exemple, la regla de Cramer, trobem les dues incògnites c_1' i c_2' ,

$$c_1'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(-\sin 2x \cos 2x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right)$$



$$c_2'(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & \cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (\cos^2 2x - 1) = -\frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Integrant i recordant les fórmules trigonomètriques de l'angle doble, calculem les funcions desconegudes c_1 i c_2 ,

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{2} \sin 4x + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \right) dx = \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \\ c_2(x) &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = -\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x \end{aligned}$$

Llavors, la solució particular és

$$y_p = \left(\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \sin 2x$$

i la solució general de l'equació diferencial completa vé donada per

$$y = \left(c_1 + \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| \right) \cos 2x + \left(c_2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{16} \sin 4x \right) \sin 2x$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

2.6.2. Equació d'ordre n

Tot generalitzant el cas anterior, ens proposem calcular una solució particular d'una equació d'ordre n ,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

on $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ són coeficients constants o variables. Suposem que

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

és la solució general de la part homogènia de l'equació, amb $c_1, c_2, \dots, c_n$ constants i $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ solucions linealment independents.

Pel mètode de variació de les constants, proposem una solució particular del tipus

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

Recordem que les derivades de les funcions incògnites $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ són les solucions del sistema $n \times n$

$$\begin{cases} c_1'y_1 & + & c_2'y_2 & + & \dots & + & c_n'y_n & = & 0 \\ c_1'y_1' & + & c_2'y_2' & + & \dots & + & c_n'y_n' & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ c_1'y_1^{(n-1)} & + & c_2'y_2^{(n-1)} & + & \dots & + & c_n'y_n^{(n-1)} & = & f(x) \end{cases} \quad (2.21)$$



Com que el determinant associat al sistema és el wronskià de $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ i, per tant, no nul, el sistema té solució única. Ara només cal seguir el procediment ja vist per a equacions de segon ordre, i s'integra cada una de les $c'_k(x)$ per tal d'obtenir les n funcions $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$.

2.6.3. Mètode dels coeficients indeterminats

Aquest mètode genèric s'utilitza per calcular solucions particulars de l'equació 2.11 quan $f(x)$ és una exponencial, un polinomi, un sinus o un cosinus, i, en general, també quan és un producte d'aquestes funcions, és a dir,

$$f(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) e^{\alpha x} \sin \beta x + (b_0 + a_1x + \dots + b_nx^n) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (2.22)$$

Consisteix a substituir una solució de la mateixa forma que $f(x)$ a l'equació diferencial i, després, ajustar els coeficients per tal que l'equació es compleixi. Ho veurem amb uns exemples. El mètode també es coneix amb el nom de *mètode de la conjectura prudent*.

Exemple 26 Calculeu una solució particular de

$$y'' + y' + y = \cos 2x$$

Solució

Proposem una solució de la forma

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

ja que totes les seves derivades són també funcions trigonomètriques de l'angle $2x$. El problema consisteix, doncs, a determinar els valors de A i B que satisfan l'equació diferencial proposada. Així,

$$y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

Substituint a l'equació diferencial, obtenim

$$(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x$$

és a dir,

$$(-4A + 2B + A) \cos 2x + (-4B - 2A + B) \sin 2x = \cos 2x$$

Per tant,

$$-4A + 2B + A = 1, \quad -4B - 2A + B = 0$$

La solució d'aquest sistema és $A = -\frac{3}{13}, B = \frac{2}{13}$. Per tant, la solució particular que trobem és

$$y = -\frac{1}{13}(3 \cos 2x - 2 \sin 2x) \quad \blacksquare$$



Exemple 27 Trobeu una solució particular de l'equació

$$y'' + y' + y = x^2$$

Solució

Proposem una solució genèrica, que és un polinomi del mateix grau que la part no homogènia,

$$y = A + Bx + Cx^2$$

amb derivades

$$y' = B + 2Cx, \quad y'' = 2C$$

Substituïm a l'equació diferencial i agrupem per graus,

$$Cx^2 + (B + 2C)x + (A + B + 2C) = x^2$$

Ara iguaem els termes corresponents a les mateixes potències de la x ,

$$C = 1, \quad B + 2C = 0, \quad A + B + 2C = 0$$

Per tant, $C = 1, B = -2, A = 0$. Una solució particular és, doncs,

$$y = x^2 - 2x$$

■

Exemple 28 Calculeu la solució general de

$$y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{3x}$$

Solució

Primer busquem una solució particular. Semblantment a l'exemple anterior, provem una solució del tipus

$$y = (A + Bx)e^{3x}$$

Les seves derivades són

$$y' = (3A + B + 3Bx)e^{3x}, \quad y'' = (9A + 6B + 9Bx)e^{3x}$$

Lavors, substituïnt a l'equació diferencial, obtenim

$$[(9A + 6B + 9Bx) - 3(3A + B + 3Bx) + 2(A + Bx)]e^{3x} + (2A + 3B + 2Bx)e^{3x} = (1 + x)e^{3x}$$

d'on

$$2A + 3B = 1, \quad 2B = 1$$

Per tant, $B = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{4}$. Una solució particular és

$$y = \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right)e^{3x}$$



Ara calculem la solució general de l'equació homogènia. L'equació característica és $m^2 - 3m + 2 = 0$, que té per solucions $m = 1, 2$. Per tant, la solució general de l'homogènia és

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Finalment, la solució general de l'equació completa és

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{3x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Observem que la solució particular que hem obtingut no és de la mateixa família d'exponencials que les obtingudes per a l'equació homogènia. ■

Exemple 29 Calculeu una solució particular de l'equació

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

Solució

Si proposem una funció de la forma

$$y = Ae^x$$

i substituïm, obtenim $0 = e^x$, que clarament no té solució. El problema amb què ens trobem és que la funció que proposem és ja solució de l'equació homogènia.

Si abans haguéssim resolt l'equació homogènia, hauríem vist que l'equació característica $m^2 - 2m + 1 = 0$ té per solució l'arrel $m = 1$, de multiplicitat 2. Per tant, la solució que proposem, i també totes les de la forma $y = (A + Bx)e^x$, són solucions de l'homogènia, associades a l'arrel $m = 1$.

En aquests casos, la solució que cal proposar és

$$y = Ax^2 e^x$$

és a dir, multiplicar Ae^x per x^k , amb k igual a la multiplicitat de l'arrel corresponent de l'equació característica.

Així,

$$y' = 2Axe^x + Ax^2 e^x, \quad y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2 e^x$$

Substituint,

$$[(2A + 4Ax + Ax^2) - 2(2Ax + Ax^2) + Ax^2]e^x = e^x$$

Ara, simplificant i igualant termes corresponents a iguals potències de la x , obtenim

$$2A = 1, \quad 4A - 4A = 0, \quad A - 2A + A = 0$$

Per tant, $A = \frac{1}{2}$. Una solució particular és $\frac{1}{2}x^2 e^x$ i la solució general és

$$y = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2) e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

■



Podem expressar aquest criteri de forma més general: si el terme no homogeni de l'equació és de la forma que apareix a l'equació 2.22, i l'equació característica té una arrel $\alpha + i\beta$ de multiplicitat k , llavors cal proposar una solució particular com

$$y = x^k [(A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x + (B_0 + B_1x + \cdots + B_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x] \quad (2.23)$$

2.6.4. Principi de superposició

Degut a la linealitat dels operadors diferencials que estem estudiant, es pot aplicar el principi de superposició per calcular solucions particulars d'equacions diferencials lineals no homogènies, tot fent el càlcul de solucions particulars terme a terme.

Teorema 5 Si $y_1(x)$ verifica

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = f_1(x)$$

i $y_2(x)$ satisfà

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = f_2(x)$$

aleshores, $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ és solució de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

Vegem-ne un exemple.

Exemple 30 Determineu una solució particular de l'equació

$$y'' + y' + y = \cos 2x + x^2$$

Solució

El principi de superposició ens permet obtenir una solució de la forma

$$y_p = y_1 + y_2$$

on y_1 és una solució particular de

$$y'' + y' + y = \cos 2x$$

i y_2 ho és de

$$y'' + y' + y = x^2$$

En els exemples 26 i 27 havíem resol aquestes equacions per separat i havíem obtingut

$$y_1 = -\frac{1}{13}(3 \cos 2x - 2 \sin 2x), \quad y_2 = x^2 - 2x$$

Per tant,

$$y_p = -\frac{1}{13}(3 \cos 2x - 2 \sin 2x) + x^2 - 2x \quad \blacksquare$$



2.7. Exercicis

1. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de

$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$

trobeu-ne un sistema fonamental de solucions.

2. Trobeu la solució general de l'equació $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.
3. Mitjançant el canvi $z = (\ln |y|)'$, calculeu en quina equació es transforma l'equació diferencial $y'' + ay' + by = 0$, on $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Trobeu en quina equació es transforma l'equació

$$y'' - f(x)y = 0$$

mitjançant el canvi $z = y'/y$.

5. Donada l'equació $y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$, amb $f(t) + g(t) + 1 = 0$, trobeu-ne una solució.
6. Calculeu en quina equació es transforma $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = xe^x$, amb el canvi $y = xv$.
7. Calculeu l'ordre mínim de l'equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants que admet com a solució particular la funció $12t^2 + 9t^3 \sin(t) - te^{13t}$.
8. Siguin $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x^3, & \text{altrament} \end{cases}$$

Considerem l'equació $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, amb $a(x), b(x)$ funcions contínues. Raoneu si $\{f_1, f_2\}$ pot ser-ne un sistema fonamental de solucions.

9. Si fem el canvi de variable $s = \tan t$ dins l'equació $y'' - 2 \tan t y' + (1 + \tan^2 t)^2 y = 0$, quina equació diferencial obtenim en la nova variable s ?
10. Trobeu la solució general de l'equació diferencial $y'' + y = \cos t + t$.
11. Calculeu quina és l'equació lineal homogènia amb coeficients constants de menor ordre que admet com a solució $x \sin x$.
12. Considereu l'equació lineal homogènia $y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$. Sabent que la funció $y_1(t) = t$ n'és solució, trobeu la solució que verifica que $y(1) = 0$ i $y'(1) = -1$.
13. Sabent que

$$ty'' - y' + \frac{3}{4t}y = 0$$

admet solucions de la forma t^k , $k \in \mathbb{R}$, trobeu la solució general de l'equació.

14. Si te^{2t} i e^{-t} són solucions de l'equació diferencial amb coeficients constants $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, quant val a_0 ?



2.8. Respostes

1. $\{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x, x e^x \cos x, x e^x \sin x\}$.
2. $y = C_1 \exp 2t + C_2 \exp(-t) + C_3 \exp(-3t)$.
3. $z' + z^2 + az + b = 0$.
4. $z' + z^2 = f(x)$.
5. $y(t) = e^t$ és solució.
6. $v'' + v = e^x$.
7. 13.
8. $\{f_1, f_2\}$ no pot ser un sistema fonamental de solucions perquè $W(f_1(x), f_2(x))=0$, per a tot $x \in [-1, 1]$.
9. $y'' + y = 0$.
10. $\{y \mid y(t) = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t + a \sin t + b \cos t, a, b \in \mathbb{R}\}$.
11. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.
12. $y(t) = t - t^2$.
13. $y(t) = at^{\frac{1}{2}} + bt^{\frac{3}{2}}$.
14. $a_0 = 4$.

→ 3



Sistemes d'equacions diferencials lineals

3.1. Introducció

Definició 7 Un sistema d'equacions diferencials lineals de primer ordre és un conjunt d'equacions en la forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1^1(t)x_1(t) + a_1^2(t)x_2(t) + \cdots + a_1^n(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_2^1(t)x_1(t) + a_2^2(t)x_2(t) + \cdots + a_2^n(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_n^1(t)x_1(t) + a_n^2(t)x_2(t) + \cdots + a_n^n(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

o, de manera abreujada, en forma matricial,

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \quad (3.2)$$

on $A(t)$ és la matriu de coeficients del sistema donat per l'equació 3.1, i $\vec{b}(t)$ és un vector de termes independents. El sistema serà homogeni si $\vec{b}(t) = \vec{0}$.

3.1.1. Propietats generals

Com al capítol anterior, podem fer servir la notació d'operador diferencial per escriure l'equació 3.2,

$$L[\vec{x}] = \left(\frac{d}{dt} - A(t) \right) \vec{x} \quad (3.3)$$

Llavors, el sistema homogeni associat a l'equació 3.2 ve donat per

$$L[\vec{x}] = \vec{0}$$



mentre que el sistema complet és

$$L[\vec{x}] = \vec{b}(t)$$

Gràcies a la linealitat de l'operador L , l'estructura de les solucions prové de la generalització immediata de la que es tenia per a equacions diferencials escalars. Així, per exemple,

- les solucions del sistema homogeni són les funcions que pertanyen al $\ker L$
- la solució trivial és sempre solució del sistema homogeni
- la diferència de solucions particulars del sistema complet és solució del sistema homogeni
- la solució general del sistema complet s'obté sumant una solució particular qualsevol a la solució general del sistema homogeni
- es compleix el principi de superposició, tant per a les solucions del sistema homogeni, com per a les del complet

Teorema 6 (d'existència i unicitat de les solucions) Si $A(t)$ i $\vec{b}(t)$ són contínues en un interval $I \subset \mathbb{R}$, llavors el problema de valor inicial

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (3.4)$$

té una única solució en un obert contingut en I .

En destaquem les propietats i definicions següents:

- si els coeficients de $A(t)$ són continus $\forall t \in \mathbb{R}$, les solucions també ho són
- la solució $\vec{x}(t)$ és un *camp vectorial* de classe $\mathcal{C}^1$ dins l'espai de fases $\mathbb{R}^n$
- per a una solució $\vec{x}(t)$, el conjunt de valors $(t, \vec{x}(t)) \in (I, \mathbb{R}^n)$ és una *corba integral*, gràfic de la solució del sistema

3.2. Relació entre un sistema i una equació

Vegem quina relació hi ha entre un sistema de n equacions diferencials de primer ordre i una única equació diferencial d'ordre n .

Considerem l'equació

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (3.5)$$

que escrivim amb unes noves variables. Primer definim $x_1 = y$, i després definim recurrentment les derivades successives de y :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + f(t) \end{cases} \quad (3.6)$$



Llavors, comparant amb l'equació 3.1, tenim

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

El pas d'equació a sistema sempre és possible i, per tant, es pot considerar que les equacions d'ordre n constitueixen un cas particular dels sistemes d'equacions diferencials.

Exemple 31 L'equació diferencial

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

s'escriu en forma de sistema, definint $x_1 = y$, com

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

3.3. Sistemes homogenis

Teorema 7 *Les solucions del sistema homogeni*

$$L[\vec{x}(t)] = \vec{0} \quad (3.8)$$

formen un espai vectorial de dimensió n .

L'esbós de la demostració és el següent. Suposem que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$. En ella, qualsevol condició inicial s'expressa com

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$$

Considerem ara les solucions (que existeixen i són úniques) $\vec{\phi}_i$ dels n problemes de valor inicial

$$L[\vec{\phi}_i] = \vec{0}, \quad \vec{\phi}_i(t_0) = \vec{e}_i; \quad i = 1, \dots, n$$

Llavors,

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{\phi}_i(t)$$

és una solució que verifica la condició inicial

$$\sum_{i=1}^n x_i \vec{\phi}_i(t_0) = \vec{x}_0$$

i, per tant, és única. Així, $\{\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)\}$ és una base de solucions del $\ker L$.



3.3.1. Dependència i independència lineal de funcions

Proposició 1 Considerem un conjunt de funcions vectorials (no parlem encara de solucions d'una equació diferencial) $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ definides per a $t \in I$, amb valors a $\mathbb{R}^n$. Formem la matriu quadrada $X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)]$.

Si $\det X(t) \neq 0$ per a algun $t \in I$, llavors les funcions són linealment independents a l'interval I .

O bé, si les funcions són linealment dependents a I , llavors $\det X(t) = 0, \forall t \in I$.

Ja hem dit abans que, per a funcions que no siguin analítiques, el recíproc no és en general cert.

3.3.2. Matriu fonamental de solucions

Definició 8 Si $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ són n solucions de l'equació 3.8 linealment independents a l'interval I , llavors la matriu

$$X(t) = [\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)] \quad (3.9)$$

s'anomena matriu fonamental de solucions del sistema homogeni.

Per tant, una matriu fonamental de solucions del sistema $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ satisfà

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

Vegem algunes propietats de la matriu fonamental de solucions amb relació al PVI de l'equació 3.4.

- Tota solució de l'equació 3.4 s'obté a partir d'una combinació lineal de les columnes de $X(t)$. Si ho expressem matricialment, tenim

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} \quad (3.10)$$

El vector constant $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ es calcula a partir d'una condició inicial

$$\vec{x}_0 = X(t_0)\vec{c}$$

- Com que les columnes de $X(t)$ són linealment independents, la matriu és invertible i, per tant,

$$\det X(t) \neq 0, \forall t \in I \quad (3.11)$$

El determinant de la matriu fonamental de solucions és el *wronskià* de les solucions.

- La solució del PVI es pot escriure substituint

$$\vec{c} = X^{-1}(t_0)\vec{x}_0$$

a l'equació 3.10:

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 \quad (3.12)$$



- En particular, la solució trivial $\vec{x}(t) = \vec{0}, \forall t \in I$ és l'única solució del sistema homogeni amb condició inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{0}$.
- En general, si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions i M és una matriu regular, llavors $X(t)M$ també és una matriu fonamental de solucions.
- La matriu fonamental obtinguda com a

$$\Phi(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$$

verifica

$$\Phi(t_0) = I$$

i s'anomena *matriu fonamental principal*.

La segona de les propietats anteriors ens proporciona el recíproc de la proposició 1:

Proposició 2 *Les columnes d'una matriu de solucions $X(t)$ són linealment independents si i només si $\det X(t) \neq 0$.*

Exemple 32 Si $\vec{x}_1 = (1, t)^T, \vec{x}_2 = (t^2, 0)^T$ són solucions de $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$, calculeu-ne $A(t)$.

Solució

Derivant, obtenim $\vec{x}'_1 = (0, 1)^T, \vec{x}'_2 = (2t, 0)^T$. Per tant, es complirà

$$\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

Si $t \neq 0$, és a dir, per a $t < 0$ o per a $t > 0$, la matriu de solucions

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

és invertible (és una matriu fonamental de solucions). Llavors,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{t^3} \begin{pmatrix} -2t^2 & 2t \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Vegem un sistema senzill de resoldre.

Exemple 33 Calculeu la solució de

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

tal que $\vec{x}(t_0) = (a, b)^T$.

Solució

En aquest cas, podem escriure i resoldre les dues equacions per separat

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = 2tx_2$$



d'on

$$x_1(t) = ae^{t-t_0}, \quad x_2(t) = be^{t^2-t_0^2}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Observem que la matriu fonamental del sistema és principal:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t_0} & 0 \\ 0 & e^{t_0^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{t^2-t_0^2} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

3.4. Matriu exponencial

Havíem vist que les funcions exponencials generaven les solucions de les equacions diferencials lineals (excepte en un factor polinòmic, per a arrels múltiples), incloent-hi també les solucions associades a arrels complexes de l'equació característica.

Això es pot generalitzar si utilitzem una sèrie de matrius que pren com a patró la sèrie de la funció exponencial d'una variable real, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$.

Es pot demostrar que, com en la sèrie escalar, la sèrie de matrius és uniformement convergent, la qual cosa permet sumar sèries d'aquest tipus, fer productes entre elles i, fins i tot, derivades i integrals, tot mantenint-ne la convergència.

Definició 9 Si A és una matriu $n \times n$, la matriu exponencial es defineix com la sèrie infinita de matrius

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (3.13)$$

Per tant, $e^A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Propietat 1 Fem un resum de les propietats més importants:

- $e^0 = I$
- Si $AB = BA$, llavors $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$
- $e^A e^{-A} = e^0 = I$, d'on $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- $\det e^A \neq 0$, $\forall A$
- Si $A = PBP^{-1}$, aleshores $e^A = P e^B P^{-1}$

Exemple 34 Vegem-ne uns casos particulars:

1. Si λ és un escalar, $e^{\lambda I} = e^\lambda I$
2. Si $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, llavors $e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$
3. Si $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ és una matriu diagonal per blocs, llavors $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_n})$
4. Si $A^n = 0$, llavors $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$ ■



Proposició 3 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ una matriu constant i una variable $t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (3.14)$$

Ara podem passar de treballar amb sèries de matrius a fer-ho amb sèries de vectors. Per exemple, per a qualsevol vector $\vec{v}$ que no depengui de t ,

$$\frac{d}{dt} (e^{At} \vec{v}) = A e^{At} \vec{v} \quad (3.15)$$

I, també, considerant sèries de vectors, tenim la propietat important següent:

Propietat 2 Considerem $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ i una variable real t . Donats un escalar λ i un vector constant $\vec{v}$, es compleix

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} e^{(A-\lambda I)t} \vec{v} \quad (3.16)$$

Aquesta propietat es dedueix immediatament del primer dels exemples i del fet que les matrius λI i $(A - \lambda I)$ commuten. Si ara la combinem amb el darrer dels exemples, n'obtenim una propietat que serà molt útil a l'hora de resoldre sistemes d'equacions diferencials lineals.

Propietat 3 Si existeix un nombre natural n tal que $(A - \lambda I)^n \vec{v} = \vec{0}$, llavors

$$e^{At} \vec{v} = e^{\lambda t} \left(I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (A - \lambda I)^{n-1} \right) \vec{v} \quad (3.17)$$

En particular, tenim

Proposició 4 Si $\vec{v}$ és vector propi de A amb valor propi λ , llavors $\vec{v}$ també és vector propi de e^A amb valor propi e^λ .

Es dedueix de la proposició anterior, amb $t = 1$.

3.5. Sistema homogeni a coeficients constants

Estudiem el cas en què la matriu del sistema homogeni

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad (3.18)$$

té coeficients constants, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Pels resultats que hem vist a la secció anterior, podem afirmar el següent:

- L'equació 3.14 garanteix que la matriu e^{At} és una matriu de solucions de l'equació 3.18.
- Com que $\det e^{At} \neq 0$, les columnes de matriu de solucions són linealment independents $\forall t \in \mathbb{R}$. A més, la matriu exponencial val la identitat quan $t = 0$. Per tant, e^{At} és una *matriu fonamental principal de solucions*.
- Si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'equació 3.18, existeix una matriu regular i constant C tal que $e^{At} = X(t)C$.

Fixades unes condicions inicials en $t = t_0$, tindrem $e^{At_0} = X(t_0)C$, d'on $C = X^{-1}(t_0) e^{At_0}$.



Podem, doncs, concloure,

Teorema 8 *Tota matriu fonamental de solucions $X(t)$ del sistema homogeni, equació 3.18, és de la forma*

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0)$$

3.5.1. Solució del sistema

Ara només queda saber com escriure la matriu fonamental e^{At} sense haver de recórrer a la sèrie infinita que la defineix. Per a això només cal trobar n vectors linealment independents $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ que proporcionin les n solucions linealment independents de l'equació 3.18, en la forma $e^{At}\vec{v}$. Aquests vectors els proporciona el teorema de descomposició primària d'endomorfismes (apèndix D), que el podem recordar tot enunciant-lo pel polinomi mínim associat a la matriu A :

Si $p_A(\lambda) = (-1)^n p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$, amb $\sum_{i=1}^k n_i \text{gr}(p_i) = n$, és la descomposició factorial del polinomi característic de la matriu $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, i $m_A(\lambda) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ ho és del polinomi mínim; aleshores, l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$ es descompon en suma directa dels subespais invariants següents (per l'aplicació que té per matriu A)

$$\ker p_1^{m_1}(A) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{m_k}(A)$$

amb $\dim \ker p_i^{m_i} = \dim \ker p_i^{n_i} = n_i \text{gr}(p_i)$.

Les bases d'aquests subespais invariants són precisament els vectors que proporcionen la solució general del sistema homogeni d'equacions diferencials. Vegem detalladament com són aquestes solucions en termes de les arrels del polinomi característic.

3.5.2. Arrels reals simples

Sigui λ_j una arrel real simple de $p_A(\lambda)$, és a dir, un valor propi de A . Si $\vec{v}$ n'és el vector propi, es complirà

$$(A - \lambda_j I)\vec{v} = \vec{0}$$

aleshores, tenint en compte l'equació 3.17, tindrem una solució del sistema, equació 3.18, en la forma

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{v} = e^{\lambda_j t}\vec{v} \quad (3.19)$$

Exemple 35 Resoleu el PVI

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solució

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 6)$$



Per tant, les arrels del polinomi característic són $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$. Ara en busquem els vectors propis. Per a $\lambda_1 = -1$, hem de resoldre

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 4x$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ara, per a $\lambda_2 = -6$, resollem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x = -y$. Per tant, un vector propi serà $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solució general d'aquest sistema homogeni és, doncs,

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular les constants, a fi de satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, n'obtenim $c_1 = \frac{3}{5}, c_2 = -\frac{2}{5}$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-6t} \\ \frac{12}{5}e^{-t} - \frac{2}{5}e^{-6t} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

3.5.3. Arrels complexes simples

Si $\lambda_j = \alpha \pm i\beta$ són arrels complexes simples del polinomi característic amb vectors propis respectius $\vec{a} \pm i\vec{b}$, aleshores, les dues solucions reals són les parts real i imaginària de

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} = e^{(\alpha+i\beta)t} (\vec{a} + i\vec{b}) = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (\vec{a} + i\vec{b})$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t \vec{a} - \sin \beta t \vec{b}) \\ \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t} (\sin \beta t \vec{a} + \cos \beta t \vec{b}) \end{aligned} \quad (3.20)$$



3.5.4. Arrels múltiples

Multiplicitats algebraica i geomètrica iguals

Si λ_j és una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat m , i existeixen m vectors propis linealment independents, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$, associats a aquest valor propi, llavors les m solucions independents de l'equació 3.18 s'obtenen de la mateixa manera que a l'equació 3.19, una per a cada vector propi:

$$\vec{x}_i(t) = e^{At} \vec{v}_i = e^{\lambda_j t} \vec{v}_i; \quad i = 1, \dots, m$$

Si l'arrel és complexa, es fa el mateix amb les solucions de l'equació 3.20.

Multiplicitats algebraica i geomètrica diferents

Sigui λ_j una arrel real de $p_A(\lambda)$ de multiplicitat n_j , i suposem que existeixen menys de n_j vectors propis linealment independents. Llavors, per les propietats descrites a l'apèndix D.1, en particular, per la propietat que caracteritza el polinomi mínim, sabem que $\dim \ker(A - \lambda_j I)^{m_j} = n_j$, on m_j és la potència del factor d'aquesta arrel en el polinomi mínim $m_A(\lambda)$. Llavors, existeixen n_j vectors linealment independents $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}$ que compleixen

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} \vec{v}_i = \vec{0}; \quad i = 1, \dots, n_j$$

Per tant, d'acord amb l'equació 3.17, les n_j solucions independents seran de la forma següent: Si, $\vec{v} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$,

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{v} = e^{\lambda_j t} \left(\vec{w}_0 + t \vec{w}_1 + \frac{t^2}{2} \vec{w}_2 + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \vec{w}_{m_j-1} \right) \quad (3.21)$$

amb

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I)^k \vec{v}; \quad k = 0, \dots, m_j - 1$$

Si l'arrel és complexa, cal donar separatament una solució per la part real i la part imaginària de l'equació 3.21, com s'ha fet a l'equació 3.20.

Existeix una relació de recurrència entre els vectors $\vec{w}_k$ anteriors, que és útil a l'hora de simplificar els càlculs:

Proposició 5 Considerem la solució de l'equació 3.21 associada a un vector $\vec{v} = \vec{w}_0 \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$. Llavors, els vectors següents de la sèrie verifiquen

$$\vec{w}_k = (A - \lambda_j I) \vec{w}_{k-1} \in \ker(A - \lambda_j I)^{m_j-k}; \quad k = 1, \dots, m_j - 1 \quad (3.22)$$

Observació. Una altra manera de procedir és formar una primera família de solucions amb el màxim nombre de vectors linealment independents del $\ker(A - \lambda_j I)$. Després, buscar vectors del $\ker(A - \lambda_j I)^2$ que siguin linealment independents dels anteriors, i així fins a completar els n_j vectors requerits, tots del $\ker(A - \lambda_j I)^{m_j}$.

Si el $\ker(A - \lambda_j I)$ té dimensió 1, es pot aplicar la llei de recurrència de l'equació 3.22 de la forma següent. Si $\vec{v}_1 \in \ker(A - \lambda_j I)$, un vector $\vec{v}_2 \in \ker(A - \lambda_j I)^2$ el trobarem resolent el sistema



$$(A - \lambda_j I) \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \quad (3.23)$$

i així successivament. Ara bé, si $\ker(A - \lambda_j I)$ té dimensió més gran que 1, per exemple està generat per dos vectors linealment independents $\vec{u}_1, \vec{w}_1$, l'equació anterior podria tenir solució només per a un dels dos vectors, o fins i tot ens podríem trobar amb un sistema incompatible. Proveu-ho, per exemple, amb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A - I)$$

Efectivament, amb l'equació 3.23 i un qualsevol dels dos vectors anteriors no és possible trobar un vector del $\ker(A - I)^2$.

Exemple 36 Resoleu el PVI

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solució

Busquem els valors propis la matriu A del sistema.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

Per tant, l'arrel del polinomi característic és $\lambda = 5$, doble. Ara busquem un vector propi per a aquest valor.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = -2x$. Per tant, un vector propi és $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De moment, una solució particular del sistema homogeni és

$$\vec{x}_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Evidentment, $\dim \ker(A - 5I) = 1$. Com que la matriu del sistema no diagonalitza, hem de trobar l'altra solució particular a partir d'un vector linealment independent de l'anterior, que sigui del $\ker(A - 5I)^2$. Aquest vector, $\vec{v}_2$, d'acord amb l'equació 3.23, el trobarem resolent $(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 1 - 2x$. Fent $x = 0$, tenim $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Així, l'altra solució particular és

$$\vec{x}_2(t) = e^{5t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$



Finalment, la solució general del sistema homogeni és $\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}_1(t) + c_2 \vec{x}_2(t)$, que, en forma de matriu fonamental de solucions, s'escriu com

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ara només queda calcular-ne les constants per tal de satisfer la condició inicial.

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $c_1 = 2, c_2 = -1$. Per tant, la solució del PVI és

$$\vec{x}(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 2-t \\ -5+2t \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

3.6. Sistemes no homogenis

Com en el cas d'equacions no homogènies d'ordre n , veurem el mètode de variació de les constants per a sistemes d'equacions lineals. Aquest procediment permet trobar una solució particular del sistema complet a partir de la solució general del sistema homogeni, encara que la matriu del sistema no tingui coeficients constants.

Suposem que $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions de l'equació 3.18, i assajem una solució de l'equació 3.2 en la forma

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \vec{c}(t) \quad (3.24)$$

Substituint aquesta solució proposada en l'equació 3.2, veurem com ha de ser la funció vectorial $\vec{c}(t)$,

$$X'(t) \vec{c}(t) + X(t) \vec{c}'(t) = A(t) X(t) \vec{c}(t) + \vec{b}(t)$$

Però com que la matriu fonamental de solucions del sistema homogeni compleix

$$X'(t) \vec{c}(t) = A(t) X(t) \vec{c}(t)$$

ens queda

$$X(t) \vec{c}'(t) = \vec{b}(t)$$

Resolent aquest sistema per a $\vec{c}'(t)$ i integrant, obtenim la solució particular buscada. En efecte, com que $\det X(t) \neq 0$, podem invertir el sistema,

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t) \vec{b}(t); \quad \vec{c}(t) = \int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt$$

Per tant, una solució particular és

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt \quad (3.25)$$

Es pot considerar nul·la la constant d'integració.



Finalment, escrivim la solució general del sistema complet tot afegint-hi la solució general del sistema homogeni,

$$\vec{x}(t) = X(t) \left(\int X^{-1}(t) \vec{b}(t) dt + \vec{c} \right); \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \quad (3.26)$$

Exemple 37 Trobeu la solució general del sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^{2t} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solució

El sistema homogeni ja havia estat estudiat en l'exemple 35. La matriu fonamental de solucions era

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix}$$

La seva inversa és

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució particular $\vec{x}_p(t) = X(t)\vec{c}(t)$ satisfarà

$$\vec{c}'(t) = X^{-1}(t)\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^t & \frac{1}{5}e^t \\ -\frac{4}{5}e^{6t} & \frac{1}{5}e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -5e^{8t} \end{pmatrix}$$

Ara integrem cada component,

$$\int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} \int e^{3t} dt \\ \int -5e^{8t} dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix}$$

I ja podem escriure la solució particular,

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \int X^{-1}(t)\vec{b}(t) dt = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-6t} \\ 4e^{-t} & e^{-6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{5}{8}e^{8t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ \frac{17}{24} \end{pmatrix}$$

Finalment, la solució general del sistema complet és

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ \frac{17}{24} \end{pmatrix}$$



Observem que també hauríem pogut aplicar el mètode dels coeficients indeterminats amb una solució particular de la forma $e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. ■

En el mètode dels coeficients indeterminats per a sistemes d'equacions, la solució que es conjectura segueix bàsicament els mateixos criteris que per a equacions escalars, especialment quan el tipus de solució proposada no pot ser una solució del sistema homogeni. En cas contrari, cal tenir en compte que la independència de la solució proposada respecte de les solucions de l'equació homògena recau més en el caràcter vectorial de les constants que en el tipus de funcions que es proposen. Per exemple, el sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

admet $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a solucions de la part homògena. Podem proposar una solució particular, que no sigui solució del sistema homogeni, del tipus $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ i obtenir, pel mètode dels coeficients indeterminats, $a = -1$. Com que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ no és vector propi associat al valor propi 1, la solució particular $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, tot i contenir l'exponencial e^t , no satisfà l'equació homògena, sinó que satisfà la completa.

A part dels mètodes vistos, hi ha maneres alternatives de resoldre equacions i sistemes d'equacions diferencials lineals, com ara, aplicar la transformada de Laplace.

3.7. Exercicis

1. Suposem que

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Trobeu la matriu A .

2. Es considera el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, amb $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculeu una matriu fonamental de solucions $X(t)$ que verifiqui $\det X(0) = 1$.
3. Sigui $\vec{x}(t)$ la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, 0)$. Calculeu el vector $\vec{x}(1)$.
4. Quina és la matriu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associada al sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ que té per solucions $\vec{x}_1(t) = \vec{v} \cos t$ i $\vec{x}_2(t) = \vec{w} \sin t$, amb $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents?

5. Si $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ és solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, trobeu dues solucions linealment independents més.
6. El sistema $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ té per matriu fonamental de solucions, en un interval determinat, $X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 + 1 \end{pmatrix}$. Trobeu la matriu $A(t)$.
7. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu e^A .
8. Sabent que $\vec{x}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ és solució de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, calculeu A .
9. Sabent que $\vec{x}(t) = \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}, 2t + \frac{t^2}{2}, t + \frac{t^2}{2} \right) e^t$ és solució d'un sistema lineal homogeni a coeficients constants, trobeu una solució de la forma $\vec{v}e^t$, amb $\vec{v}$ constant.
10. Sigui A una matriu $n \times n$, constant. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = \frac{1}{t}A\vec{x}$. Aplicant el canvi $t = e^s$, en quin sistema es transforma?
11. Quant val la solució del PVI $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, -3)$, en $t = 1$?
12. Per a quins valors de α i β resulta que $V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cos t + \beta \sin t & \sin t \\ 0 & \beta \cos t - \alpha \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental d'un sistema a coeficients constants?
13. Trobeu la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$, amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
14. Sigui $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ una solució del sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Calculeu A , sabent que és constant.
15. Sigui el sistema lineal amb coeficients constants $\ddot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Què ha de satisfer M perquè $e^{At}M$ sigui una matriu fonamental?
16. Sigui la solució $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}; \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculeu $\vec{x}(\pi)$.

17. Sigui $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Supposeu que $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$. Trobeu la matriu e^{tA} .
18. Calculeu la solució del problema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**3.8. Respostes**

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 1 - e^{-t} & 2 + t - e^{-t} & -2 - t + 2e^{-t} \\ 1 - e^{-t} & 1 + t - e^{-t} & -1 - t + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$

3. $\vec{x}(1) = (1 - e^{-2}, 1 + e^{-2}).$

4. No existeix.

5. $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$

6. $A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 - t^2 & t^2 \\ 1 - t^2 & t^2 \end{pmatrix}.$

7. $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(3) & -e \sin(3) \\ e \sin(3) & e \cos(3) \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

9. $(e^t, e^t, e^t).$

10. Amb el canvi $t = e^s$, es transforma en $\dot{\vec{x}}(s) = A\vec{x}(s).$

11. $(e^2 + e^7, -4e^2 + e^7).$

12. $\alpha \neq 0.$

13. $x(t) = (e^t + 2te^t + e^{2t}, e^{2t}, e^t).$

14. $\begin{pmatrix} 19/4 & -37/20 & 1/5 \\ 17/4 & -23/20 & -1/5 \\ -1 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$

15. $e^{At}M$ és una matriu fonamental si i només si M és invertible.

16. $\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix}.$

17. $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$

18. $x(t) = (e^t + 2te^t, e^t).$





Transformada de Laplace

4.1. Introducció

La transformació de Laplace és un mètode alternatiu per a la resolució de problemes de valor inicial d'equacions diferencials lineals a coeficients constants. És especialment útil quan, per a un sistema regit per aquestes equacions, es vol relacionar la resposta del sistema a un estímul extern amb la seva pròpia resposta natural (associada a la part homogènia de l'equació). En particular, quan es té determinat el comportament del sistema respecte d'un *impuls* inicial, es pot avaluar la resposta davant de qualsevol altre estímul aplicat (donat pel terme no homogeni de l'equació) mitjançant la *integral de convolució*.

Així mateix, la transformada de Laplace també permet calcular de manera molt eficient, més que emprant els mètodes habituals ja estudiats, la resposta d'un sistema davant de determinades excitacions discontinües. Per exemple, problemes d'impulsos i variacions de quantitat de moviment en mecànica o problemes d'interruptors en circuits elèctrics. Altres aplicacions més avançades de la transformació de Laplace es troben exemplificades en xarxes de circuits connectats entre si o amb induccions mútues, on la resposta d'un d'ells actua com a estímul extern d'un altre.

Laplace (1749-1827) va ser el primer a fer ús de la transformada integral –que ara porta el seu nom– en els seus treballs sobre mecànica celeste. Va ser, però, Heaviside (1850-1925) qui posteriorment la va desenvolupar.

La transformada de Laplace no té una interpretació física immediata, com és el cas de la transformada de Fourier, que es pot relacionar, per exemple, amb l'espectre o el patró de difracció de fenòmens de naturalesa ondulatoria.

És una transformació lineal que permet transformar una equació diferencial,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$



juntament amb unes condicions inicials adequades, per exemple, $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$, en una equació algebraica de la forma

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)Y(s) = F(s)$$

Així, doncs, s'ha de fer una transformació i, posteriorment, la inversió de la transformació.

La transformada de Laplace també es pot aplicar a un sistema de diverses equacions diferencials lineals simultànies per tal de transformar-lo en un sistema lineal de diverses equacions algebraiques simultànies. En altres casos, el mètode es pot utilitzar per resoldre una equació diferencial lineal amb coeficients no constants a fi de transformar-la en una d'ordre menor, eventualment de resolució més fàcil. Quan s'aplica a equacions diferencials en derivades parcials, les converteix en equacions diferencials ordinàries.

A continuació, veurem les definicions i propietats bàsiques que permetran resoldre els problemes més elementals que s'han comentat.

4.2. Transformació de Laplace

Comencem definint formalment la transformada de Laplace.

Definició 10 Sigui f una funció real definida per a $0 \leq t < \infty$. La transformada de Laplace de $f(t)$, que designarem per $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o per $F(s)$, és la funció de la variable real s

$$F(s) \equiv \mathcal{L}\{f(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (4.1)$$

on

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt$$

En realitat, per ser rigorosos, el límit inferior de la integral s'hauria d'avaluar en 0^+ , és a dir, en un valor positiu $|h|$, quan $h \rightarrow 0$, però a la pràctica i en endavant l'escriurem simplement com a 0.

Exemple 38 Obteniu la transformada de Laplace de la funció $f(t) = 1$.

Solució

A partir de l'equació 4.1,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-sA}}{s} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0 \\ \infty, & s \leq 0 \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Exemple 39 Calculeu la transformada de Laplace de la funció $f(t) = e^{\alpha t}$.

Solució

De l'equació 4.1,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} e^{\alpha t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha-s)A} - 1}{\alpha - s} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s - \alpha}, & s > \alpha \\ \infty, & s \leq \alpha \end{cases}\end{aligned}$$

■

Exemple 40 Obteniu la transformada de Laplace de la funció $f(t) = \cos \omega t$, $g(t) = \sin \omega t$.

Solució

De l'equació 4.1 es té

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t dt \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t dt$$

Observem, a més, que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \omega t\} + i\mathcal{L}\{\sin \omega t\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{i\omega t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{(i\omega-s)t} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{(i\omega-s)A} - 1}{i\omega - s} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2}, & s > 0 \\ \text{no definit}, & s \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

En igualar les parts reals i imaginàries d'aquesta equació, es té

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad s > 0$$

■

L'equació 4.1 associa cada funció $f(t)$ amb una nova funció $F(s)$. Tal com suggereix la notació $\mathcal{L}\{f(t)\}$, la transformada de Laplace és un operador que actua sobre funcions. A més, es tracta d'un operador lineal.

Propietat 4 (linealitat) $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$.



Demostració. Per definició,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (af(t) + bg(t)) dt = \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

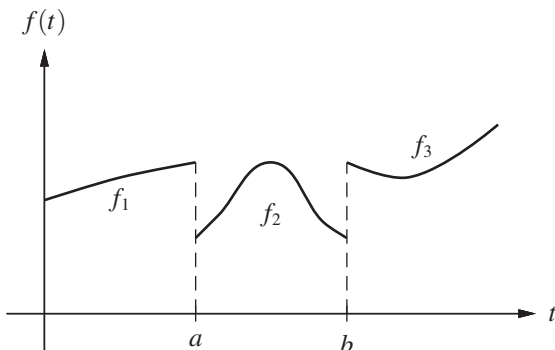
4.2.1. Funcions admissibles

Una dificultat que cal tenir en compte de la definició 4.1 és que la integral podria no existir per a algun valor de s . Això succeeix, per exemple, en el cas de $f(t) = e^{t^2}$. Per tal de garantir que la transformada de Laplace de $f(t)$ existeixi almenys en un interval $s > s_0$, s'exigeixen a $f(t)$ les condicions següents:

- La funció $f(t)$ és contínua per seccions. Això significa que $f(t)$ té, com a molt, un nombre finit de discontinuïtats en tot interval $0 \leq t \leq t_0$, i tant el límit per l'esquerra com per la dreta de f existeixen en tots els punts de discontinuïtat. Dit d'una altra manera, $f(t)$ té tan sols un nombre finit de discontinuïtats *de salt* en tot interval finit. A la figura 4.1 es representa la gràfica d'una típica funció contínua per seccions, o contínua a trossos.
- La funció $f(t)$ és d'ordre exponencial, és a dir, existeixen constants M i γ tals que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad 0 \leq t < \infty$$

Fig. 4.1
Gràfica d'una funció
contínua per seccions



Lema 3 Sigui $f(t)$ una funció contínua per seccions i d'ordre exponencial. Llavors, la seva transformada de Laplace existeix per a tot s suficientment gran. En particular, si $f(t)$ és contínua per seccions i $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, llavors $F(s)$ existeix per a $s > \gamma$.

Les funcions que compleixen això s'anomenen *funcions admissibles*. La demostració del lema 3 es farà amb l'ajuda del següent lema del càlcul integral, que s'anuncia a continuació però no es demostra.



Lema 4 Sigui $g(t)$ una funció contínua per seccions. Llavors, la integral impròpia $\int_0^\infty g(t) dt$ existeix si $\int_0^\infty |g(t)| dt$ existeix. Per demostrar que aquesta última integral existeix, només cal provar que hi ha una constant K tal que

$$\int_0^A |g(t)| dt \leq K$$

per a tot A .

Demostració. Ja que $f(t)$ és contínua per seccions, llavors la integral $\int_0^A e^{-st} f(t) dt$ existeix per a tot A . Per tal de demostrar que la integral té un límit per a tot s suficientment gran, observem que

$$\begin{aligned} \int_0^A |e^{-st} f(t)| dt &\leq M \int_0^A e^{-st} e^{\gamma t} dt = \\ &= \frac{M}{\gamma - s} (e^{(\gamma-s)A} - 1) \leq \frac{M}{s - \gamma} \end{aligned}$$

per a $s > \gamma$. Llavors, basant-nos en el lema 4, es té que la transformada de Laplace de $f(t)$ existeix per a $s > \gamma$. Així doncs, a partir d'ara suposarem que $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$ i $s > \gamma$.

4.3. Aplicació a les equacions diferencials

La utilitat real de la transformada de Laplace per resoldre equacions diferencials recau en el fet que la transformada de Laplace de $f'(t)$ està molt relacionada amb la transformada de $f(t)$. Aquest és el contingut del lema següent.

Propietat 5 (derivació) Sigui $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Llavors,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \quad (4.2)$$

Demostració. Només cal escriure la fórmula per a la transformada de Laplace de $f'(t)$ i integrar per parts. Així, es té

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) \Big|_0^A + \lim_{A \rightarrow \infty} s \int_0^A e^{-st} f(t) dt = \\ &= -f(0) + \lim_{A \rightarrow \infty} s \int_0^A e^{-st} f(t) dt = \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

El pas següent és trobar una relació entre la transformada de Laplace de $f''(t)$ i la de $f'(t)$, cosa que no és més que una conseqüència del lema 5.



Corol·lari 1 *Si* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. *Llavors,*

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (4.3)$$

Demostració. Aplicant dues vegades el lema 5, trobem que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = \\ &= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

4.3.1. Equació diferencial lineal

Arribat aquest punt, ja tenim els elements necessaris per resoldre un problema de valor inicial

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t); \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (4.4)$$

tot resolent una equació algebraica. Siguin $Y(s)$ i $F(s)$ les transformades de Laplace de $y(t)$ i $f(t)$, respectivament. Aplicant l'operador de transformació a ambdós costats de l'equació diferencial, s'obté

$$\mathcal{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} = F(s)$$

Tenint en compte la linealitat de l'operador de transformació, s'obté

$$\mathcal{L}\{ay''(t) + by'(t) + cy(t)\} = a\mathcal{L}\{y''(t)\} + b\mathcal{L}\{y'(t)\} + c\mathcal{L}\{y(t)\}$$

i, d'acord amb el lema 5 i el corol·lari 1, es té que

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y_0, \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s) - sy_0 - y'_0$$

Per tant,

$$a(s^2 Y(s) - sy_0 - y'_0) + b(sY(s) - y_0) + cY(s) = F(s)$$

Aquesta *equació algebraica* implica que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} + \frac{(as + b)y_0}{as^2 + bs + c} + \frac{ay'_0}{as^2 + bs + c} \quad (4.5)$$

L'equació 4.5 descriu la transformada de Laplace de la solució $y(t)$ del problema de valors inicials 4.4. Per tal d'avaluar $y(t)$, és necessari consultar les taules d'antitransformades de Laplace. Ara bé, així com $Y(s)$ s'expressa explícitament en termes de $y(t)$, és a dir, $Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$, també seria possible donar una fórmula explícita per a $y(t)$. No obstant això, aquesta fórmula, que s'escriu simbòlicament com $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, implica una integració respecte d'una variable complexa, cosa que va més enllà del tema que es tracta en aquests apunts. Per això, en lloc d'aplicar la fórmula, a la secció següent



es deduiran algunes propietats funcionals de l'operador transformada de Laplace. Les propietats permetran invertir, per simple inspecció, moltes transformades de Laplace, és a dir, permetran reconèixer de quines funcions són transformades. És comú referir-s'hi com a *transformada inversa* o *antitransformada*.

Exemple 41 Resoleu el problema de valor inicial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Solució

Sigui $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Aplicant la transformada de Laplace a ambdós membres de l'equació diferencial, s'obté

$$s^2 Y(s) - s - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

és a dir,

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s+1} + (s-3)$$

Això implica que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\frac{1}{s+1}}{s^2 - 3s + 2} + \frac{s-3}{s^2 - 3s + 2} = \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+1)} + \frac{s-3}{(s-1)(s-2)} \end{aligned}$$

Per trobar $y(t)$, es desenvolupa en fraccions simples cada un dels termes del segon membre, i s'obté

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1}$$

Això implica que

$$A(s-2)(s+1) + B(s-1)(s+1) + C(s-1)(s-2) = 1$$

En fer $s = 1$, s'obté $A = -\frac{1}{2}$; fent $s = 2$, s'obté $B = \frac{1}{3}$, i amb $s = -1$, s'obté $C = \frac{1}{6}$. Per tant,

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+1}$$

De manera similar,

$$\frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$



i d'aquí

$$D(s-2) + E(s-1) = s-3$$

Ara, fent $s = 1$, s'obté $D = 2$, mentre que, amb $s = 2$, s'obté $E = -1$. Per tant,

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

El primer terme és la transformada de Laplace de $\frac{3}{2}e^t$. De manera similar, el segon terme i el tercer són les transformades de $-\frac{2}{3}e^{2t}$ i $\frac{1}{6}e^{-t}$, respectivament. Consegüentment,

$$Y(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} \right\} \implies y(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} \quad \blacksquare$$

Observació. En realitat, hi ha infinites funcions amb idèntica transformada de Laplace. Per exemple, la transformada de Laplace de les funcions

$$z(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}, & \text{si } t \neq -1, 1, 2 \\ 0, & \text{si } t = -1, 1, 2 \end{cases}$$

és també $Y(s)$, ja que $z(t)$ difereix de $y(t)$ tan sols en tres punts.¹ No obstant això, només hi ha una funció *contínua* $y(t)$ que té per transformada de Laplace una funció donada $Y(s)$, i és en aquest sentit que s'escriu $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

4.3.2. Sistemes d'equacions

La transformada de Laplace també és útil per a resoldre sistemes d'equacions diferencials lineals a coeficients constants. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple 42 Resoleu el problema de valor inicial no homogeni

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - 3x_2(t) + 2 \\ x_2'(t) = -6x_1(t) - t \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1 \quad (4.6)$$

Solució

Fem $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$, $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$. Aplicant la transformada de Laplace a ambdós membres de les dues equacions diferencials, s'obté

¹ Si $f(t) = g(t)$, excepte en un nombre finit de punts, llavors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$.



$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = 3X_1(s) - 3X_2(s) + \frac{2}{s} \\ sX_2(s) - x_2(0) = -6X_1(s) - \frac{1}{s^2} \end{cases} \quad (4.7)$$

Substituint les condicions inicials i simplificant, es té

$$\begin{cases} (s-3)X_1(s) + 3X_2(s) = \frac{2}{s} + 1 = \frac{s+2}{s} \\ 6X_1(s) + sX_2(s) = -\frac{1}{s^2} - 1 = -\frac{s^2+1}{s^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Ara cal de resoldre el sistema d'equacions, és a dir, aïllar $X_1(s)$, $X_2(s)$, i buscar les transformades inverses.

Per exemple, multipliquem la primera equació per s i la segona per -3 , i sumem. Això dóna

$$(s^2 - 3s - 18)X_1(s) = 2 + s + \frac{3s^2 + 3}{s^2}$$

d'on

$$X_1(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 3}{s^2(s+3)(s-6)}$$

Desenvolupant en fraccions simples, queda

$$X_1(s) = \frac{1}{108} \left(\frac{133}{s-6} - \frac{28}{s+3} + \frac{3}{s} - \frac{18}{s^2} \right)$$

Antitransformant, se n'obté la primera solució,

$$x_1(t) = \frac{1}{108}(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t)$$

De manera semblant, per calcular la segona solució podríem tornar enrere, eliminar X_1 i trobar la transformada X_2 . Ara bé, en aquest cas, és més ràpid usar la segona de les equacions diferencials, on no apareix el terme en $x_2(t)$, i integrar directament,

$$x_2(t) = \int (-6x_1(t) - t) dt$$

Per tant, substituint-hi la primera solució, tindrem

$$x_2(t) = -\frac{1}{18} \int (133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3) dt = -\frac{1}{108}(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t) + c$$

Ara, apliquem la segona condició inicial per calcular la constant d'integració c ,

$$-1 = -\frac{1}{108}(133 + 56) + c, \quad c = \frac{3}{4}$$



La segona solució és, doncs,

$$x_2(t) = -\frac{1}{108}(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81)$$

■

4.4. Càlcul de transformades

En aquesta secció, s'obindran algunes propietats importants de les transformades de Laplace. Utilitzant aquestes propietats, serà possible calcular la transformada de la majoria de les funcions sense haver de realitzar integracions pesades. A més, es podran invertir moltes transformades per simple inspecció.

Propietat 6 (multiplicació per t) Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, llavors

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s) \quad (4.9)$$

Demostració. Per definició, $F(s) = \int_0^\infty f(t) dt$. En derivar ambdós costats de l'equació respecte de s , s'obté

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st}) f(t) dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt = \\ &= \mathcal{L}\{-tf(t)\} \end{aligned}$$

La propietat 6 estableix que la transformada de Laplace de la funció $-tf(t)$ és la derivada de la transformada de Laplace de $f(t)$. Així doncs, si es coneix la transformada $F(s)$ de $f(t)$, llavors ja no és necessari realitzar una integració pesada per trobar la transformada de $tf(t)$.

Exemple 43 Obteniu la transformada de Laplace de te^t .

Solució

La transformada de e^t és $\frac{1}{s-1}$. Per tant, per la propietat 6, la transformada de Laplace de te^t és

$$\mathcal{L}\{te^t\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

■

Exemple 44 Calculeu la transformada de Laplace de t^n .

Solució

Utilitzant n vegades consecutives la propietat 6, s'obté

$$\mathcal{L}\{t^n\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}\{1\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

■

La utilitat principal de la propietat 6 és invertir transformades, com es mostra en els exemples següents.

Exemple 45 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{-1}{(s-4)^2}$?

Solució

Primerament, observem que

$$-\frac{1}{(s-4)^2} = \frac{d}{ds} \frac{1}{s-4} \quad \text{i} \quad \frac{1}{s-4} = \mathcal{L}\{e^{4t}\}$$

Per tant, per la propietat 6 es té que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-4)^2}\right\} = -te^{4t}$$

■

Exemple 46 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{-4s}{(s^2+4)^2}$?

Solució

Observem que

$$-\frac{4s}{(s^2+4)^2} = \frac{d}{ds} \frac{2}{s^2+4} \quad \text{i} \quad \frac{2}{s^2+4} = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

Per tant, per la propietat 6 es té que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\} = -t \sin 2t$$

■

Exemple 47 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{1}{(s-4)^3}$?

Solució

Podem reconèixer fàcilment que

$$\frac{1}{(s-4)^3} = \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{s-4}$$

Per tant, aplicant la propietat 6 dues vegades, trobem que

$$\frac{1}{(s-4)^3} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2e^{4t}\right\}$$

■



Propietat 7 (multiplicació per $e^{\alpha t}$) Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, llavors

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(s - \alpha) \quad (4.10)$$

Demostració. Per definició,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt \equiv F(s - \alpha) \end{aligned}$$

La propietat 7 estableix que la transformada de Laplace de $e^{\alpha t} f(t)$, avaluada en el punt s , és igual a la transformada de $f(t)$ en el punt $(s - \alpha)$. D'aquesta manera, si es coneix la transformada $F(s)$ de $f(t)$, llavors no és necessari calcular la integral per trobar la transformada de Laplace de $e^{\alpha t} f(t)$; només cal substituir s per $s - \alpha$ en $F(s)$.

Exemple 48 Determineu la transformada de Laplace de la funció $e^{2t} \cos t$.

Solució

La transformada de $\cos t$ és $s/(s^2 + 1)$. Per tant, per obtenir la transformada de Laplace de $e^{2t} \cos t$, només cal substituir s per $s - 2$, és a dir,

$$\mathcal{L}\{e^{2t} \cos t\} = \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1} \quad \blacksquare$$

La utilitat real de la propietat 7 es veu clarament en invertir les transformades de Laplace, tal com ho mostren els exemples següents.

Exemple 49 Quina funció $g(t)$ té la transformada de Laplace següent?

$$G(s) = \frac{s + 3}{25 + (s + 3)^2}$$

Solució

Observem que

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 5^2} = \mathcal{L}\{\cos 5t\}$$

i que $G(s)$ s'obté de $F(s)$ quan substituïm s per $s + 3$. Per tant, per la propietat 7,

$$\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 25} = \mathcal{L}\{e^{-3t} \cos 5t\} \quad \blacksquare$$

Exemple 50 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{1}{s^2 + 2s + 3}$?



Solució

Una manera de resoldre el problema és desenvolupar $1/(s^2 + 2s + 3)$ en fraccions simples. Però una manera molt millor de resoldre'l és completant $s^2 + 2s + 3$ en quadrats perfectes, de manera que

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 3} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1 + (3 - 1)} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 2}$$

També tenim que

$$\frac{1}{s^2 + 2} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \right\}$$

Per tant, per la propietat 7, tenim que

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 3} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 2} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t \right\} \quad \blacksquare$$

Exemple 51 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{s}{s^2 + 2s + 3}$?

Solució

Observem que

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 3} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2} - \frac{1}{(s + 1)^2 + 2}$$

La funció $s/(s^2 + 2)$ és la transformada de Laplace de $\cos \sqrt{2}t$. Per tant, per la propietat 7 es té

$$\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2} = \mathcal{L} \left\{ e^{-t} \cos \sqrt{2}t \right\}$$

i

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 3} = \mathcal{L} \left\{ e^{-t} \cos \sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t \right\} \quad \blacksquare$$

Com hem vist anteriorment, la transformada de Laplace és un operador lineal, és a dir, $\mathcal{L} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$. Llavors, si es coneixen les transformades $F_1(s)$ i $F_2(s)$, no és necessari realitzar cap integració per tal de trobar la transformada de Laplace d'una combinació lineal de $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Per exemple, dues funcions que es presenten molt sovint en l'estudi d'equacions diferencials són el cosinus i el sinus hiperbòlics. Aquestes funcions es defineixen per les equacions

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \quad \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$



Per tant, segons la linealitat de la transformada de Laplace, resulta que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh at\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh at\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}\end{aligned}$$

4.5. Propietats addicionals

En aquesta secció, veurem algunes propietats més de la transformada de Laplace que resulten útils a l'hora de resoldre alguns problemes.

Propietat 8 (integració) *Sigui $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$; llavors,*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (4.11)$$

Demostració. Fent $g(t) = \int_0^t f(u) du$ es té $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$ i, per tant, utilitzant la propietat de derivació de la transformada de Laplace, es té

$$F(s) = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} = s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}$$

Propietat 9 (divisió per t) *Si $\frac{f(t)}{t}$ és admissible, per a la qual cosa és suficient que existeixi el $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$, llavors*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du \quad (4.12)$$

Demostració. Fent $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, $f(t) = tg(t)$ i utilitzant la propietat 6, s'obté

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u) du &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_s^A F(u) du = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_s^A -\frac{d}{du} G(u) du = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (G(s) - G(A)) = G(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\end{aligned}$$

Observació. Aquí s'ha utilitzat el fet, que té interès per si mateix, que si una funció $f(t)$ és admissible, la seva transformada de Laplace satisfà

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (4.13)$$

que és conseqüència immediata de la fitació $|F(s)| \leq \frac{M}{s - \gamma}$, que hem vist anteriorment en el lema 3.

Propietat 10 (canvi d'escala) *Segui $a > 0$; llavors,*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.14)$$

Demostració. Fent $at = u$, tenim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

Propietat 11 (funcions periòdiques) *Si $f(t+T) = f(t)$, llavors*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (4.15)$$

Demostració. Veiem que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

i, fent $t = T + u$ en l'última integral, tenim

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_0^\infty e^{-s(T+u)} f(T+u) du = \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

d'on sobté

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

La taula 4.1 mostra les propietats anteriors de la transformada de Laplace.



Taula 4.1
Propietats de la
transformació de Laplace

1.	Linealitat	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$
2.	Derivació	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
3.	Multiplicació per t	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$
4.	Multiplicació per e^{at}	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - \alpha)$
5.	Integració	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6.	Divisió per t	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$
7.	Canvi d'escala	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
8.	Funcions periòdiques	$f(t+T) = f(t)$ $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$

4.6. Exercicis

1. Calculeu l'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$.
2. Si una funció $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$, amb $\int_0^\infty f(t)dt = 1$ i $\int_0^\infty tf(t)dt = a < +\infty$, quant val el $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)}$?
3. Usant la transformada de Laplace, calculeu la integral $\int_0^\infty t \cos \pi t e^{-\pi t} dt$.
Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{2}{s^2 - 2s - 3}$?
5. Quina és la transformada de Laplace de $te^{at}f(at)$?
6. Calculeu la transformada de Laplace de $e^{at}f(at)$.
7. Sigui f , amb f' admissible. Demostreu:

$$\mathcal{L}\{te^{at}f(t)\} = -F'(s - \alpha)$$

$$\mathcal{L}\{tf(at)\} = -\frac{1}{a^2}F'\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(at)\right\} = \frac{s}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) - f(0)$$



8. Sabent que $\mathcal{L}\{f(3t)\} = \frac{1}{1+s^2}$, calculeu $\mathcal{L}\{f(5t)\}$.
9. Si $f(t)$ és solució del problema $f'' - f = t \cos(t)$, amb condicions inicials $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, trobeu $F(s)$.
10. Si una funció admissible $f(t)$, amb derivada admissible, té transformada de Laplace $F(s)$ i els límits següents existeixen, demostreu:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF'(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} -tf(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

4.7. Respostes

1. $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t} \cos(2t)$.
2. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = -a$.
3. 0.
4. $e^t \sinh(2t)$.
5. $-\frac{1}{a^2} F' \left(\frac{s-a}{a} \right)$.
6. $\frac{1}{a} F \left(\frac{s}{a} - 1 \right)$.
7. —
8. $L\{f(5t)(t)\}(s) = \frac{3}{5} \frac{1}{1 + (3s/5)^2}$.
9. $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$.
10. —

→ 5



Equacions amb terme no homogeni discontinu

5.1. Introducció

En moltes aplicacions, el segon membre de l'equació diferencial $ay'' + by' + cy = f(t)$ té una o més discontinuïtats de salt. Per exemple, una partícula pot trobar-se en moviment sota la influència d'una força $f_1(t)$ i, de cop, en un temps t_1 , patir els efectes d'una força addicional $f_2(t)$. En aquest capítol, es descriu com tractar aquest tipus de problemes mitjançant la transformada de Laplace. Per començar, obtindrem les transformades de Laplace d'algunes funcions discontinües senzilles.

5.2. Funció de Heaviside

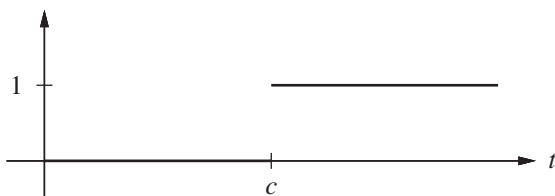
L'exemple més senzill d'una funció amb una sola discontinuïtat de salt és la funció

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases} \quad (5.1)$$

Aquesta funció $H_c(t)$, la gràfica de la qual es mostra a la figura 5.1, es coneix amb el nom de *funció esglaó* o *funció de Heaviside*. De vegades, també apareix sota les notacions $H(t - c)$ o $u(t - c)$ –aquesta darrera, derivada del mot anglès *up* per descriure un salt ascendent. La seva transformada de Laplace és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H_c(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_c^A e^{-st} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-cs} - e^{-sA}}{s} = \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

Fig. 5.1
Gràfica de $H_c(t)$

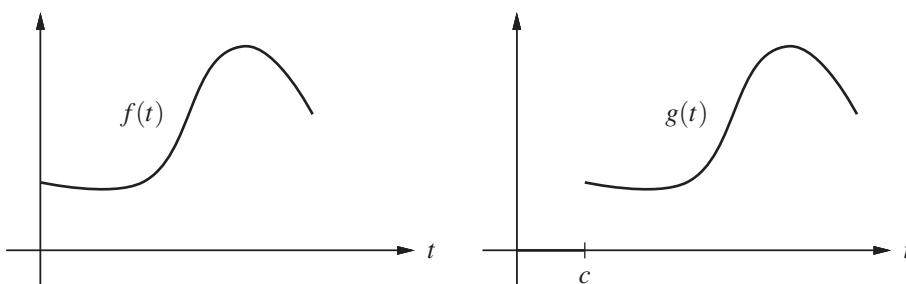


Considerem ara una funció f definida a l'interval $0 \leq t < \infty$, i sigui g la funció que s'obté de f en traslladar la gràfica de f c unitats cap a la dreta, tal com mostra la figura 5.2. Dit amb més precisió, $g(t) = 0$ per a $0 \leq t < c$, i $g(t) = f(t - c)$ per a $t \geq c$. Una expressió analítica adequada per a $g(t)$ és

$$g(t) = H_c(t)f(t - c)$$

El factor $H_c(t)$ fa g igual a zero per a $0 \leq t < c$ i, en canviar l'argument t de f per $t - c$, f es desplaça c unitats cap a la dreta. Com que $g(t)$ s'obté a partir de f de manera senzilla, caldria esperar que la seva transformada de Laplace es pogués obtenir de manera senzilla a partir de la transformada de $f(t)$. A continuació, es demostra que, efectivament, això succeeix.

Fig. 5.2
 $f(t)$ i $g(t) = H_c(t)f(t - c)$



Propietat 12 Sigui $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Llavors,

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs}F(s) \quad (5.2)$$

Demostració. Per definició,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H_c(t)f(t - c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} H_c(t) f(t - c) dt = \\ &= \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt \end{aligned}$$

Per resoldre la integral, convé fer el canvi $\xi = t - c$. Llavors,

$$\begin{aligned} \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt &= \int_0^{\infty} e^{-s(\xi+c)} f(\xi) d\xi = \\ &= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi = \\ &= e^{-cs} F(s) \end{aligned}$$



Per tant, $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Exemple 52 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{e^{-s}}{s^2}$?

Solució

Sabem que $1/s^2$ és la transformada de la funció t , de manera que, per la propietat 12, resulta

$$\frac{e^{-s}}{s^2} = \mathcal{L}\{H_1(t)(t-1)\}$$

La figura 5.3 mostra la gràfica de $H_1(t)(t-1)$. ■

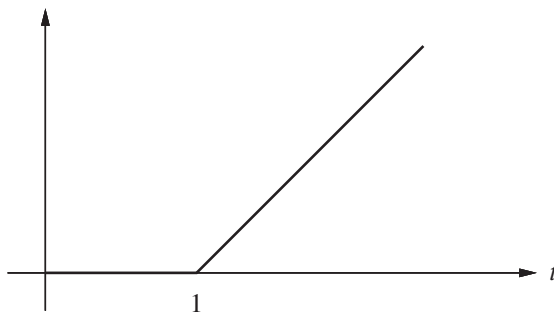


Fig. 5.3
Gràfica de $H_1(t)(t-1)$

Exemple 53 Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{e^{-4s}}{s^2 - 2s - 3}$?

Solució

Observem que

$$\frac{1}{s^2 - 2s - 3} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1 - 4} = \frac{1}{(s-1)^2 - 2^2}$$

Com que $1/(s^2 - 2^2) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\sinh 2t\right\}$, de la propietat 7 podem concloure que

$$\frac{1}{(s-1)^2 - 2^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^t \sinh 2t\right\}$$

i, segons la propietat 12, tenim que

$$\frac{e^{-4s}}{s^2 - 2s - 3} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}H_4(t)e^{t-4}\sinh 2(t-4)\right\}$$

Exemple 54 Sigui $f(t)$ la funció que val t per a $0 \leq t < 1$, i que val 0 per a $t \geq 1$. Trobeu la transformada de Laplace de f sense fer cap integració.

*Solució*

Observem primerament que $f(t)$ es pot escriure de la forma

$$f(t) = t(H_0(t) - H_1(t)) = t - tH_1(t)$$

Per tant, segons la propietat 6,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{tH_1(t)\} = \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds} \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

■

5.2.1. Problema de valor inicial amb funcions de Heaviside

Vegem un exemple on el terme no homogeni és una funció contínua per seccions.

Exemple 55 Resoldeu el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2 & \text{si } 2 \leq t < 3, \\ 3 & \text{si } 4 \leq t < 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } 5 \leq t < \infty \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Solució

Signin $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Quan s'aplica la transformada de Laplace als dos costats de l'equació diferencial, s'obté que $(s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s)$, de manera que

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2} = \frac{F(s)}{(s-1)(s-2)}$$

Una manera de calcular $F(s)$ és escriure $f(t)$ de la forma

$$f(t) = H_0(t) - H_1(t) + 2H_2(t) - 2H_3(t) + 3H_4(t) - 3H_5(t)$$

Per tant, basant-nos en la linealitat de la transformada de Laplace, s'obté

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s} + 3\frac{e^{-4s}}{s} - 3\frac{e^{-5s}}{s}$$

Un altre mètode per calcular $F(s)$ és avaluar la integral

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt &= \int_0^1 e^{-st} dt + 2 \int_2^3 e^{-st} dt + 3 \int_4^5 e^{-st} dt = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} + 2 \frac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s} + 3 \frac{e^{-4s} - e^{-5s}}{s}\end{aligned}$$



Com a conseqüència, obtenim

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s} + 2e^{-2s} - 2e^{-3s} + 3e^{-4s} - 3e^{-5s}}{s(s-1)(s-2)}$$

El pas següent és desenvolupar $\frac{1}{s(s-1)(s-2)}$ en fraccions simples, és a dir, de manera que s'escrigui de la forma

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

Això implica

$$A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1) = 1$$

Fent $s = 0$, trobem que $A = \frac{1}{2}$; fent $s = 1$, trobem que $B = -1$, i fent $s = 2$, s'obté que $C = \frac{1}{2}$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s-1)(s-2)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-2} = \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2} e^{2t} \right\} \end{aligned}$$

Per tant, a partir de la propietat 12,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2} e^{2t} \right] - H_1(t) \left[\frac{1}{2} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2} e^{2(t-1)} \right] + \\ &+ 2H_2(t) \left[\frac{1}{2} - e^{(t-2)} + \frac{1}{2} e^{2(t-2)} \right] - 2H_3(t) \left[\frac{1}{2} - e^{(t-3)} + \frac{1}{2} e^{2(t-3)} \right] + \\ &+ 3H_4(t) \left[\frac{1}{2} - e^{(t-4)} + \frac{1}{2} e^{2(t-4)} \right] - 3H_5(t) \left[\frac{1}{2} - e^{(t-5)} + \frac{1}{2} e^{2(t-5)} \right] \end{aligned}$$

Observació. Pot verificar-se fàcilment que la funció

$$\frac{1}{2} - e^{(t-n)} + \frac{1}{2} e^{2(t-n)}$$

i les seves derivades s'anul·len en $t = n$. Per això, tant $y(t)$ com $y'(t)$ són funcions contínues, tot i que $f(t)$ és discontinua en $t = 1, 2, 3, 4$ i 5 .

De forma més general, com que la integral d'una funció de Heaviside és contínua, tant la solució $y(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

com la seva derivada $y'(t)$ són sempre funcions contínues en el temps, si $f(t)$ és contínua a trossos. ■



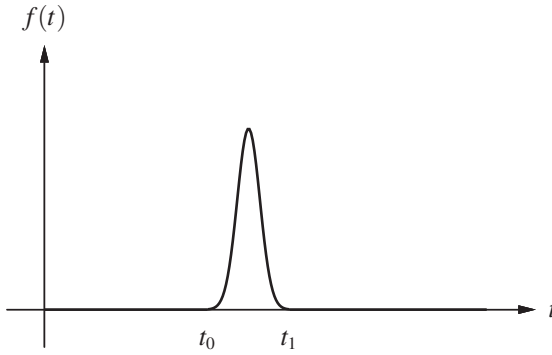
5.3. Delta de Dirac

En moltes aplicacions físiques i d'enginyeria, apareix sovint el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (5.3)$$

on $f(t)$ no es coneix explícitament. Aquests problemes es presenten generalment quan es treballa amb fenòmens de naturalesa impulsiva. En aquests casos, l'única informació que es té de $f(t)$ és que és igual a zero, excepte en un interval de temps molt curt $t_0 \leq t \leq t_1$, i que la integral sobre aquest interval és un determinat nombre $I_0 \neq 0$. Si I_0 no és molt petit, llavors $f(t)$ serà molt gran a l'interval $t_0 \leq t \leq t_1$. Aquestes funcions es coneixen amb el nom de *funcions d'impuls* (parlant amb rigor matemàtic, ens hi hauríem de referir com a funcionals o distribucions). A la figura 5.4, es mostra la gràfica d'un impuls $f(t)$ típic.

Fig. 5.4
Gràfica d'una funció
d'impuls $f(t)$



A principis de la dècada dels anys trenta, Dirac, guanyador d'un premi Nobel per treballs relacionats amb la mecànica quàntica, va elaborar un mètode força controvertit per tal de treballar amb funcions d'impuls. El seu mètode es basava en el raonament següent: sigui t_1 cada cop més proper a t_0 . Llavors, la funció $f(t)/I_0$ tendeix a la funció que és 0 per a $t \neq t_0$ i a ∞ per a $t = t_0$. A més, la seva integral sobre qualsevol interval que contingui t_0 val 1. Aquesta funció es coneix amb el nom de *funció delta de Dirac*, tot i que no és una funció en el sentit habitual –ja Dirac la va qualificar de funció “impròpia”– i es denota per $\delta(t - t_0)$, o per $\delta_{t_0}(t)$. No obstant això, pot operar-se formalment amb $\delta(t - t_0)$ com si es tractés d'una funció més.

Formalment, es pot definir $\delta(t - t_0)$ d'una manera força genèrica, imposant que, per a una funció qualsevol $g(t)$, es verifiqui

$$\int_a^b g(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} g(t_0), & a \leq t_0 \leq b \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad (5.4)$$

En particular, prenent $g(t) = 1$, obtenim la propietat següent, que correspon a la definició donada originalment per a una funció d'impuls,

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0, & \text{si } t \neq t_0 \\ \int_a^b \delta(t - t_0) dt &= 1, & \text{si } a \leq t_0 \leq b \end{aligned}$$



És interessant posar de manifest la relació que hi ha entre la delta de Dirac i la funció de Heaviside.

Propietat 13 (derivada de la funció esglaó) Per a tot $c \geq 0$, es verifica

$$\int_0^t \delta(u - c) du = H_c(t) \quad (5.5)$$

Aquest resultat és una conseqüència immediata de la definició. De vegades, aquesta relació s'escriu, per analogia amb les funcions ordinàries, com

$$\delta(t - c) = \frac{d}{dt} H_c(t) \quad (5.6)$$

que vol significar que “la derivada de la funció esglaó és un impuls”. Ara bé; com s’ha d’entendre la relació anterior si, de fet, la funció esglaó $H_c(t)$ no té derivada a $t = c$? La manera correcta d’interpretar aquesta relació seria pensar que les derivades d’una seqüència de funcions diferenciables, que en el límit tendeixen a $H_c(t)$, constitueixen una seqüència apropiada per definir $\delta(t - c)$.

5.3.1. Terme no homogeni impulsu

Ara podem veure que tota solució $y(t)$ de l’equació diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = I \delta(t - c) \quad (5.7)$$

és una funció contínua en el temps. Si integrem l’equació, tenint en compte l’expressió 5.5, resulta que $y'(t)$ és discontinua a la manera de $H_c(t)$. Com que la seva integral és una funció contínua, llavors $y(t)$ serà una funció contínua. Dit amb un exemple: si $y(t)$ és la solució de l’equació del moviment d’una partícula que rep un impuls en el temps $t = c$, aquesta partícula no realitza el “canvi de lloc instantani”, sinó que segueix una trajectòria contínua. La seva velocitat, en canvi, es veu sobtadament modificada.

Per resoldre el problema de valor inicial que mostra l’equació 5.3 pel mètode de la transformada de Laplace, només cal saber quina és la transformada de Laplace de $\delta(t - t_0)$. Això ho podem obtenir directament de l’equació 5.4

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0$$

Exemple 56 Trobeu la solució del problema de valor inicial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 2\delta(t - 1) + 4\delta(t - 2); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Solució

Sigui $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Quan apliquem la transformada de Laplace als dos costats de l’equació diferencial, obtenim

$$s^2 Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = 2e^{-s} + 4e^{-2s}$$



o, el que és el mateix,

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) = s - 3 + 2e^{-s} + 4e^{-2s}$$

Per tant, tenim

$$Y(s) = \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{2e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{4e^{-2s}}{(s-2)^2}$$

Observem ara que $1/(s-2)^2 = \mathcal{L}\{te^{2t}\}$. Llavors,

$$\frac{2e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{4e^{-2s}}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{2H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + 4H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}\}$$

Per tal d'invertir el primer terme de $Y(s)$, observem que

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} - \mathcal{L}\{te^{2t}\}$$

Així doncs,

$$y(t) = (1-t)e^{2t} + 2H_1(t)(t-1)e^{2(t-1)} + 4H_2(t)(t-2)e^{2(t-2)}$$

Observació. Resulta il·lustratiu resoldre aquest problema per la via llarga, és a dir, trobar $y(t)$, per separat, en cadascun dels intervals $0 \leq t < 1$, $1 \leq t < 2$ i $2 \leq t < \infty$. Per $0 \leq t < 1$, tenim que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

L'equació característica d'aquesta equació diferencial és $r^2 - 4r + 4 = 0$, que té per arrels $r_1 = r_2 = 2$. Per tant, qualsevol solució $y(t)$ ha de ser de la forma $y(t) = (a_1 + a_2t)e^{2t}$. Les constants a_1 i a_2 es determinen a partir de les condicions inicials

$$1 = y(0) = a_1 \quad \text{i} \quad 1 = y'(0) = 2a_1 + a_2$$

Per tant, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ i $y(t) = (1-t)e^{2t}$ per a $0 \leq t < 1$. Ara $y(1) = 0$ i $y'(1) = -e^2$. A l'instant $t = 1$, la derivada de $y(t)$ s'incrementa sobtadament en 2 unitats. Per tant, per a $1 \leq t < 2$, es té que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2 - e^2$$

Com que les condicions inicials vénen donades a $t = 1$, la solució s'escriurà de la forma $y(t) = (b_1 + b_2(t-1))e^{2(t-1)}$. Les constants b_1 i b_2 es determinen a partir de les condicions inicials

$$0 = y(1) = b_1 \quad \text{i} \quad 2 - e^2 = y'(1) = 2b_1 + b_2$$

Així doncs, $b_1 = 0$, $b_2 = 2 - e^2$ i $y(t) = (2 - e^2)(t-1)e^{2(t-1)}$, on $1 \leq t < 2$. Ara tenim que $y(2) = (2 - e^2)e^2$ i $y'(2) = 3(2 - e^2)e^2$. A l'instant $t = 2$, la derivada de $y(t)$ s'incrementa



sobtdament en 4 unitats. Consegüentment, per a $2 \leq t < \infty$, tenim que $y(t)$ satisfà el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0; \quad y(2) = e^2(2 - e^2), \quad y'(2) = 4 + 3e^2(2 - e^2)$$

Per tant, $y(t) = (c_1 + c_2(t - 2))e^{2(t-2)}$. Les constants c_1 i c_2 es determinen a partir de les equacions

$$e^2(2 - e^2) = c_1 \quad \text{i} \quad 4 + 3e^2(2 - e^2) = 2c_1 + c_2$$

Així, tenim que

$$c_1 = e^2(2 - e^2), \quad c_2 = 4 + 3e^2(2 - e^2) - 2e^2(2 - e^2) = 4 + e^2(2 - e^2)$$

i

$$y(t) = [e^2(2 - e^2) + (4 + e^2(2 - e^2))(t - 2)] e^{2(t-2)}, \quad t \geq 2 \quad \blacksquare$$

Observació. Seria interessant verificar que, efectivament, aquesta expressió coincideix amb la que s'ha obtingut anteriorment mitjançant el mètode de la transformada de Laplace. A diferència del que succeïa a l'exemple 55, on el resultat era una funció contínua amb derivada contínua, ara es pot comprovar que la solució obtinguda a l'exemple 56 també és contínua, però, en canvi, la seva derivada no ho és. Es veu fàcilment que la funció $(t - n)e^{2(t-n)}$ és nul·la a $t = n$, però no ho és la seva derivada.

La taula 5.1 mostra les transformades de Laplace de les funcions més usals.

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$	9. $\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \quad (s > \alpha)$
2. t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$	10. $t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(s - \alpha)^{n+1}} \quad (s > \alpha)$
3. $e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha} \quad (s > \alpha)$	11. $t \cos \beta t$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} \quad (s > 0)$
4. $\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2} \quad (s > 0)$	12. $t \sin \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2} \quad (s > 0)$
5. $\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2} \quad (s > 0)$	13. $H(t)$	$\frac{1}{s} \quad (s > 0)$
6. $e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (s > \alpha)$	14. $H_c(t) = H(t - c)$	$\frac{e^{-cs}}{s} \quad (s > 0)$
7. $e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (s > \alpha)$	15. $\delta(t)$	1
8. $\cosh \alpha t$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2} \quad (s > \alpha)$	16. $\delta_a(t) = \delta(t - a)$	$e^{-as} \quad (a \geq 0)$

Taula 5.1
Transformades de
Laplace de les funcions
més comunes



5.4. Integral de convolució

Considerem el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (5.8)$$

Sigui $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Apliquem la transformada de Laplace als dos costats de l'equació i n'obtenim

$$(s^2 + ps + q)Y(s) = F(s)$$

que implica

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + ps + q}$$

Fixem-nos ara només en la part

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q} \quad (5.9)$$

Si la seva transformada inversa es denota per

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \quad (5.10)$$

aquesta funció pot ser interpretada com la solució de l'equació homogènia, amb $f(t) = 0$, amb unes condicions inicials no homogènies $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Aquesta solució s'entén habitualment com la resposta natural del sistema, ja que és el resultat d'una mínima pertorbació de les condicions d'equilibri del sistema, sense estímuls externs.

Similarment, la funció $h(t)$ també es pot interpretar com la solució de l'equació diferencial on la part no homogènia s'ha substituït per un impuls a l'origen, $f(t) = \delta(t)$, i que satisfà les condicions inicials homogènies $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$. Recordem que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Per aquest motiu, $h(t)$ també s'anomena *resposta impulsional*.

Ara interpretarem la solució particular $y(t)$ de l'equació completa. Mitjançant les respectives transformades, podem posar $y(t)$ en funció de $h(t)$ i $f(t)$,

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{h(t)\} = F(s)H(s)$$

$H(s)$ es denomina *funció de transferència*. Resulta natural preguntar-se si existeix una relació senzilla i directa entre aquestes funcions. Lògicament, seria més fàcil si $y(t)$ fos el producte de $f(t)$ i $h(t)$, però òbviament això no succeeix. Tanmateix, existeix una manera de combinar dues funcions f i g per tal de formar una nova funció $f * g$, que és semblant a la multiplicació i compleix que

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Aquesta combinació de f i g apareix amb freqüència en moltes aplicacions i es coneix per *convolució* de f amb g .



Definició 11 La convolució $(f * g)(t)$ de f amb g es defineix per mitjà de l'equació

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du \quad (5.11)$$

Per exemple, si $f(t) = \sin 2t$ i $g(t) = e^{t^2}$, llavors

$$(f * g)(t) = \int_0^t \sin 2(t-u)e^{u^2} du$$

Observació. Els límits entre 0 i t de la integral de convolució van associats al fet que aquestes funcions estan definides per a $t \in [0, \infty)$. Si el seu domini fos $(-\infty, \infty)$, llavors la integral de convolució tindria límits entre $-\infty$ i ∞ .

5.4.1. Propietats

L'operador de convolució satisfà les propietats següents.

Propietat 14 L'operador convolució compleix la llei commutativa de la multiplicació, és a dir, $(f * g)(t) = (g * f)(t)$.

Demostració. Per definició, tenim que

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du$$

Fent el canvi $t - u = \zeta$ en la integral, obtenim que

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= - \int_t^0 f(\zeta)g(t-\zeta) d\zeta = \\ &= \int_0^t g(t-\zeta)f(\zeta) d\zeta \equiv (g * f)(t) \end{aligned}$$

És igualment fàcil comprovar les propietats següents:

Propietat 15 L'operador convolució compleix la llei distributiva de la multiplicació, és a dir,

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

Propietat 16 L'operador convolució compleix la llei associativa de la multiplicació, és a dir, $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Propietat 17 La convolució de qualsevol funció f amb la funció zero és igual a zero.

D'altra banda, l'operador convolució es distingeix de l'operador multiplicació perquè $f * 1 \neq f$ i $f * f \neq f^2$. De fet, la convolució d'una funció f amb ella mateixa pot fins i tot ser negativa.

Exemple 57 Calculeu la convolució de $f(t) = t^2$ amb $g(t) = 1$.



Solució

A partir de la propietat 14, tenim que

$$(f * g)(t) = (g * t)(t) = \int_0^t 1 \cdot u^2 du = \frac{t^3}{3} \quad \blacksquare$$

Exemple 58 Calculeu la convolució de $f(t) = \cos t$ amb ella mateixa i demostreu que no sempre és positiva.

Solució

Per definició tenim que

$$\begin{aligned} (f * f)(t) &= \int_0^t \cos(t-u) \cos u du = \\ &= \int_0^t (\cos t \cos^2 u + \sin t \sin u \cos u) du = \\ &= \cos t \int_0^t \frac{1 + \cos 2u}{2} du + \sin t \int_0^t \sin u \cos u du = \\ &= \cos t \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + \frac{\sin^3 t}{2} = \frac{t \cos t + \sin t \cos^2 t + \sin^3 t}{2} = \\ &= \frac{t \cos t + \sin t (\cos^2 t + \sin^2 t)}{2} = \frac{t \cos t + \sin t}{2} \end{aligned}$$

Aquesta funció és clarament negativa per a

$$(2n+1)\pi \leq t \leq (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

A continuació, es demostra que la transformada de Laplace de $f * g$ és el producte de la transformada de Laplace de f i la transformada de Laplace de g .

Teorema 9

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (5.12)$$

Demostració. Per definició, tenim que

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-u)g(u) du \right] dt$$

Aquesta integral iterativa és igual a la integral doble

$$\iint_R e^{-st} f(t-u)g(u) du dt$$

on R és la regió triangular descrita a la figura 5.5.

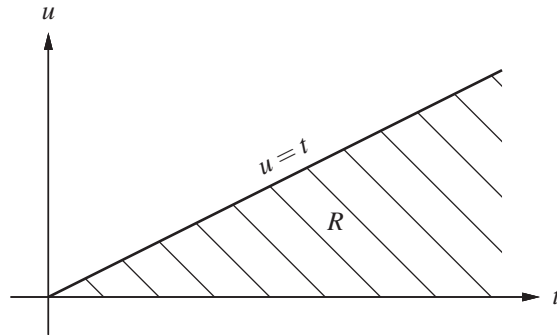


Fig. 5.5
Àrea sota la funció $u = t$

Integrant primer respecte de t , en comptes de u , s'obté

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty g(u) \left[\int_u^\infty e^{-st} f(t-u) dt \right] du$$

En fer $t - u = \xi$, trobem que

$$\int_u^\infty e^{-st} f(t-u) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+\xi)} f(\xi) d\xi$$

Per tant, es compleix que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty g(u) \left[\int_0^\infty e^{-st} e^{s\xi} f(\xi) d\xi \right] du = \\ &= \left[\int_0^\infty g(u) e^{-su} du \right] \left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \right] = \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} \end{aligned}$$

Exemple 59 Trobeu la transformada de Laplace inversa de la funció

$$\frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$

Solució

Observem que

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\} \quad \text{i} \quad \frac{a}{s^2 + a^2} = \mathcal{L}\{\sin at\}$$

Per tant, pel teorema 9, sabem que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)} \right\} &= \int_0^t (t-u) \sin au du = \\ &= \frac{at - \sin at}{a^2} \end{aligned}$$

■



Exemple 60 Trobeu la transformada de Laplace inversa de la funció

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Solució

Observem que

$$\frac{1}{s} = \mathcal{L}\{1\} \quad \text{i} \quad \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \mathcal{L}\{e^{-t} \sin t\}$$

Per tant, pel teorema 9,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \right\} &= \int_0^t e^{-u} \sin u \, du = \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-t} (\cos t + \sin t)) \end{aligned}$$

■

Observació. Ara podem donar resposta al problema que es plantejava a l'equació 5.8. Sigui $h(t)$ la solució de l'equació $y'' + py' + qy = 0$, que satisfà les condicions inicials $h(0) = 0$ i $h'(0) = 1$. Llavors,

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(t-u) h(u) \, du \quad (5.13)$$

és la solució particular de l'equació $y'' + py' + qy = f(t)$, que satisfà les condicions inicials $y(0) = y'(0) = 0$. Freqüentment, l'equació 5.13 és força més fàcil d'utilitzar que el mètode de variació de paràmetres. La generalització a unes condicions inicials qualssevol és ben senzilla a partir de l'equació 4.5.

5.5. Exercicis

1. Calculeu per a quin valor de a la solució del problema

$$y' + y = a\delta(t-1); y(0) = 1$$

verifica $y(0) = y(1)$.

2. Quina és la solució del problema de valor inicial $y'' + y = H(t-1); y(0) = y'(0) = 0$?

3. Trobeu la transformada de Laplace de la solució de l'equació $y' - \int_0^t y(\tau) d\tau = H(t) + \delta(t-1)$, que satisfà $y(0) = 1$.

4. Quina és la funció que té per transformada de Laplace $e^{-s} \frac{1}{s^2} + e^{-2s} \frac{1}{s^2 + 4}$?



5. Calculeu el valor de $\int_0^a \sin\left(\frac{a-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$.
6. Calculeu la transformada de Laplace de la funció $H(t-a) \int_0^{t-a} f(\tau) d\tau$.
7. Sigui $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funció contínua tal que la seva transformada de Laplace és

$$L\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-s}}{(s+3)^3}$$

Proveu que f és $\mathcal{C}^1$, però no $\mathcal{C}^2$.

8. Calculeu l'antitransformada de Laplace de la funció

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

9. Calculeu la solució del problema de valor inicial

$$y'' - y = 2\delta(t-1); y(0) = 0, y'(0) = 0$$

10. Considerem la funció $y(t)$, amb transformada $Y(s)$, tal que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n), y(0) = 1$$

Digueu si són certes les igualtats

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(t-n)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n) * 1$$

Quant val $Y(s)$?

11. Demostreu que $L\{e^{t-1}H(t-1)(t)\}(s) = e^{-s}/(s-1)$.
12. Sigui $f_k(t) = e^{at} * \dots^{(k)} * e^{at}$. Trobeu el valor de $f_k(t)$.
13. Si $f_n(t) = t^n$, n natural, quant val $(f_n * f_m)(t)$?
14. Si $f(t)$ és solució del problema $f'' - f = t \cos(t)$ amb condicions inicials $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, trobeu $F(s)$.
15. Donat $N \in \mathbb{N}$, calculeu la solució $y(t)$ del problema

$$y'' + \pi^2 y = \pi \sum_{n=0}^N (-1)^n \delta(t-n); \quad y(0) = y'(0) = 0$$



5.6. Respostes

1. $1 - e^{-1}$.
2. $y(t) = H(t-1)(1 - \cos(t-1))$.
3. $\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1}e^{-s}$.
4. $H(t-1)(t-1) + \frac{1}{2}H(t-2)\sin(2(t-2))$.
5. $\frac{a}{2}\sin\left(\frac{a}{2}\right)$.
6. $\frac{e^{-as}}{s}F(s)$.
7. f és de classe $\mathcal{C}^1$, però la segona derivada és discontinua a $t = 1$.
8. $f(t) = \sum_{k \geq 0} H(t-kT)$.
9. $y(t) = 2H(t-1)\sinh(t-1)$.
10. Les igualtats són certes. $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^s}{e^s - 1}$.
11. —
12. $f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{at}$.
13. $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} t^{n+m+1}$.
14. $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.
15. $y(t) = \sum_{n=0}^N \sin(\pi t) H(t-n)$.

Apèndixs

En aquests apèndixs, s'hi exposa material complementari d'àlgebra lineal, que permet fonamentar i aprofundir alguns dels resultats de la teoria d'equacions diferencials. Se suposa que el lector té els coneixements bàsics d'espais vectorials, inclosos el polinomi característic i la diagonalització d'un endomorfisme, bé sigui sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$.



Apèndix A

A.1. Polinomis de matrius

Els endomorfismes d'un espai vectorial E es poden compondre entre ells i continuen essent endomorfismes de E . Recordem que, fixant una base, la composició d'endomorfismes correspon a la multiplicació de matrius. Un cas particular d'aquesta composició és el següent.

Definició 1 Considerem $f : E \rightarrow E$ endomorfisme, i el polinomi

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$$

El polinomi $p(t)$ avaluat en f és l'endomorfisme de E :

$$p(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 I$$

$$\text{on } f^k(\vec{v}) = f \circ \cdots \circ f(\vec{v}).$$

Les propietats següents es poden comprovar de forma immediata.

Propietat 1 Si $f : E \rightarrow E$ és endomorfisme, i $p, q \in \mathbb{R}[t]$, aleshores

- $(p + q)(f) = p(f) + q(f)$
- $(p q)(f) = (q p)(f) = p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$
- Si f té matriu A en una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, llavors $p(f)$ té matriu

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

Exemple 1 Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $p(t) = t^2 - 2t + 4$. Calculeu $p(A)$.



Solució

Només cal substituir t per A en $p(t)$,

$$p(A) = A^2 - 2A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

A.2. Operador derivada

Sabem que l'espai $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de les funcions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitament diferenciables constitueix un espai vectorial de dimensió infinita. Si $y(x) \in \mathcal{F}$, podem considerar l'endomorfisme donat per l'operador derivada

$$D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \quad Dy(x) = y'(x)$$

Òbviament, D és un operador lineal, igual que les derivades successives $D^n y = y^{(n)}$. Ho notem $D^0 = I$.

Es pot aplicar el que s'ha dit a l'apartat anterior i considerar un polinomi $p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ avaluat en l'operador D :

$$p(D) = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0 I$$

que també és un endomorfisme de $\mathcal{F}$.

D'aquesta manera, una equació diferencial lineal homogènia a coeficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

es pot representar com

$$p(D)y = 0$$

i el problema de resoldre l'equació diferencial és equivalent a calcular $\ker p(D)$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, és immediat comprovar les propietats següents de l'operador D :

- $(D - \alpha)e^{\alpha x} = 0$
- $p(D)e^{\alpha x} = p(\alpha)e^{\alpha x}$
- Si $u \in \mathcal{F}$, $D(e^{\alpha x} u) = e^{\alpha x}(D + \alpha)u$
- $D^n(e^{\alpha x} u) = e^{\alpha x}(D + \alpha)^n u$
- $p(D)(e^{\alpha x} u) = e^{\alpha x} p(D + \alpha)u$
- $(Dt - tD)u = u$



→ B

Apèndix B

B.1. Polinomi anul·lador

De la mateixa manera que les arrels donen informació sobre un polinomi, fixat un endomorfisme f en un espai vectorial de dimensió finita, mirant quins polinomis compleixen $p(f) = 0$ podem obtenir informació sobre f .

Teorema 1 *Sigui $p(t)$ un polinomi de $\mathbb{R}[t]$ i f un endomorfisme. Si $p(f) = 0$, llavors tots els valors propis de f estan entre els zeros de $p(t)$.*

Ara ens preguntem si, donat un endomorfisme f , hi ha algun polinomi tal que $p(f) = 0$. Com que les matrius $n \times n$ i els endomorfismes d'un espai de dimensió n formen un espai vectorial de dimensió n^2 , els $n^2 + 1$ endomorfismes $\{I, f, f^2, \dots, f^{n^2}\}$ han de ser linealment dependents, i una relació entre ells donarà un polinomi que verifiqui $p(f) = 0$ de grau n^2 o menys.

Ara bé, per la relació entre valors propis de f i zeros de p , resulta que hi ha un polinomi de grau molt més baix que també anul·la f .

Teorema 2 *(de Cayley-Hamilton) Si $p_f(t)$ és el polinomi característic associat a un endomorfisme f , llavors es compleix $p_f(f) = 0$.*

Exemple 2 Sigui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme que, en la base canònica, té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Comproveu el teorema de Cayley-Hamilton i calculeu } A^{-1}.$$

Solució

El polinomi característic és $p_f(t) = t^2 - 3t + 3$. Llavors,

$$A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



D'altra banda, conèixer un polinomi que s'anul·li en la matriu permet calcular la seva inversa. Com que $A^2 - 3A + 3I = 0$, podem aïllar I i treure factor comú A ,

$$-\frac{1}{3}A(A - 3I) = I$$

Com que la inversa és única,

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A - 3I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Propietat 2 Sigui $p(t)$ un polinomi de $\mathbb{R}[t]$ i f un endomorfisme que diagonalitza. Una matriu associada a f es pot escriure com $A = CDC^{-1}$, amb $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Llavors, $p(f)$ també diagonalitza i $p(A) = Cp(D)C^{-1}$, amb $p(D) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$.

B.2. Polinomi mínim

El polinomi característic no té per què ser el més simple que anul·li un endomorfisme.

Definició 2 El polinomi mínim d'un endomorfisme f és el polinomi $m_f(t)$ de grau més petit tal que $m_f(f) = 0$.

El polinomi mínim existeix i és únic, llevat de producte per escalar.

Exemple 3 Sigui l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, expressat en la base canònica, té per matriu

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculeu el polinomi mínim.

Solució

El polinomi característic és $p_f(t) = -(t-2)^2(t+1)$. Podem comprovar fàcilment que $p(t) = (t-2)(t+1)$ verifica $p(f) = 0$. Sabem que tot $p(t)$ tal que $p(f) = 0$ ha de tenir com a zeros els valors propis $-1, 2$; per tant, $(t-2)(t+1)$ és el polinomi mínim de f . ■

Proposició 1 Si un endomorfisme $f: E \rightarrow E$ diagonalitza i té valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, amb independència de la seva multiplicitat, el seu polinomi mínim és $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$.

Una altra propietat dels polinomis que anul·len a endomorfismes és la següent:

Teorema 3 Sigui $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme. Si existeix un polinomi $p(t)$ que anul·la f i té tots els seus zeros simples, aleshores f diagonalitza (pot tenir zeros complexos i diagonalitzar en $\mathbb{C}$).

Observació. Qualsevol vector $\vec{v} \in E$ és anul·lat pel polinomi característic $p_f(f)$ i pel polinomi mínim $m_f(f)$. D'aquí que puguem considerar $E = \ker p_f(f) = \ker m_f(f)$.





Apèndix C

C.1. Subespais invariants

Recordem el significat de suma directa de subespais vectorials.

Teorema 4 *Suposem que U i V són subespais vectorials de E , amb bases respectives $\mathcal{B}_U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ i $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, disjunts. Llavors, $E = U \oplus V$ si i només si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V$ és base de E .*

Aquest resultat i els següents són igualment vàlids per un nombre més gran de subespais.

Definició 3 *Sigui $f : E \rightarrow E$, $E = U \oplus V$, i suposem que es compleix $f(U) \subset U$ i $f(V) \subset V$, és a dir, f deixa invariants aquests subespais. Notem f_U, f_V les respectives restriccions de f a cada subespai. Llavors, es diu que f és la suma directa $f_U \oplus f_V$, i que U i V formen una descomposició en suma directa f -invariant de E .*

En espais vectorials de dimensió finita, si f_U té per matriu associada A_U , en una base $\mathcal{B}$, i la matriu de f_V és A_V , llavors la matriu A associada a f és diagonal per blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_U & 0 \\ 0 & A_V \end{pmatrix}$$

i s'expressa $A = A_U \oplus A_V$. Recordem que es compleix $\det(A) = \det(A_U) \det(A_V)$.

En aquesta situació, pel polinomi mínim es compleix la propietat següent:

Propietat 3 *Suposem que un endomorfisme té associada una matriu diagonal per blocs, $A_1, A_2, \dots, A_k$. Llavors, el polinomi mínim és el mínim comú múltiple dels polinomis mínims de cada bloc A_i , $1 \leq i \leq k$.*

Més en general, per a qualsevol endomorfisme, inclús si la dimensió de l'espai vectorial no és finita, tenim els resultats següents.



Proposició 2 Si $f : E \rightarrow E$ és endomorfisme, i $p, q_1, q_2 \in \mathbb{R}[t]$, aleshores:

- El subespai $\ker p(f)$ és un subespai invariant per f
- Si $p = q_1 q_2$, llavors $\ker q_1(f) \subset \ker p(f)$ i $\ker q_2(f) \subset \ker p(f)$
- Si $p = q_1 q_2$, amb q_1, q_2 primers entre ells, aleshores $\ker p(f) = \ker q_1(f) \oplus \ker q_2(f)$

C.2. Endomorfisme que diagonalitza

Si un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ diagonalitza (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) i té valors propis diferents $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, amb $\dim E = n$, llavors se satisfan els resultats següents:

- El seu polinomi característic és

$$p_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \cdots + n_k = n$$

- La multiplicitat algebraica i geomètrica dels valors propis coincideixen

$$n_i = \dim \ker(f - \lambda_i I), \quad 1 \leq i \leq k$$

- El seu polinomi mínim és $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$
- $E = \ker p_f(f) = \ker m_f(f)$ es descompon en suma directa de subespais invariants,

$$E = \ker(f - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_k I)$$

- L'endomorfisme f és una suma directa i la seva matriu associada, en la base dels vectors propis, és diagonal per blocs (diagonals),

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \text{diag}(\lambda_k, \dots, \lambda_k)^{n_k}$$

C.3. Valors propis complexos

Quan els valors propis d'un endomorfisme f són complexos i, per tant, f no diagonalitza en $\mathbb{R}$, també és possible trobar una descomposició de l'espai vectorial E en suma directa de subespais invariants. Suposem el cas de valors propis simples.

Si λ és un valor propi (real o complex) de f , llavors el factor de primer grau $p(t) = t - \lambda$ proporciona el vector propi del $\ker p(f)$. Però, si el valor propi és complex, $\lambda = \alpha + i\beta$, amb vector propi $\vec{a} + i\vec{b}$, i només volem considerar factors primers de polinomis reals, llavors hem d'aplegar els factors lineals en λ i el seu conjugat $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, que té per vector propi $\vec{a} - i\vec{b}$.

Així, el factor quadràtic

$$q(t) = [t - (\alpha + i\beta)][t - (\alpha - i\beta)] = (t - \alpha)^2 + \beta^2$$

proporcionarà, en el cas de valors propis complexos, dos vectors reals $\vec{a}, \vec{b} \in \ker q(f)$, ja que

$$q(f)(\vec{a} + i\vec{b}) = \vec{0}$$

es compleix separadament per a les parts real i imaginària.

Evidentment, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ han de ser linealment independents, perquè, si no, el valor propi seria necessàriament real.

En aquest cas, en considerar un factor primer real de grau dos, hem trobat un subespai invariant de dimensió dos, generat pels vectors reals $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tot i que l'endomorfisme no diagonalitza en $\mathbb{R}$.

Exemple 4 Seguint amb el cas anterior, vegem quina forma pren la matriu associada a f en la base $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Solució

Per hipòtesi, es verifica

$$f(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha + i\beta)(\vec{a} + i\vec{b}) = (\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}) + i(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b})$$

Per tant, tenint en compte la linealitat de f , igualant separadament les parts real i imaginària dels dos extrems de la igualtat, obtenim

$$f(\vec{a}) = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}; \quad f(\vec{b}) = \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

D'aquesta forma, en la base $\mathcal{B}$, la matriu A associada a f resulta

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Exemple 5 Vegem en quina base la següent matriu A , associada a un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica, diagonalitza per blocs en $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució

Primer busquem els valors propis de la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = [(\lambda - 1)^2 + 2^2](3 - \lambda)$$

Les arrels del polinomi característic són $\lambda = 3, 1 + 2i, 1 - 2i$.



Calculem el vector propi per a $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $x = z$, $y = 0$. Per tant, un vector propi és $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Busquem ara el vector propi associat a $\lambda = 1 + 2i$.

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 & 2 \\ -1 & 1-2i & 1 \\ 1 & -3 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Després d'alguns càlculs, s'obté $x = -(1+i)z$, $y = -iz$.

Per tant, un vector propi és $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1-i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Separant les parts real i imaginària, $\vec{w} = \vec{a} + i\vec{b}$, tenim

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Així, d'acord amb el que s'ha vist a l'exemple 4, en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}\}$, l'endomorfisme s'expressa amb la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

amb un bloc 1×1 , $M_1 = (3)$, corresponent al subespai invariant generat pel vector $(1, 0, 1)^T$, i un bloc 2×2 , $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, corresponent al subespai invariant generat pels vectors $(-1, 0, 1)^T, (-1, -1, 0)^T$.

La matriu C de canvi de base, de la base $\mathcal{B}$ a la canònica, és la que té els elements de la base $\mathcal{B}$ per columnes, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que sempre és invertible.

Finalment, la relació entre les matrius A i M és precisament la que correspon al canvi de base entre les matrius respectives. Per tant, M també es podria haver calculat com $M = C^{-1}AC$. ■





Apèndix D

D.1. Descomposició primària

Vegem ara un resultat més general, aplicable a valors propis múltiples en el cas en què la matriu no diagonalitza. Comencem per les propietats següents:

Propietat 4 *Sigui $p \in \mathbb{R}[t]$ un factor indivisible de primer o de segon grau, i f un endomorfisme.*

- (i) *Llavors, $\ker p(f) \subset \ker p^2(f)$. En efecte, si $\vec{v} \in \ker p(f)$, $p(f)(\vec{v}) = \vec{0}$, i tornant a aplicar $p(f)$, $p^2(f)(\vec{v}) = \vec{0}$.*
- (ii) *En particular, si $\vec{v} \in \ker p^2(f)$, llavors es compleix $p(f) \circ p(f)(\vec{v}) = \vec{0}$. Per tant, $p(f)(\vec{v}) \in \ker p(f)$.*
- (iii) *En general, si $\vec{v} \in \ker p^n(f)$ per a algun nombre natural $n > 1$, llavors $p^{n-k}(f)(\vec{v}) \in \ker p^k(f)$, amb $k < n$.*

De forma general, tenim la proposició següent:

Proposició 3 *Sigui $f : E \rightarrow E$ un endomorfisme i $p \in \mathbb{R}[t]$. Si $m_1 < m_2$ són dos nombres naturals, aleshores $\ker p^{m_1}(f) \subset \ker p^{m_2}(f)$.*

A més, si $\ker p^{m_1}(f) = \ker p^{m_2}(f)$, aleshores $\ker p^{m_1}(f) = \ker p^k(f)$ per a tot natural $k \geq m_1$.

La propietat següent caracteritza el polinomi mínim. Tinguem en compte que els resultats següents s'apliquen a espais vectorials de dimensió finita.

Proposició 4 *Si $f : E \rightarrow E$ és un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n i la descomposició factorial del polinomi característic $p_f(t)$ en $\mathbb{R}[t]$ és*

$$p_f(t) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad \sum_{i=1}^k n_i \operatorname{gr}(p_i) = n$$



aleshores, el polinomi mínim és

$$m_f(t) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

amb $1 \leq m_i \leq n_i$ per a tot $i = 1, \dots, k$. En particular, m_i és el menor valor que compleix $\dim \ker p^{m_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$.

Per tant, sempre podem comptar que $\dim \ker p^{n_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$, encara que de vegades trobarem els generadors del $\ker p^{n_i}$ a partir del $\ker p^{m_i}$ amb $m_i < n_i$.

Exemple 6 A l'exemple 3, un endomorfisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tenia per matriu, en la base canònica,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que és diagonal. El primer bloc 2×2 , $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, està associat al factor $(t-2)^2$ de $p_f(t)$. Com que $\dim \ker(D_1 - 2I) = 2$, el polinomi mínim d'aquest bloc és $(t-2)$, i el polinomi mínim de f és $m_f(t) = (t-2)(t+1)$. ■

Teorema 5 (de descomposició primària) Sigui $f: E \rightarrow E$ un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n . Si

$$m_f(t) = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}; \quad p_f(t) = (-1)^n p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

amb $\sum_{i=1}^k n_i \operatorname{gr}(p_i) = n$ són les descomposicions factorials dels polinomis mínim i característic, respectivament, aleshores l'espai vectorial $E = \ker p_f(f) = \ker m_f(f)$ es descompon en suma directa dels subespais f -invariants següents,

$$E = \ker p_1^{m_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{m_k}(f)$$

$$E = \ker p_1^{n_1}(f) \oplus \cdots \oplus \ker p_k^{n_k}(f)$$

amb dimensió $\dim \ker p^{m_i} = \dim \ker p^{n_i} = n_i \operatorname{gr}(p_i)$.

Exemple 7 A l'exemple d'abans, $\mathbb{R}^3 = \ker(D-2I) \oplus \ker(D+I)$. ■

Exemple 8 Apliquem el teorema de descomposició primària a la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

associada a un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$. Determineu els subespais invariants per A ; doneu-ne una base; trobeu la forma diagonal per blocs, M , de l'endomorfisme en aquesta base, i calculeu la matriu invertible C que satisfà $M = C^{-1}AC$.

Solució

Primer busquem els valors propis la matriu,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & -5 & 6 \\ 4 & 7 - \lambda & -4 \\ -8 & -4 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2(1 - \lambda)$$

Les arrels del polinomi característic són $\lambda = 5$, doble, i $\lambda = 1$, simple.

Busquem els vectors propis per a $\lambda = 5$.

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = -2x, z = 0$. Per tant, un vector propi és $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Com que $\text{rang}(A - 5I) = 2$, $\dim \ker(A - 5I) = 1$, i la matriu no diagonalitza. Així, el subespai invariant no és $\ker(A - 5I)$, sinó $\ker(A - 5I)^2$, i el bloc corresponent ha de ser 2×2 .

D'acord amb la propietat 4, el vector propi $\vec{v}_1$ ja pertany al $\ker(A - 5I)^2$. Hem de trobar, doncs, un vector del $\ker(A - 5I)^2$ linealment independent de l'anterior.

Aquest vector, $\vec{v}_2 \in \ker(A - 5I)^2$, el trobarem resolent $(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1, \vec{v}_1 \in \ker(A - 5I)$,

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 6 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'on $y = 1 - 2x, z = 1$. Fent $x = 0$, tenim $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Així, $\ker(A - 5I)^2 = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, i les imatges d'aquests vectors per A són

$$A\vec{v}_1 = 5\vec{v}_1$$

$$(A - 5I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \implies A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$$

Ara busquem un vector propi per a $\lambda = 1$. És immediat veure que

$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ho és. Per tant, la seva imatge per A és



$$A\vec{v}_3 = \vec{v}_3$$

En resum, la descomposició de $\mathbb{R}^3$ en subespais invariants queda com

$$\mathbb{R}^3 = \ker(A - 5I)^2 \oplus \ker(A - I)$$

En la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, la matriu associada a l'endomorfisme s'expressa per tres columnes $(5, 0, 0)^T, (1, 5, 0)^T, (0, 0, 1)^T$, és a dir,

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

amb un bloc 2×2 , $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, i un bloc 1×1 , $M_2 = (1)$.

La matriu C de canvi de base, de la base $\mathcal{B}$ a la canònica, és la que té els elements de la base $\mathcal{B}$ per columnes, és a dir,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recordem que sempre és invertible.

Finalment, la relació entre les matrius A i M és precisament la que correspon al canvi de base entre les respectives matrius. Per tant, M també es pot calcular com

$$M = C^{-1}AC$$

■

D.2. Polinomi en l'operador derivada

Una aplicació immediata del teorema de descomposició primària d'endomorfismes permet calcular la base de solucions d'una equació diferencial lineal i homogènia a coeficients constants, escrita com un endomorfisme donat per un polinomi avaluat en l'operador derivada D de l'apèndix A.2.

Considerem el polinomi de grau n , $p(t) = t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$, i l'equació diferencial lineal homogènia a coeficients constants donada per

$$p(D)y = 0$$

Hem dit abans que la solució de l'equació és precisament $\ker p(D)$. Vegem quines n funcions linealment independents el generen.

- Si λ és una arrel real simple de $p(t)$, com que $D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$, llavors

$$\ker(D - \lambda) = \langle e^{\lambda t} \rangle$$

que és un subespai invariant per D de $\ker p(D)$.

- Si λ és una arrel real de multiplicitat m de $p(t)$, es pot comprovar que

$$t^k e^{\lambda t} \in \ker(D - \lambda)^{k+1}; \quad k = 0, \dots, m-1$$

Aquestes funcions són linealment independents.

De fet, es compleix

$$\dim \ker(D - \lambda)^{k+1} = k+1; \quad k = 0, \dots, m-1$$

i, per tant,

$$\ker(D - \lambda) \subset \ker(D - \lambda)^2 \subset \dots \subset \ker(D - \lambda)^m$$

Llavors,

$$\ker(D - \lambda)^m = \langle e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t} \rangle \subset \ker p(D)$$

- Si $\lambda = \alpha + i\beta$ és una arrel complexa de $p(t)$, amb multiplicitat m , llavors $p(D)$ anul·la per separat les parts real i imaginària de $t^k e^{\lambda t}$, $k = 0, \dots, m-1$. Per tant, les funcions

$$t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^k e^{\alpha t} \sin \beta t; \quad k = 0, \dots, m-1$$

pertanyen a $\ker p(D)$ i són solucions independents de l'equació diferencial tractada.

