

Equacions en Derivades Parcials (EDPs)

Pere Gutiérrez

Desembre 2020

Les equacions clàssiques

● Noció d'EDP i alguns tipus

- ▶ Una EDP és una equació diferencial en què la incògnita és una funció de 2 o més variables.
- ▶ EDP de primer ordre (forma general): $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$,
essent $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ funció donada (funció incògnita: $u(x, y)$)
- ▶ EDP de segon ordre (forma general):
 $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$
(notacions: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots$)
- ▶ EDP lineal de segon ordre:
 $a_1(x, y) u_{xx} + a_2(x, y) u_{xy} + a_3(x, y) u_{yy}$
 $+ a_4(x, y) u_x + a_5(x, y) u_y + a_6(x, y) u = b(x, y)$
pot ser:
a coeficients constants / variables
homogènia / no homogènia

● Exemples d'EDPs i solucions.

- ▶ $u_x + u_y = 2u^2$ (EDP no lineal de primer ordre):
la funció $u(x, y) = -1/(x + y)$ n'és una solució
- ▶ $u_x = u$ (EDP lineal homogènia de primer ordre):
la solució general és $u(x, y) = g(y)e^x$, on $g(y)$ és
una funció arbitrària
- ▶ $u_{xy} = 0$ (EDP lineal homogènia de segon ordre):
la solució general és $u(x, y) = g(x) + h(y)$,
essent $g(x)$, $h(y)$ funcions arbitràries

Equacions de la física matemàtica

(x, y variables espacials; t variable temporal)

- ▶ equació d'ones:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$$

descriu el moviment oscil·latori d'una corda vibrant

- ▶ equació de la calor:

$$u_t - k^2 u_{xx} = F(x, t)$$

descriu l'evolució de la distribució de temperatures en una barnilla

- ▶ equació de Laplace/Poisson:

$$u_{xx} + u_{yy} = G(x, y)$$

descriu els estats d'equilibri d'una membrana elàstica,
o bé de la distribució de temperatures en una planxa

Obs.: No estem considerant un objecte puntual (partícula $\rightarrow$ EDO)
sinó objectes 1D o 2D (barnilla, membrana... $\rightarrow$ EDP)

- Per determinar una solució, caldrà afegir condicions addicionals:

- ▶ **condicions inicials** (CIs): estat de l'objecte a l'instant inicial ($t = 0$)
- ▶ **condicions de contorn** (CCs): interacció amb el medi (a la frontera del domini de x, y)

Equació d'ones 1D: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}$

- ▶ $u(x, t)$ mesura el desplaçament vertical del punt x de la corda a l'instant t (estem suposant petites oscil·lacions)
- ▶ $c = \sqrt{\tau/\rho}$ serà la velocitat a què viatgen les ones (ρ : densitat lineal de massa; τ : tensió de la corda)
- ▶ $F(x, t) = f(x, t)/\rho$, on $f(x, t)$ és la força en la direcció vertical, per unitat de longitud (p.ex. el pes de la corda seria $f = -\rho g$)

Equació d'ones 2D: $u_{tt} - c^2 \Delta u = F(x, y, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}$

- ▶ $u(x, y, t)$ mesura el desplaçament vertical de cada punt (x, y) d'una membrana (p.ex. un tambor)
- ▶ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, laplaciana respecte les variables espacials
- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domini (forma de la membrana)

Suposant $F = F(x, y)$, els estats d'equilibri o estacionaris de l'equació d'ones 2D són les solucions $u = u(x, y)$ (no depenents de t). Aquestes satisfan l'EDP $\Delta u = G(x, y)$, essent $G(x, y) = -F(x, y)/c^2$. Aquesta EDP s'anomena:

- ▶ **equació de Laplace** si $G(x, y) \equiv 0$ (cas homogeni)
- ▶ **equació de Poisson** si $G(x, y) \not\equiv 0$ (cas no homogeni)

Equació de la calor 1D: $u_t - k^2 u_{xx} = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0$

- ▶ $u(x, t)$ mesura la temperatura del punt x de la barnilla a l'instant t
- ▶ $k = \sqrt{\kappa/(c\rho)}$
(κ : conductivitat tèrmica; c : calor específica; ρ : densitat de massa)
- ▶ $F(x, t) = f(x, t)/(c\rho)$, on $f(x, t)$ és la font de calor (energia calorífica per unitat de temps i de volum)

Equació de la calor 2D: $u_t - k^2 \Delta u = F(x, y, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0$

- ▶ $u(x, y, t)$ mesura la temperatura de cada punt (x, y) d'una planxa
- ▶ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, laplaciana
- ▶ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domini (forma de la planxa)

Suposant $F = F(x, y)$, els estats d'equilibri o estacionaris de l'equació de la calor 2D són les solucions $u = u(x, y)$ (no depenents de t), i satisfan l'equació de Laplace/Poisson $\Delta u = G(x, y)$, essent $G(x, y) = -F(x, y)/k^2$.

Condicions inicials (CIs)

S'imposen en el cas de les EDPs d'evolució (ones i calor), a l'instant inicial ($t = 0$) i a tot el domini.

- ▶ Per a l'equació d'ones 1D,

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L) \quad (\text{posició o desplaçament inicial})$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, L) \quad (\text{velocitat inicial})$$

- ▶ Per a l'equació de la calor 1D,

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L) \quad (\text{temperatura inicial})$$

Nota: En aquest cas només s'ha d'imposar una CI, ja que l'equació de la calor és *de primer ordre en la variable t* (tot i que és de segon ordre en x)

- ▶ No s'imposen CIs per a l'equació de Laplace/Poisson, ja que no hi ha variable temporal

Qualsevol condició (CI o CC) s'anomena homogènia si està igualada a 0.

Condicions de contorn (CCs)

S'imposen a tota la frontera del domini, és a dir,
per a $x = 0$ i $x = L$ en el cas 1D, i per a $(x, y) \in \partial\Omega$ en el cas 2D.

Poden ser de diferents tipus. Vegem-les en el cas 1D,

- ▶ **CCs de Dirichlet:** $u(0, t) = \alpha(t),$
 $u(L, t) = \beta(t), \quad \forall t$
- ▶ **CCs de Neumann:** $u_x(0, t) = -\gamma(t),$
 $u_x(L, t) = \delta(t), \quad \forall t$
- ▶ **CCs mixtes:** Dirichlet en un extrem i Neumann a l'altre
- ▶ **CCs periòdiques:** $u(0, t) = u(L, t),$
 $u_x(0, t) = u_x(L, t), \quad \forall t$

Vegem ara les CCs en el cas 2D,

- ▶ **CCs de Dirichlet:** $u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), \forall (x, y) \in \partial\Omega, \forall t$
- ▶ **CCs de Neumann:** $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) = \gamma(x, y, t), \forall (x, y) \in \partial\Omega, \forall t$
- ▶ **CCs mixtes:** dividint la frontera en dues parts, $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$, imposem Dirichlet a C_1 i Neumann a C_2

Notació: $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, \mathbf{N} \rangle$ és la *derivada normal* (derivada direccional respecte el vector normal exterior al domini)

En el cas 1D, interpretant que $\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = -u_x(0, t)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(L, t) = u_x(L, t)$, podem reescriure les CCs de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(L, t) = \delta(t)$$

Relació amb el flux de calor

En el cas de l'equació de la calor, el *flux de calor* a la frontera (per unitat de superfície) ve donat per

$$q = \kappa \frac{\partial u}{\partial n}$$

Aquest valor q mesura el flux d'entrada (és a dir, $q > 0$ vol dir entrada de flux, i $q < 0$ vol dir sortida de flux).

- Exemple (evolució d'integrals). Suposem que en l'equació de la calor 1D homogènia hem imposat CCs de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = \gamma(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(L, t) = \delta(t).$$

La *temperatura mitjana* (en cada instant) ve donada per

$$T(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx, \text{ i la seva variació és } T'(t) = \frac{k^2}{L}(\gamma(t) + \delta(t))$$

(proporcional a suma de les entrades de calor pels extrems).

Fórmula de D'Alembert (cas d'una corda vibrant infinita)

Considerem el problema consistent en l'equació d'ones 1D (homogènia) al domini $\mathbb{R}$, amb CIs (en aquest cas, no té sentit imposar CCs),

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- ▶ La *solució* ve donada per la fórmula de D'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy$$

(hi ha una versió més completa de la fórmula que inclou el cas no homogeni).

- ▶ Definint $p(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} G(x)$, $q(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} G(x)$, essent $G(x) = \int g(x) dx$ (primitiva), podem escriure

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct),$$

que s'interpreta com la superposició de dues ones que viatgen cap a l'esquerra i cap a la dreta amb velocitat c .

Separació de variables

Idees bàsiques (suposem el cas $u(x, t)$, faríem anàlogament amb $u(x, y)$)

- (1) Partim d'un "*problema*" (EDP + CIs + CCs), amb l'EDP homogènia i amb una única condició no homogènia.

- ★ Si l'EDP és no homogènia, podem homogeneïtzar-la si en coneixem una solució particular $u_p(x, t)$. Llavors escrivim $u = u_p + v$ i plantejem el problema per a $v(x, t)$ (EDP homogènia, amb les CIs i CCs modificades).
- ★ Si hi ha més d'una condició no homogènia, podem desglossar el problema en suma de dos o més problemes, cadascun amb una única condició no homogènia.

- (2) Suprimint inicialment la condició no homogènia, tenim un problema homogeni (al qual li falta una condició). Busquem solucions *no trivial*s (és a dir, no nul·les) d'aquest problema, de la forma $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$

Això ens porta a plantejar dos problemes d'EDOs, per a $X(x)$ i $T(t)$, depenents d'un paràmetre λ , amb algunes condicions addicionals provinents de les CIs i CCs.

- (3) El problema per a $X(x)$ serà un problema de valors a la frontera (PVF). Busquem els valors λ_n ($n \geq n_0$) per als quals existeix solució no trivial $X_n(x)$; s'anomenen valors propis (VAPs) i funcions pròpies (FUPs) respectivament.
- (4) Amb les λ_n trobades, resollem l'altre problema i obtenim unes funcions $T_n(t)$.
- (5) Les funcions $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ s'anomenen modes normals (o solucions fonamentals) del problema homogeni. Qualsevol 'combinació lineal' (finita o infinita) dels modes normals és també solució del problema homogeni:
- $$u(x, t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} d_n u_n(x, t).$$
- (6) Finalment, determinem els coeficients d_n imposant la condició no homogènia que havíem suprimir. Ens alguns casos es poden trobar "a ull" però, en general, caldrà trobar els d_n com a coeficients d'una sèrie de Fourier (segons el problema, podrà ser una sèrie de cosinus, de sinus, o completa).

PVFs habituals (VAPs i FUPs):

- ▶ $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(L) = 0$ (Dirichlet)

$$\lambda_n = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1$$

- ▶ $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X'(0) = X'(L) = 0$ (Neumann)

$$\lambda_n = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$

- ▶ $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X'(L) = 0$ (mixtes 1)

$$\lambda_n = - \left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$

- ▶ $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X'(0) = X(L) = 0$ (mixtes 2)

$$\lambda_n = - \left(\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$

- ▶ $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(-L) = X(L)$, $X'(-L) = X'(L)$ (periòdiques)

$$\lambda_n = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 0$$
$$\tilde{X}_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1$$

Séries de Fourier (recordatori):

- ▶ de cosinus, per a $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

- ▶ de sinus, per a $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

- ▶ completa, per a $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$