
CXL exercicis amb solucions

d'equacions diferencials ¹

Rafael Cubarsi & Pau Martín

Departament de **M**atemàtica **A**plicada **4**

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya

¹A partir de problemes apareguts en exàmens de tipus test durant els anys 1996-2005.
Amb la col·laboració de Germinal Camps (beca de suport a la docència UPC 009155-230-743-2 (2005-2006)).

Copyright ©2005-2010 by Rafael Cubarsi and Pau Martín



Aquesta obra es distribueix sota la llicència creative-commons amb les condicions

Reconeixement-No comercial-Compartir de la versió 3.0 d'aquesta llicència. Resumint:

Sou lliure de:



copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra,



fer-ne obres derivades,

amb les condicions següents:



Reconeixement. Heu de reconèixer els crèdits de l'obra de la manera especificada per l'autor o el llicenciador (però no d'una manera que suggereixi que us donen suport o rebeu suport per l'ús que feu de l'obra).



No comercial. No podeu utilitzar aquesta obra per a finalitats comercials.



Compartir amb la mateixa llicència. Si altereu o transformeu aquesta obra, o en genereu obres derivades, només podeu distribuir l'obra generada amb una llicència idèntica a aquesta.

- Quan reutilitzeu o distribuïu l'obra, heu de deixar ben clar els termes de la llicència de l'obra.
- Algunes d'aquestes condicions pot no aplicar-se si obteniu el permís del titular dels drets d'autor.
- No hi ha res en aquesta llicència que menyscabi o restringeixi els drets morals de l'autor.

Podeu trobar el text complet de la llicència a l'adreça:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.ca>

o envieu una carta a:

Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA

1 Equacions de primer ordre

1. Calcula quines són les trajectòries ortogonals a la família de corbes $125(y+a)^3 = 1-x$, $a \in \mathbb{R}$.
2. De quin tipus és l'equació diferencial de la família de corbes $x^3 + y^3 = C$?
3. És homogènia l'equació $y' + 1 = e^{x/y}$? i l'equació $\log x^2 = y' + 2\log(2y)$?
4. De quina classe són les corbes tals que, en cada punt (x, y) , la projecció orthogonal del segment de normal comprès entre el punt de contacte a la corba i l'eix OX té punt mig $(2x, 0)$.
5. Sigui $y' = y^\alpha$, $y(0) = 1$. Per a quins valors de $\alpha \geq 0$ la solució maximal està definida al menys a $(0, \infty)$?
6. Quin és l'interval de definició de la solució maximal del problema de valor inicial

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1$$

7. Considerem l'equació

$$y' + \frac{y}{t} = t^3 y^3$$

Troba on està definida la solució maximal $y(t)$ tal que $y(1) = 1$.

8. Calcula la família de corbes que té per trajectòries ortogonals les solucions de l'equació $x^2 y' - y^2 y' = 2xy$.
9. Troba l'expressió de les corbes tals que tot punt és punt mig del segment de recta tangent en aquest punt, comprès entre els dos eixos.
10. Considerem $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ amb $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i $|g'(x)| > 1$. Sigui el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ amb $f(x, y) = g(\frac{x}{y})$. Calcula per quins valors de a i b el teorema de Picard assegura que el problema té solució única.
11. Troba la família de corbes ortogonals a les hipèrboles $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$.
12. Sigui $y(x)$ la solució del PVI $\{y' = 1 - \sin y, y(0) = 0\}$. Quin valor obtenim en aproximar $y(\pi)$ pel mètode d'Euler amb 2 iteracions?
13. Quina és la família de corbes tals que, per a cadascun dels seus punts, l'eix OY divideix en dos parts iguals el segment de recta tangent a la corba comprès entre el punt de tangència i l'eix OX ?
14. Considerem la solució del problema de valor inicial

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1$$

Calcula $y(e)$.

15. Quina equació satisfan les trajectòries ortogonals a la família $x^2 - y^2 = kx$, $k \in \mathbb{R}$?

16. Calcula quines corbes satisfan que la projecció sobre l'eix OY del tros de normal limitat pel punt de contacte amb la corba i l'eix OY té longitud $\frac{1}{2}$.

17. Sigui l'equació $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$. De quin tipus és l'equació en la que es transforma amb el canvi de variable $y = \frac{1}{x} + u$?
18. Per quins valor de a i b no podem aplicar el teorema de Picard per assegurar que el problema de valor inicial $\{y' = |x-1||x-2| + x \cos(\frac{1}{y}), y(a) = b\}$ té solució única?
19. Quina és la trajectòria orthogonal a les corbes d'equació $x^2 + 2y^2 = c$, i que passa pel punt $(1, 1)$?
20. Troba l'equació resultant de fer el canvi $v = \frac{1}{\cos y}$ a l'equació $y' \sin y = \cos y(1 - x \cos y)$.
21. Per a quina classe de corbes l'àrea del triangle limitat per l'eix OY , el radi vector i la recta tangent a un punt de la corba és igual que l'àrea del triangle limitat per l'eix OX , el radi vector i la recta normal.

22. Sigui la família de corbes $x^2 y + xy^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$. Calcula l'equació diferencial de la que són solució les corbes normals a les donades.

23. De quin tipus és l'equació diferencial de les trajectòries ortogonals a la família de corbes $xy = c$?
24. Troba la corba que passa per $(0, 1)$ i tal que la recta tangent en (x, y) talla l'eix OX en el punt $(y, 0)$.
25. De quin tipus és l'equació diferencial de la família de corbes $(k - \cos x)y = 1$, $k \in \mathbb{R}$?

26. Quina equació diferencial verifica la corba per la que l'àrea del triangle que formen l'eix d'abscisses, la tangent a la corba i el radi vector del punt de contacte (x, y) és constant i igual a a^2 ? Quina és la seva equació paramètrica?

27. Sigui la família de corbes

$$\frac{x^2}{a} + \frac{a}{y^2} = \frac{1}{a}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Troba l'equació diferencial que satisfan les corbes normals a aquesta família.

28. Troba la solució maximal del problema de valor inicial

$$ty' + (2t+1)y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$$

29. De quin tipus és l'equació diferencial tal que la família de corbes $C = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $C \in \mathbb{R}$ n'és la solució general?
30. Calcula la corba que passa pel punt $(1, 1)$ tal que la tangent a cada punt (x, y) talla l'eix OY a $(0, x^2)$.

RESPOSTES

1. $y + 9(1-x)^{\frac{5}{3}} + a = 0$.
2. Homogènia i de variables separables.
3. Les dues ho són.
4. Hipèrboles.
5. $0 \leq \alpha \leq 1$.
6. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
7. Està definida per $0 < t < \sqrt{2}$.
8. $x^2 + y^2 = 2ax$.
9. $y = \frac{k}{x}$.
10. El problema té solució única per a $b \neq 0$.
11. $\log y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$.
12. $\frac{\pi}{2}$.
13. Són del tipus $y = \frac{C}{\sqrt{x}}$.
14. No està definit.
15. $y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$.
16. $y = x^2 + C$.
17. Bernoulli.
18. Per a $b \neq 0$.
19. $y = x^2$.
20. $v' = v - x$.
21. Rectes.
22. $(2x+y)yy' - x(x+2y) = 0$.
23. És de tipus homogeni i de variables separades.
24. $y = e^{-x/y}$.
25. De variables separables.
26. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2a^2}{y}$.
27. $(1-x^2) + xyy' = 0$.
28. $y(t) = (t^2 - 1)e^{-2t}/(2t)$.
29. Homogènia.
30. $y(x) = 2x - x^2$.

2 Equacions d'ordre superior

1. Considerem l'equació $y'' + 2ay' \cot ax + (b^2 - a^2)y = 0$. En quina equació es transforma amb el canvi de variable $u(x) = y(x) \sin ax$?
2. Sabent que $xe^x \cos x$ és una solució de

$$y^v - 5y^{iv} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0,$$
 troba'n un sistema fonamental de solucions.
3. Troba la solució general de l'equació $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$.
4. Mitjançant el canvi $z = (\ln |y|)'$, calcula en quina equació es transforma l'equació diferencial $y'' + ay' + by = 0$, on $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Troba en quina equació es transforma l'equació

$$y'' - f(x)y = 0$$

mitjançant el canvi $z = y'/y$.

6. Donada l'equació $y'' + f(t)y' + g(t)y = 0$, amb $f(t) + g(t) + 1 = 0$, troba'n una solució
7. Calcula en quina equació es transforma $y'' - \frac{2}{x}y' + (1 + \frac{2}{x^2})y = xe^x$, amb el canvi $y = xv$.

8. Sigui $x^2y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y = x^3$. Fent servir els dos problemes anteriors, troba la solució general.
9. Calcula per a quin valor de n la solució general de l'equació

$$x^2y'' - 2xy' - (x^2 - 2)y = 2x^n e^x$$
 és $y(x) = Axe^x + Bxe^{-x} + x^2e^x$.
10. Per a quins valors de a , b i c podem assegurar que el problema de valor inicial $\{y'' + \frac{1}{x}y' + x\sqrt{y} = 1, y(a) = b, y'(a) = c\}$ té solució única?

11. Troba per a quins valors de r la funció $y(x) = x^r$ és solució de l'equació $x^3y''' - 6xy' + 12y = 0$.

12. Calcula l'ordre mínim de l'equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants que admet com a solució particular la funció $12t^2 + 9t^3 \sin(t) - te^{13t}$.

13. Siguin $f_1, f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tals que

$$f_1(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x^3 & \text{altrament} \end{cases}$$

Considerem l'equació $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, amb $a(x), b(x)$ funcions contínues. Raona si $\{f_1, f_2\}$ pot ser-ne sistema fonamental de solucions.

14. Si fem el canvi de variable $s = \tan t$ dins l'equació $y'' - 2 \tan t y' + (1 + \tan^2 t)y = 0$, quina equació diferencial obtenim en la nova variable s ?
15. Troba la solució general de l'equació diferencial

$$y'' + y = \cos t + t$$

16. Calcula quina és l'equació lineal homogènia amb coeficients constants de menor ordre que admet com a solució $x \sin x$.
17. Considera l'equació lineal homogènia

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$

Sabent que la funció $y_1(t) = t$ n'és solució troba la solució que verifica que $y(1) = 0$ i $y'(1) = -1$

18. Sabent que

$$ty'' - y' + \frac{3}{4t}y = 0$$

admet solucions de la forma t^k , $k \in \mathbb{R}$, troba la solució general de l'equació

19. Si te^{2t} i e^{-t} són solucions de l'equació diferencial amb coeficients constants $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, quant val a_0 ?

RESPOSTES

1. $u''(x) + b^2u(x) = 0$.
2. $\{e^x, e^x \cos x, e^x \sin x, xe^x \cos x, xe^x \sin x\}$.
3. $y = C_1 \exp 2t + C_2 \exp(-t) + C_3 \exp(-3t)$.

4. $z' + z^2 + az + b = 0$.
5. $z' + z^2 = f(x)$.
6. $y(t) = e^t$ és solució.
7. $v'' + v = e^x$.
8. $\{y \mid y(x) = -x + ax \sinh x + bx \cosh x, a, b \in \mathbb{R}\}$.
9. $n = 3$.
10. $a \neq 0, b > 0$.
11. $r = 2, r = 3, r = -2$.
12. 13.
13. $\{f_1, f_2\}$ no pot ser sistema fonamental de solucions perquè $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$, per a tot $x \in [-1, 1]$.
14. $y'' + y = 0$.
15. $\{y \mid y(t) = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t \sin t + a \sin t + b \cos t, a, b \in \mathbb{R}\}$.
16. $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.
17. $y(t) = t - t^2$.
18. $y(t) = at^{\frac{1}{2}} + bt^{\frac{3}{2}}$.
19. $a_0 = 4$.

3 Sistemes d'equacions diferencials

1. Supposeu que

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \sin t \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, on $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Troba la matriu A .

2. Es considera el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$,

amb $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcula e^{At} .

3. Sigui $\vec{x}(t)$ la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, 0)$. Calcula el vector $\vec{x}(1)$.

4. La matriu $M(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental del sistema lineal homogeni $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$. Troba una solució que valgui $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $t = \pi/2$.

5. Quina és la matriu $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associada al sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ que té per solucions $\vec{x}_1(t) = \vec{v} \cos t$ i $\vec{x}_2(t) = \vec{w} \sin t$, amb $\vec{v}$ i $\vec{w}$ linealment independents?

6. Si $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

és solució del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, troba dues solucions linealment independents més.

7. El sistema $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ té per matriu fonamental de solucions, en un cert interval,

$$X(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Troba la matriu $A(t)$.

8. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula e^A .

9. Sabent que $\vec{x}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ és solució de $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, calcula A .

10. Sigui $V(t)$ una matriu fonamental del sistema lineal homogeni $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$. Suposem que $V(t+s) = V(t)V(s)$, per a qualsevol s i t de $\mathbb{R}$. Demostreu que $V(0) = \text{Id}$, $V(t)V(s) = V(s)V(t)$, $V(-t) = V(t)^{-1}$ i que A és constant.

11. Sabent que

$$\vec{x}(t) = \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2}, 2t + \frac{t^2}{2}, t + \frac{t^2}{2} \right) e^t$$

és solució d'un sistema lineal homogeni a coeficients constants, troba un sistema fonamental de solucions.

12. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$, on $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ té coeficients continus a $\mathbb{R}$. Si $X(t)$ és una matriu fonamental de solucions i $W(t) = \det X(t)$. Demostreu que $W'(t) = (a(t) + d(t)) W(t)$.

13. Sigui A una matriu $n \times n$, constant. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = \frac{1}{t} A\vec{x}$. Aplicant el canvi $t = e^s$, en quin sistema es transforma?

14. Quant val la solució del PVI $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$, $\vec{x}(0) = (2, -3)$, en $t = 1$?

15. Per a quins valors de α i β resulta que $V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cos t + \beta \sin t & \sin t \\ 0 & \beta \cos t - \alpha \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ és matriu fonamental d'un sistema a coeficients constants?

16. Troba la solució del problema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ amb

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sigui $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ una solució del sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Calcula A , sabent que és constant.

18. Sigui el sistema lineal amb coeficients constants $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Què ha de satisfer M perquè $e^{At}M$ sigui una matriu fonamental?

19. Sigui la solució $x(t)$ del problema de valor inicial

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcula $\vec{x}(\pi)$.

20. Sigui $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Suposeu que $e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$. Troba la matriu e^{tA} .

21. Calcula la solució del problema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

RESPOSTES

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 1 - e^{-t} & 2 + t - e^{-t} & -2 - t + 2e^{-t} \\ 1 - e^{-t} & 1 + t - e^{-t} & -1 - t + 2e^{-t} \end{pmatrix}$.
3. $\vec{x}(1) = (1 - e^{-2}, 1 + e^{-2})$.
4. No hi ha cap solució que valgui $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $t = \pi/2$.
5. No existeix.
6. $e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.
7. $A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 - t^2 & t^2 \\ 1 - t^2 & t^2 \end{pmatrix}$.
8. $e^A = \begin{pmatrix} e \cos(3) & -e \sin(3) \\ e \sin(3) & e \cos(3) \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 10.
11. (e^t, e^t, e^t) .
- 12.
13. Amb el canvi $t = e^s$ es transforma en $\dot{\vec{x}}(s) = A\vec{x}(s)$.
14. $(e^2 + e^7, -4e^2 + e^7)$.
15. $\alpha \neq 0$.
16. $x(t) = (e^t + 2te^t + e^{2t}, e^{2t}, e^t)$.
17. $\begin{pmatrix} 19/4 & -37/20 & 1/5 \\ 17/4 & -23/20 & -1/5 \\ -1 & -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.
18. $e^{At}M$ és una matriu fonamental si i només si M és invertible.
19. $\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ -1 \end{pmatrix}$.
20. $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.
21. $x(t) = (e^t + 2te^t, e^t)$.

4 Estudi qualitatiu

1. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$. Sigui $\vec{x}_0$, un punt d'equilibri, i $p(\lambda)$, el polinomi característic de $Df(\vec{x}_0)$. Discuteix l'estabilitat de $\vec{x}_0$ si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0 .
2. Quan podem afirmar que les solucions de $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x}$ tendeixen a zero quan $t \rightarrow +\infty$?
3. Considerem el sistema $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$, on $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{7t} \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Comenta l'estabilitat de les seves solucions.
4. Sigui $\begin{cases} x' = x - e^y + 1 \\ y' = \sinh y \end{cases}$. Són estables els seus punts d'equilibri?
5. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = yx^2 \\ y' = -xy^2 \end{cases}$

Què podem dir respecte a l'estabilitat de les solucions del sistema linealitzat al punt $(0, 1)$?

6. De quini tipus és el punt d'equilibri del sistema $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$?

7. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = x - x^2y \\ y' = y - xy^2 \end{cases}$. Quantes òrbites conté la recta $y = -5x$?

8. Com són les solucions del sistema

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$$

9. Considerem el sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. De quin tipus és el punt d'equilibri $(0, 0)$?

10. Considerem el sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^2 \end{cases}$

Què podem dir del punt $(0, 0)$?

11. Considerem el sistema lineal no homogeni

$$\begin{cases} x' - y = \cos t \\ y' + x = \sin t \end{cases}$$

Com és l'estabilitat de les seves solucions?

12. Discuteix l'estabilitat de les solucions de l'equació

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + ay = 0$$

segons els valors de a .

13. Quins són els punts d'equilibri del sistema $\begin{cases} x' = 1 + xy \\ y' = x + y^3 \end{cases}$ i quin tipus d'estabilitat tenen?

14. Considera l'equació diferencial $y' = g(x)y$, on $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua. Què podem dir de l'estabilitat de les seves solucions si $\int_0^\infty g(x) dx = -\infty$?

15. Sigui una equació lineal homogènia a coeficients constants tal que el seu polinomi característic presenta totes les arrels amb part real negativa excepte una, que és $\lambda = 0$. Discuteix com són les seves solucions.

16. Considerem el sistema $\begin{cases} x' = a^2y + \cos at \\ y' = -\epsilon^2x + b \sin at \end{cases}$ amb $a, b \neq 0$. Prova que si $\epsilon^2 = 1$, no té solucions periòdiques, mentres que si $\epsilon^2 = ab$, totes ho són.

17. Sigui el sistema $x' = -x + xy$, $y' = y - xy$. Quins són els seus punts d'equilibri? Comenta'n l'estabilitat

18. Considerem el sistema lineal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Per a quins valors de a podem afirmar que el punt d'equilibri $(0, 0, 0)$ és asimptòticament estable?

19. Troba per a quins valors de a i b la solució del PVI

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2 \cos x \\ y(0) = a, y'(0) = b \end{cases}$$

és una funció periòdica.

20. Considerem el sistema autònom que en coordenades polars està expressat per

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)(r^2 - 9), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Què podem dir de l'estabilitat de les solucions amb $\{r = 1\}$?

21. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = y(x^2 - y^2) \\ y' = -x(x^2 - y^2) \end{cases}$. Què podem afirmar de l'estabilitat del punt d'equilibri $(0, 0)$?
22. Descriu l'estabilitat de les solucions de $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y' + ky = 0$ segons els valors de k .
23. Considera el sistema lineal amb coeficients constants $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Si sabem que el sistema té una solució inestable, podem afirmar alguna cosa de les altres solucions?
24. Considera el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Discuteix l'estabilitat de les seves solucions.

25. Sigui $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ amb $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda$ valor propi, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ i $\exists \lambda_0$ amb $\operatorname{Re}(\lambda_0) = 0$. Com és l'estabilitat dels seus punts d'equilibri?
26. Considerem $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ un sistema no lineal autònom. Sigui $\vec{x}_0$ un punt d'equilibri aïllat i $\vec{0}$ el corresponent punt d'equilibri del sistema linealitzat. Què podem afirmar de $\vec{x}_0$ si sabem que $\vec{0}$ és asimptòticament estable?
27. Per a quins valors de a i b podem assegurar que les solucions de $y''' + ay'' + by' + y = 0$ són asimptòticament estables?
28. Què han de complir α, β per a que les solucions del sistema

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\alpha t}$$

siguin estables?

29. Què es pot afirmar referent a l'estabilitat del sistema $\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$?
30. Sigui el sistema $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = (1 - a^2)x - y \end{cases}$. Estudia el nombre i l'estabilitat dels punts d'equilibri per a $a \in \mathbb{R}$.
31. Considera el sistema $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x^2 \end{cases}$. A quin punt tendeix l'òrbita que passa per $(3, 3)$ quan $t \rightarrow +\infty$?
32. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que existeix $M > 0$ amb $|\int_0^t f(s) ds| < M$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Què podem dir de l'estabilitat de les solucions de l'equació $y' = f(t)y$?

RESPOSTES

- Si $p(\lambda)$ té totes les arrels amb part real < 0 , $\vec{x}_0$ és asimptòticament estable.
- $a + d < 0$ i $ad - bc > 0$.
- Les seves solucions són inestables.
- Té un sol punt d'equilibri, que és inestable.
- Té òrbites paral·leles a l'eix OY .
- Un coll (o punt de sella).
- La recta $y = -5x$ conté tres òrbites.
- Inestables.
- Un node.
- $(0, 0)$ és un punt d'equilibri estable però no asimptòticament estable.
- Periòdiques i estables.
- Asimptòticament estables si $a \in (0, 1)$, estables si $a = 0$ o $a = 1$, i inestables a la resta.
- Té dos punts d'equilibri inestables.
- Totes les solucions són asimptòticament estables.
- Si 0 és simple les solucions són estables, si 0 és doble les solucions són inestables.
-
- Té un punt d'equilibri inestable.
- $a < 0$.
- Només si $a = 0$ i $b = 1$.
- $\{r = 1\}$ és una òrbita periòdica estable.
- $(0, 0)$ és estable però no asimptòticament estable.
- Asimptòticament estables per a $k \in (0, 2)$, estables per a $k = 2$ o $k = 0$, i inestables a la resta.
- Si el sistema té una solució inestable, totes les solucions són inestables.
- Totes les solucions són inestables.
- Estables només si $\operatorname{mult}(\lambda_0) = \dim \ker (A - \lambda_0 I)$.
- Si $\vec{0}$ és asimptòticament estable, $\vec{x}_0$ també ho és.
- Si i només si $a > 0$ i $a > \frac{1}{b}$.
- $\alpha\beta < 0$.
- Té dos punts d'equilibri, un d'estable i un altre d'inestable.
-
- L'òrbita que passa pel punt $(3, -3)$ tendeix a $(0, 0)$ quan $t \rightarrow +\infty$.
- Són totes estables i fitades en tot $\mathbb{R}$.

5 Transformada de Laplace

- Calcula per a quin valor de a la solució del problema

$$y' + y = a\delta(t - 1), \quad y(0) = 1$$

verifica $y(0) = y(1)$.

- Calcula l'antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{7e^{-2s}}{(s-2)^2} + \frac{s+1}{s^2+2s+5}$.
- Quina és la solució del problema de valor inicial $y'' + y = u(t - 1)$, $y(0) = 0 = y'(0)$, on $u(t)$ és la funció de Heaviside?
- Troba la transformada de Laplace de la solució de l'equació $y' - \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t) + \delta(t - 1)$, que satisfà $y(0) = 1$.

5. Si una funció $f(t)$ té transformada de Laplace $F(s)$, amb $\int_0^\infty f(t)dt = 1$ i $\int_0^\infty tf(t)dt = a < +\infty$, quant val el $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)}$?
6. Quina és la funció que té per transformada de Laplace $e^{-s} \frac{1}{s^2} + e^{-2s} \frac{1}{s^2 + 4}$?
7. Calcula el valor de $\int_0^a \sin(\frac{a-x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) dx$.
8. Usant la transformada de Laplace, calculeu la integral $\int_0^\infty e^{-\pi t} t \cos \pi t dt$.
9. Calcula la transformada de Laplace de la funció $u(t-a) \int_0^{t-a} f(\tau) d\tau$.
10. Quina funció té per transformada de Laplace $\frac{2}{s^2 - 2s - 3}$?
11. Quina és la transformada de Laplace de $te^{at}f(at)$?
12. Calcula l'antitransformada de Laplace de la funció

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

13. Calcula la solució del problema de valor inicial $\{y'' - y = 2\delta(t-1), y(0) = 0, y'(0) = 0\}$.
14. Sigui $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funció contínua tal que la seva transformada de Laplace és

$$L(f)(s) = \frac{e^{-s}}{(s+3)^3}.$$

Proveu que f és $\mathcal{C}^1$ però no $\mathcal{C}^2$.

15. Calcula la transformada de Laplace de $e^{at}f(at)$.
16. Considerem la funció $y(t)$, amb transformada $Y(s)$, tal que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-n), y(0) = 1$$

digues si són certes les igualtats:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n) * 1$$

quant val $Y(s)$?

17. Sigui f amb f' admissible. Demuestra que

$$L(te^{\alpha t}f(t))(s) = -F'(s-\alpha)$$

$$L(tf(at))(s) = -\frac{1}{a^2}F'\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}f(at)\right)(s) = \frac{s}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) - f(0)$$
18. Prova que $L(e^{t-1}u(t-1))(s) = e^{-s}/(s-1)$?
19. Sigui $f_k(t) = e^{\alpha t} * \dots^{(k)} * e^{\alpha t}$. Troba el valor de $f_k(t)$.
20. Si $f_n(t) = t^n$, n natural, quant val $(f_n * f_m)(t)$?
21. Sabent que $L(f(3t))(s) = \frac{1}{1+s^2}$, calcula $L(f(5t))(s)$.
22. Si $f(t)$ és solució del problema $f'' - f = t \cos(t)$ amb condicions inicials $f(0) = 0$ i $f'(0) = 0$, troba $F(s)$.
23. Quina és la transformada de Laplace de

$$f(t) = (t^2 - 2t)e^{-t}u(t-1)?$$

24. Quina és la transformada de Laplace de la funció $f(t) = 1$ si $0 < t < 1$, i $f(t) = e^{1-t}$ si $t > 1$?
25. Si una funció admissible $f(t)$, amb derivada admissible, té transformada de Laplace $F(s)$, i els límits següents existeixen, demostra:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF'(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} -tf(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$
26. Donat $N \in \mathbb{N}$, calcula la solució $y(t)$ del problema

$$y'' + \pi^2 y = \pi \sum_{n=0}^N (-1)^n \delta(t-n), y(0) = y'(0) = 0.$$

RESPOSTES

1. $1 - e^{-1}$.
2. $f(t) = 7(t-2)e^{2t-4}u(t-2) + e^{-t} \cos(2t)$.
3. $y(t) = u(t-1)(1 - \cos(t-1))$.
4. $\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2-1}e^{-s}$.
5. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F'(s)}{F(s)} = -a$.
6. $u(t-1)(t-1) + \frac{1}{2}u(t-2) \sin(2(t-2))$.
7. $\frac{a}{2} \sin(\frac{a}{2})$.
8. 0.
9. $\frac{e^{-as}}{s} F(s)$.
10. $e^t \sinh(2t)$.
11. $-\frac{1}{a^2} F'\left(\frac{s-a}{a}\right)$.
12. $f(t) = \sum_{k \geq 0} u(t-kT)$.
13. $y(t) = 2u(t-1) \sinh(t-1)$.
14. f és de classe $\mathcal{C}^1$, però la segona derivada és discontinua en $t = 1$.
15. $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a} - 1\right)$.
16. Les igualtats són certes. $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{e^s}{e^s - 1}$.
- 17.
- 18.
19. $f_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\alpha t}$.
20. $(f_n * f_m)(t) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} t^{n+m+1}$.
21. $L(f(5t))(s) = \frac{3}{5} \frac{1}{1+(3s/5)^2}$.
22. $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.
23. $\left(\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-s-1}$.
24. $\frac{s+1-e^{-s}}{s(s+1)}$.
- 25.
26. $y(t) = \sum_{n=0}^N \sin(\pi t) u(t-n)$.

6 Problemes de contorn

1. Sigui el problema de contorn

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Quants autovalors hi ha en cada interval $[k\pi, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$?

2. Considerem el problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$ amb $y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$. Per a quins valors de λ té solucions no nul·les?

3. Considerem el problema de contorn $y'' - \lambda y = 0$ amb $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$. Quins són els autovalors i quina la dimensió de l'espai d'autofuncions?

4. Troba les solucions no trivials del problema de contorn

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0.$$

5. Quines són les funcions pròpies del problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$?

6. Considerem el problema de contorn homogeni

$$\begin{cases} y'' \sin x + y' \cos x + (1 + \lambda)y = 0, & x \in (a, b) \\ y(a) + y'(a) = y(b) + y'(b) = 0 \end{cases}$$

Dóna uns valors de a i b pels que tinguem un problema de Sturm-Liouville.

7. Sigui el problema de contorn $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$. Quins són els autovalors i les autofuncions associades?

8. Considera el problema de contorn

$$y'' + \lambda e^x y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

és 0 un autovalor?

9. Resol el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 1) \\ y(0) + y'(0) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

10. Dóna els valors propis i vectors propis del problema de contorn $y'' - (\frac{\pi^2}{a^2} - \lambda)y = 0$, $y(0) = y(a) = 0$.

11. Considerem el problema de contorn

$$y'' + (1 + \lambda e^t)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Estan acotats superiorment els autovalors? i inferiorment? és 0 un autovalor?

12. Siguin $y_1(x)$, $y_2(x)$ dues solucions linealment independents de l'equació $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tals que $y_1(0)y_2'(1) = y_2(0)y_1'(1)$. El problema de contorn amb condicions de contorn $\{y(0) = 1, y'(1) = 1\}$, té solució? és única?

8. No.

9. Per a $\lambda > 0$, $\phi_\lambda(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x) - \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$ és funció pròpia. I per a $\lambda = 0$, la funció pròpia és $\phi_0(x) = x - 1$.

10. $\lambda_k = \frac{\pi^2}{a^2}(k^2 + 1)$ i $\phi_k(x) = \sin(\frac{\pi k x}{a})$.

11. Els autovalors estan acotats inferiorment, però no superiorment, i 0 és autovalor.

12. Té solució només si $y_1(0) = y_1'(1)$ i $y_2(0) = y_2'(1)$. Aleshores la solució no única.

RESPOSTES

1. Hi ha un únic autovalor.

2. Té solucions no nul·les únicament per a $\lambda = k^2$, amb k enter ≥ 0 .

3. $\lambda_k = -4\pi^2 k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$ són autovalors i, per a cada un d'ells, l'espai d'autofuncions té dimensió 2.

4. $y_k(t) = a \sin(\omega_k t)$, $a \in \mathbb{R}$, ω_k solució de $\tan \omega = -2\omega$.

5. $\cos((n - \frac{1}{2})\pi x)$.

6. A (a, b) la funció $\sin x$ no es pot anular, per exemple $a = \pi/4$, $b = 3\pi/4$.

7. Els autovalors són $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$, i les autofuncions $y_k(x) = \sin(kx)$.