

Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs)

Pere Gutiérrez

Novembre 2021

Sistemes d'EDOs (conceptes i teoremes generals)

- EDO: una relació entre una funció (incògnita) d'una variable i algunes de les seves derivades.

EDP: ídem per a una funció de 2 o més variables.

- Exemples:

- ▶ $x'' + x = \cos 2t$, EDO per a $x(t)$

Una de les solucions és $x(t) = \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t$

(Nota: usualment escriurem $x(t)$ i no $y(x)$, però $y'' + y = \cos 2x$ és la mateixa EDO.)

- ▶ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, EDP per a $u(x, y)$.

Una de les solucions és $u(x, y) = x^2 - y^2$.

- L'ordre d'una EDO (o EDP) és l'ordre de derivada més alt que hi apareix.

EDOs de primer ordre

- Forma general: $g(t, x, x') = 0$, essent $g : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada.
Forma normalitzada: $x' = f(t, x)$, essent $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funció donada.
- Si afegim una condició inicial (CI), tenim un problema de valor inicial

(PVI, o problema de Cauchy):
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En general, una EDO de primer ordre té infinites solucions, depenent d'un paràmetre (solució general) i, afegint una CI, el PVI té una única solució (teorema d'existència i unicitat: caldrà l'EDO en forma normalitzada i que f sigui de classe $\mathcal{C}^1$).

- Exemple:
$$\begin{cases} x' = -2tx^2 \\ x(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La solució general de l'EDO és $x(t) = \frac{1}{t^2 - c}$, $c \in \mathbb{R}$. Imposant la CI resulta $c = 2$, i la solució del PVI és $x(t) = \frac{1}{t^2 - 2}$.

EDOs de segon ordre

- Forma general: $g(t, x, x', x'') = 0$, essent $g : D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.
Forma normalitzada: $x'' = f(t, x, x')$, essent $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.
- En aquest cas, a la solució general apareixen 2 paràmetres, i per tenir una única solució cal considerar un PVI on imposem 2 CIs, de la forma:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0.$$

- Exemple:
$$\begin{cases} x'' + x = \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -3 \end{cases}$$

La solució general és $x(t) = -\frac{1}{3} \cos 2t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Imposant les CIs obtenim $c_1 = 7/3$, $c_2 = -3$, i per tant la solució del PVI és $x(t) = -\frac{1}{3} \cos 2t + \frac{7}{3} \cos t - 3 \sin t$.

EDOs d'ordre n

- Forma normalitzada: $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$
 - ▶ La solució general depèn de n paràmetres
 - ▶ Per tenir una única solució, cal considerar un PVI imponent n CIs, sobre $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$.

Equacions de la mecànica

- El cas d'una EDO de segon ordre és important, ja que les EDOs associades a la mecànica es plantegen sovint a partir de la segona llei de Newton:

$$\text{massa} * \text{acceleració} = \sum \text{forces}$$

- Les CIs corresponen en aquest cas a fixar la posició i velocitat inicials (determinisme de les lleis de la mecànica).

● Exemple 1: **equació del paracaigudista**

$x(t)$: altura respecte el terre

$v(t) = x'(t)$: velocitat (negativa si baixa)

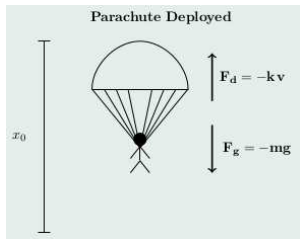
EDO:

$$m x'' = \underbrace{-mg}_{\text{pes}} \underbrace{-\beta x'}_{\text{fricció}}$$

Cls:

$$x(0) = x_0 \quad (\text{posició inicial})$$

$$x'(0) = 0 \quad (\text{velocitat inicial})$$



● Exemple 2: **equació de la molla**

$x(t)$: desplaçament horitzontal respecte la posició d'equilibri

EDO:

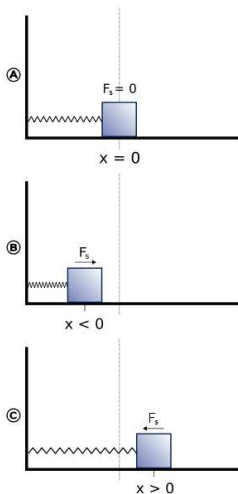
- ▶ oscil·lacions harmòniques (sense fricció):

$$m x'' = -k x \quad (\text{lei de Hooke})$$

- ▶ oscil·lacions esmorteïdes (amb fricció, $\beta > 0$):

$$m x'' = -k x - \beta x'$$

Cls: $x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$



Sistemes d'EDOs (de primer ordre)

$$\boxed{\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}} \iff \boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{X})}$$

(notació vectorial)

- ▶ t , variable independent (sovint, el temps)
- ▶ $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, funcions incògnites o variables dependents
- ▶ $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n) : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, funció vectorial que defineix el sistema

- Per formular un PVI, afegim una CI per a cada funció incògnita,

$$\boxed{\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}} \iff \boxed{\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0}$$

- ▶ $(t_0, \mathbf{X}^0) = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ donats

- **Cas 2D** ($n = 2$)

Escriurem $\mathbf{F} = (P, Q)$, $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ i $\mathbf{X}^0 = (x_0, y_0)$,

$$\text{EDOs} \quad \begin{cases} x' = P(t, x, y) \\ y' = Q(t, x, y) \end{cases} \quad \text{CIs} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

► Exemple:

$$\begin{cases} x' = tx + t^3y + \sin t \\ y' = ty^2 + \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} x(1) = -1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

definit per $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(t, x, y) = (tx + t^3y + \sin t, ty^2 + \cos x)$,
 $(t_0, \mathbf{X}^0) = (t_0, x_0, y_0) = (1, -1, 3)$.

- **Cas 3D** ($n = 3$)

Escriurem $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i $\mathbf{X}^0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Relació entre EDOs d'ordre superior i sistemes de primer ordre

- Una EDO de segon ordre es pot reescriure com un sistema de 2 EDOs de primer ordre, escollint $y = x'$ com a segona funció incògnita del sistema,

$$x'' = f(t, x, x') \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = f(t, x, y) \end{cases}$$

Això vol dir:

$$x(t) \text{ solució de l'EDO} \iff \mathbf{X}(t) = (x(t), x'(t)) \text{ solució del sistema}$$

- Si tenim CIs $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$ de l'EDO, es reescriuen com a $\mathbf{X}(t_0) = (x_0, x'_0)$.
- Exemple:

$$\begin{cases} x'' + x = \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \cos 2t \\ x(0) = 2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

- Anàlogament una EDO d'ordre n es pot reescriure com un sistema de n EDOs de primer ordre. Escollint $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $\dots$, $x_n = x^{(n-1)}$ com a funcions incògnita del sistema,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \iff \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

I les CIs,

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \\ \dots\dots\dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \end{cases} \iff \mathbf{X}(t_0) = (x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)})$$

Teorema d'existència i unicitat. Suposant $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ i donat $(t_0, \mathbf{X}^0) \in \overset{\circ}{A}$, aleshores el PVI
$$\begin{cases} \mathbf{X}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0 \end{cases}$$
 té una única solució local $\mathbf{X}(t)$

- solució local vol dir: definida en un interval $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ per algun $\alpha > 0$ prou petit

Exemples / Observacions (en EDOs de primer ordre):

- $\begin{cases} x' = -2tx^2 \\ x(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ té la solució $x(t) = \frac{1}{t^2 - 2}$, definida per a $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, malgrat que $f(t, x) = -2tx^2$ és definida a tot $\mathbb{R}^2$ (la solució “s'acaba” quan arriba a ∞).

- ▶ $\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ no té solució única: $x^{(1)}(t) = \frac{t^3}{27}$ i $x^{(2)}(t) = 0$
(i d'altres) són solució (notem que $f(t, x) = x^{2/3}$ no és $\mathcal{C}^1$).
- ▶ $\begin{cases} t x' = x \\ x(0) = 0 \end{cases}$ té infinites solucions: $x(t) = k t$, amb
qualsevol $k \in \mathbb{R}$ (si normalitzem l'equació obtenim la funció
 $f(t, x) = x/t$, no definida al punt $(0, 0)$).

Sistemes autònoms i camps vectorials

- Un sistema d'EDOs s'anomena autònom si el temps t no hi apareix explícitament: $\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})}$

Vindrà definit per un camp vectorial (que hem de suposar de classe $\mathcal{C}^1$),

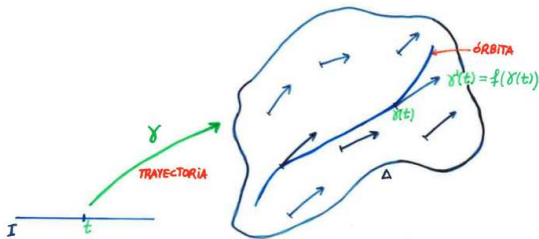
$$\mathbf{F} : \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{punts}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vectors}}$$

- Podem veure cada solució com una *corba regular parametritzada* $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I$.

- *Interpretació geomètrica*: En cada punt d'una solució o trajectòria $\mathbf{X}(t)$, el vector tangent ha de coincidir amb el camp vectorial:

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \quad \forall t \in I.$$

El conjunt recorregut per una trajectòria rep el nom d'òrbita (la corba com a objecte geomètric).



- *Interpretació física*: Pensant en $\mathbf{F}$ com un camp de velocitats, cada solució $\mathbf{X}(t)$ correspondria a un possible moviment d'una partícula que es mou segons aquest camp.
- En el cas d'un sistema no autònom $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{X})$, hauríem de considerar un camp vectorial dependent del temps (els vectors “es mouen”).

Exemple. El sistema autònom 2D

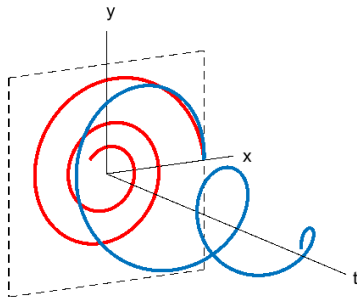
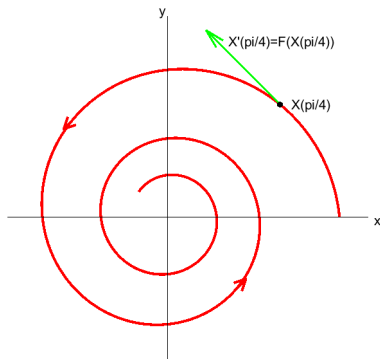
$$x' = -x/2 - y, \quad y' = x - y/2$$

ve donat pel camp vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (-x/2 - y, x - y/2)$.

Una de les seves trajectòries és

$$\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t)) = (e^{-t/2} \cos t, e^{-t/2} \sin t),$$

que podem representar com una corba parametritzada a $\mathbb{R}^2$. Aquesta corba és la projecció, sobre el pla de coordenades x, y , de la seva gràfica a l'espai de coordenades t, x, y .



● **Dues propietats importants dels sistemes autònoms :**

- ▶ Donada una trajectòria $\mathbf{X}(t)$, tota *translació* en el temps $\mathbf{X}(t - t^*)$ és també una altra trajectòria, que recorre la mateixa òrbita.
- ▶ Per cada punt del domini $\mathcal{U}$ de $\mathbf{F}$ passa *una única òrbita*, ja que si dues trajectòries $\mathbf{X}^{(1)}(t)$ i $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ passen per un mateix punt en instants t_1 i t_2 , llavors una serà translació en el temps de l'altra, separades un interval de temps $t^* = t_2 - t_1$ (aquí s'ha aplicat el teorema d'existència i unicitat).

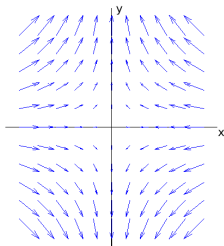
Així doncs, en plantejar un PVI per a un sistema autònom, a la pràctica podem restringir-nos a l'instant $t_0 = 0$ quan imposem una condició inicial:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0.$$

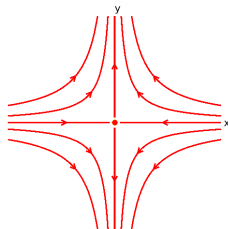
- El dibuix o representació de totes les òrbites d'un sistema autònom sobre el domini $\mathcal{U}$ de $\mathbf{F}$ rep el nom de retrat de fase del sistema.

Per determinar-lo, caldria trobar les solucions del sistema (analíticament o numèricament), però si representem el camp vectorial en una bona xarxa de punts podem tenir una idea aproximada del retrat de fase.

Exemple: $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$



camp vectorial



retrat de fase

Trajectòries: $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^t)$

Òrbites: branques d'hipèrbola $xy = \text{const}$, quatre semirectes i l'origen

Punts d'equilibri i estabilitat

- $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ sistema autònom, amb $\mathbf{F}$ camp vectorial sobre un domini $\mathcal{U}$.

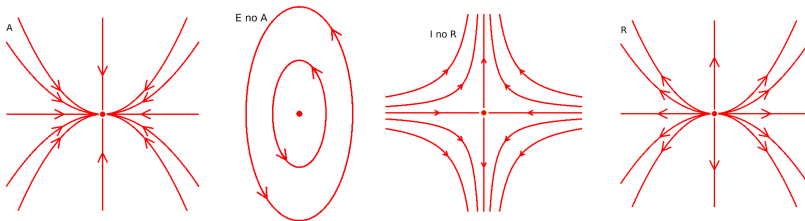
Def.: Un punt d'equilibri és qualsevol punt $\mathbf{X}^0 \in \mathcal{U}$ on el camp vectorial s'anul·li: $\mathbf{F}(\mathbf{X}^0) = \mathbf{0}$.

Això equival a demanar que el sistema té la solució constant $\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{X}^0$, és a dir, l'òrbita per $\mathbf{X}^0$ està formada només per aquest punt.

- Ens proposem ara d'establir diferents tipus o categories de punts d'equilibri $\mathbf{X}^0$, segons la seva estabilitat: estudiant el comportament de les trajectòries $\mathbf{X}(t)$ amb condicions inicials properes a $\mathbf{X}^0$, per a $t > 0$ (si s'apropen a $\mathbf{X}^0$, o si se n'allunyen, o si es mantenen a prop...).

- *Definicions (informals).* El punt d'equilibri $\mathbf{X}^0$ és:
 - ▶ estable (E) si tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^0$, es manté prop de $\mathbf{X}^0$ per a tot $t > 0$;
 - ▶ inestable (I) si no és estable, és a dir, hi ha trajectòries amb CI tan propera com vulguem a $\mathbf{X}^0$, que s'allunyen de $\mathbf{X}^0$;
 - ▶ atractor (A) o *asimptòticament estable*, si tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^0$, tendeix a $\mathbf{X}^0$ quan $t \rightarrow \infty$;
 - ▶ repulsor (R) si és atractor per al sistema $\mathbf{X}' = -\mathbf{F}(\mathbf{X})$, i llavors tota trajectòria $\mathbf{X}(t)$ amb CI prou propera a $\mathbf{X}^0$, s'allunya de $\mathbf{X}^0$ (excepte el propi $\mathbf{X}^0$).
- Cada punt d'equilibri pertany a una única de les categories següents:
 - ▶ atractor (A)
 - ▶ estable no atractor (E no A)
 - ▶ inestable no repulsor (I no R)
 - ▶ repulsor (R)

- Exemples de retrats de fase amb un punt d'equilibri que pertany a cadascuna de les categories:



Òrbites periòdiques

- ▶ $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ sistema autònom, amb $\mathbf{F}$ camp vectorial sobre un domini $\mathcal{U}$.

Obs.: Si una trajectòria $\mathbf{X}(t)$ compleix que $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}(0)$ per algun $T > 0$ (és a dir, torna a passar pel punt inicial), aleshores és T -periòdica: $\mathbf{X}(t + T) = \mathbf{X}(t)$ per a tot t .

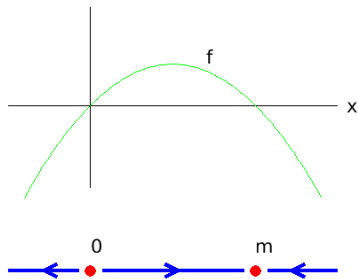
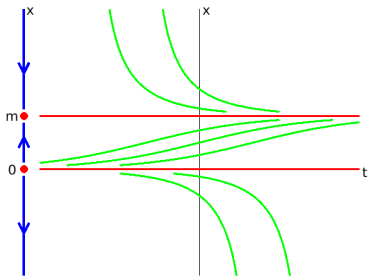
- ▶ En aquest cas (i suposant que no es tracti d'un punt d'equilibri), l'òrbita recorreguda és una corba tancada, i rep el nom d'òrbita periòdica.

Cas d'una EDO autònoma de primer ordre

- Els sistemes autònoms poden ser 2D, 3D... però també 1D. Aquest és el cas més simple i en farem un estudi complet.
- Una EDO autònoma de primer ordre : $x' = f(x)$
 - ▶ el “camp vectorial” $f(x)$ és una funció escalar d'una variable (de classe $\mathcal{C}^1$) definida en un interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$,
 - ▶ les solucions o trajectòries són funcions escalars $x(t)$,
 - ▶ cada solució $x(t)$ és creixent o decreixent segons si $x'(t) = f(x(t))$ és positiva o negativa,
 - ▶ les òrbites i el retrat de fase es dibuixaran sobre la recta $\mathbb{R}$.
- *Observacions.*
 - ▶ Els punts d'equilibri són els zeros de la funció $f(x)$.
 - ▶ No hi ha òrbites periòdiques.
 - ▶ La resta d'òrbites seran intervals de $\mathbb{R}$ (o eventualment semirectes, o la recta sencera), i són la imatge o recorregut de solucions $x(t)$.
 - ▶ Podríem trobar les solucions resolent l'EDO, que és *separable*:
$$\int \frac{dx}{f(x)} = t + C, \text{ i aïllant } x = x(t) \text{ (però no caldrà fer això per trobar les òrbites).}$$

- **Exemple 1.** EDO $x' = kx(1 - x/m)$ amb $k, m > 0$ donats (*equació logística*). Ve definida per la funció $f(x) = kx(1 - x/m)$.

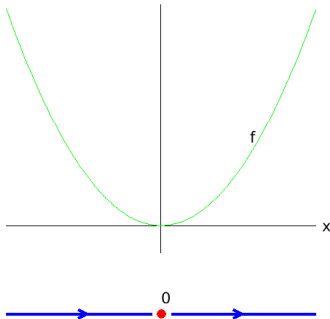
- ▶ Punts d'equilibri: $0, m$ (els zeros de f).
- ▶ La resta de solucions: $x(t) = \frac{m x_0 e^{kt}}{m + x_0(e^{kt} - 1)}$ (que no cal trobar).
- ▶ Projectant les gràfiques de les solucions sobre l'eix vertical x veiem que el retrat de fase està format per 5 òrbites: els punts d'equilibri 0 i m , l'interval $(0, m)$ i les semirectes $(-\infty, 0)$ i (m, ∞) .
- ▶ També veiem (a partir de signe de f) en quin sentit es recorren aquestes òrbites, deduint que 0 i m són punts d'equilibri repulsor i atractor, respectivament.



- En general, donat un punt d'equilibri x_0 ,
 - ▶ si $f'(x_0) < 0$, el punt x_0 és atractor;
 - ▶ si $f'(x_0) > 0$, el punt x_0 és repulsor;
 - ▶ si $f(x)$ passa de positiva a negativa en x_0 , el punt x_0 és atractor (fins i tot si $f'(x_0) = 0$);
 - ▶ si $f(x)$ passa de negativa a positiva en x_0 , el punt x_0 és repulsor (fins i tot si $f'(x_0) = 0$);
 - ▶ si $f(x)$ és positiva a esquerra i dreta de x_0 , o negativa a esquerra i dreta de x_0 , el punt x_0 és inestable no repulsor.
- Més coses:
 - ▶ Les òrbites que no són punts d'equilibri són els intervals entre dos punts d'equilibri consecutius, i les semirectes entre $-\infty$ i el primer punt d'equilibri, i entre el darrer punt d'equilibri i ∞ .
 - ▶ Qualsevol solució $x(t)$ que prové o tendeix a un punt d'equilibri ho fa en un temps infinit. En canvi, una solució que prové o tendeix a $\pm\infty$ ho pot fer en un temps finit o infinit.

● **Exemple 2.** EDO $x' = x^2$, que ve definida per la funció $f(x) = x^2$.

- ▶ Punts d'equilibri: només el 0, que és inestable no repulsor (de fet, podem dir que és “atractor per l'esquerra i repulsor per la dreta”).
- ▶ El retrat de fase té 3 òrbites: el punt d'equilibri 0, i les semirectes $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ ambdues recorregudes cap a la dreta.



Sistemes lineals: resolució

EDO lineal de primer ordre: $x' = a(t)x + b(t)$

($a(t)$, $b(t)$ funcions donades)

- Cas homogeni ($b(t) \equiv 0$):
 - ▶ solució general $x_h(t) = c x_1(t)$, $c \in \mathbb{R}$, essent $x_1(t) = e^{\int a(t) dt}$
- Cas no homogeni ($b(t) \not\equiv 0$):
 - ▶ comencem resolent la part homogènia $x' = a(t)x$
 - ▶ si coneixem alguna solució particular $x_p(t)$ de l'EDO no homogènia, la solució general serà $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$
 - ▶ per trobar una solució particular, podem usar el mètode de variació de constant: $x_p(t) = u(t) x_1(t)$, essent $u(t) = \int \frac{b(t)}{x_1(t)} dt$.

Sistemes d'EDOs lineals

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \iff \boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{X} + \mathbf{B}(t)}$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

funcions incògnita matriu de coeficients termes independents

essent $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ funcions donades, $t \in I$.

- ▶ en el cas de sistemes lineals, les solucions estan definides a tot l'interval I (no cal parlar de 'solucions locals')

Tipus de sistemes lineals

- Coeficients constants / variables:
 - ▶ a coeficients constants si $A(t) \equiv \text{const}$
(es poden resoldre usant valors i vectors propis, formes de Jordan)
 - ▶ a coeficients variables si $A(t) \neq \text{const}$
(en general no es poden resoldre explícitament, si $n \geq 2$)
- Homogeni / No homogeni:
 - ▶ homogeni (H) si $B(t) \equiv \mathbf{0}$
 - ▶ no homogeni (NH) si $B(t) \neq \mathbf{0}$
(si podem resoldre la part homogènia, també podrem resoldre el sistema no homogeni)

EDOs lineals de segon ordre

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

suposant $a_i(t)$, $b(t)$ donades, amb $a_2(t) \neq 0$, $t \in I$.

Una EDO lineal de segon ordre es pot reescriure com un sistema lineal 2D:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{a_0(t)}{a_2(t)}x - \frac{a_1(t)}{a_2(t)}y + \frac{b(t)}{a_2(t)} \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_2(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_2(t)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(t)}{a_2(t)} \end{pmatrix}$$

EDOs lineals d'ordre n

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

es pot reescriure com un sistema lineal, amb $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & \cdots & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

Estructura de les solucions

- Cas homogeni: $\mathbf{X}' = A(t) \mathbf{X}$ (de dimensió n)
 - ▶ Les solucions formen un espai vectorial:
si $\mathbf{X}^{(1)}(t)$, $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ solucions, llavors qualsevol combinació lineal $c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{X}^{(2)}(t)$ és solució (*principi de superposició*)
 - ▶ Aquest espai vectorial té dimensió n , i tota base $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$ rep el nom de conjunt fonamental de solucions :
 - ★ (linealment independents)
si $c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t) \equiv \mathbf{0}$, llavors $c_1 = \dots = c_n = 0$
 - ★ (generadors)
la solució general és $\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t)$
amb $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

● Cas no homogeni (NH): $\mathbf{X}' = A(t) \mathbf{X} + \mathbf{B}(t)$

- ▶ si $\mathbf{X}^{(1)}(t)$, $\mathbf{X}^{(2)}(t)$ solucions, llavors la diferència $\mathbf{X}^{(1)}(t) - \mathbf{X}^{(2)}(t)$ és solució de la part homogènia (H): $\mathbf{X}' = A(t) \mathbf{X}$
- ▶ per tant, si coneixem una solució particular $\mathbf{X}_p(t)$ de (NH), llavors podem escriure

$$\underbrace{\mathbf{X}(t)}_{\text{sol. gen. (NH)}} = \underbrace{\mathbf{X}_p(t)}_{\text{sol. partic. (NH)}} + \underbrace{\mathbf{X}_h(t)}_{\text{sol. gen. (H)}}$$

- ▶ per trobar una solució particular $\mathbf{X}_p(t)$ de (NH), podem usar qualsevol mètode, com per exemple el *mètode de variació de constants* (funciona sempre que haguem pogut resoldre (H))

Matrius fonamentals

Considerem un sistema homogeni $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$ (de dimensió n)

- *Obs.:* si $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(k)}(t)$ són solucions del sistema, llavors la matriu $\Phi(t)$ ($n \times k$) que té aquestes k solucions com a columnes n'és una “*solució matricial*”, $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad \forall t$.

- *Def.:* donat un conjunt fonamental $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$, la matriu $\Phi(t)$ ($n \times n$) que té aquestes n solucions com a columnes s'anomena una matriu fonamental del sistema.

- Si $\Phi(t)$ és matriu fonamental, la solució general ve donada per

$$\boxed{\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}} \quad \text{amb } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ vector de constants arbitrari.}$$

- Relació entre dues matrius fonamentals $\Phi(t), \Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \Phi(t)M$$

on M és una matriu $n \times n$ amb $\det M \neq 0$ (matriu de canvi de base entre els conjunts fonamentals associats a $\Phi(t)$ i $\Psi(t)$).

Wronskià

Considerem un sistema homogeni $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, $t \in I$ (de dimensió n)

- *Obs.:* Siguin $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(k)}(t)$ solucions, i un $t_0 \in I$ fixat. Aleshores,

$\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(k)}(t)$ són solucions linealment independents

$\iff \mathbf{X}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{X}^{(k)}(t_0)$ són vectors de $\mathbb{R}^n$ linealment independents

I en aquest cas, per a qualsevol altre $t_1 \in I$ els vectors $\mathbf{X}^{(1)}(t_1), \dots, \mathbf{X}^{(k)}(t_1)$ seran també linealment independents.

- Suposem ara $k = n$. Deduïm:

$\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$ són un conjunt fonamental de solucions

$\iff \mathbf{X}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t_0)$ són una base de $\mathbb{R}^n$

I en aquest cas, per a qualsevol altre $t_1 \in I$ els vectors $\mathbf{X}^{(1)}(t_1), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t_1)$ seran també una base de $\mathbb{R}^n$ (això es pot comprovar amb el determinant).

- Donades n solucions $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$, definim el seu wronskià com la funció

$$W(t) = W[\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}](t) = \det \Phi(t)$$

on $\Phi(t)$ és la solució matricial ($n \times n$) que les té com a columnes. Llavors tenim:

$$\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t) \text{ és conjunt fonamental} \iff W(t_0) \neq 0$$

i, en aquest cas, tindrem $W(t_1) \neq 0$ per a qualsevol altre $t_1 \in I$.

- En altres paraules,
 - ▶ si $W(t_0) \neq 0 \implies W(t) \neq 0 \forall t \in I$, i $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$ és conjunt fonamental
 - ▶ si $W(t_0) = 0 \implies W(t) \equiv 0 \forall t \in I$, i $\mathbf{X}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t)$ no és conjunt fonamental

- **Fórmula de Liouville:**

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds}$$

essent $\text{tr } A(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$ (la *divergència* de $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}) = A(t) \mathbf{X}$).

- Creixement/decreixement d'àrees a $\mathbb{R}^2$:

- ▶ Donat un conjunt fonamental $\mathbf{X}^{(1)}(t)$, $\mathbf{X}^{(2)}(t)$, l'àrea del paral·lelogram que generen és $|W(t)|$.
- ▶ Aquesta àrea creix/decreix si la matriu $A(t)$ té traça positiva/negativa, i es manté constant si la traça és $\equiv 0$.
- ▶ Anàlogament a $\mathbb{R}^3$ amb volums de paral·lelepípedes.

Resolució de sistemes lineals homogenis a coeficients constants

$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, essent A matriu $n \times n$ constant (és sistema autònom, donat pel camp vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = A\mathbf{X}$).

● Solucions pròpies

- ▶ Cas $n = 1$: l'EDO $x' = ax$ té com a solució $x(t) = ce^{at}$.
- ▶ Per a $n \geq 2$, busquem solucions similars:
una funció $\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ és solució $\iff \mathbf{v}$ és VEP de VAP λ de A ,
i rep el nom de solució pròpia (notem que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{v}$)
- ▶ L'òrbita recorreguda per una solució pròpia és:
 - ★ la semirecta generada pel vector $\mathbf{v}$ si $\lambda \neq 0$
 - ★ un punt d'equilibri si $\lambda = 0$
- ▶ La recta o direcció generada pel vector propi $\mathbf{v}$ és:
 - ★ atractora si $\lambda < 0$
 - ★ repulsora si $\lambda > 0$
 - ★ neutra (formada per punts d'equilibri) si $\lambda = 0$

● Cas diagonalitzable sobre els reals

- ▶ Base de VEPs $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$, amb VAPs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (reals) respectivament.
- ▶ Aleshores, tenim un conjunt fonamental format per solucions pròpies:

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^{(n)}$$

- ▶ Solució general: $\mathbf{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^{(n)}$

● Cas diagonalitzable amb alguns VAPs complexos

- ▶ Suposem per exemple que els dos primers VAPs són complexos conjugats:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$$

Llavors, els VEPs associats són complexos, i podem escollir-los conjugats:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{w}^{(1)} + i\mathbf{w}^{(2)}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \overline{\mathbf{v}^{(1)}} = \mathbf{w}^{(1)} - i\mathbf{w}^{(2)}$$

$(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)})$ reals)

- ▶ Les solucions pròpies associades a aquests VEPs són també complexes,

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{(1)}, \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^{(2)} = \overline{\mathbf{X}^{(1)}(t)}$$

però, per tenir un conjunt fonamental format per solucions reals, podem substituir-les per les parts real i imaginària d'una d'elles,

$$\mathbf{Y}^{(1)}(t) = \operatorname{Re} \mathbf{X}^{(1)}(t), \quad \mathbf{Y}^{(2)}(t) = \operatorname{Im} \mathbf{X}^{(1)}(t)$$

les quals són també solucions, però no són pròpies.

- Fent càlculs obtenim:

$$\mathbf{Y}^{(1)}(t) = e^{\alpha t} [\cos \beta t \cdot \mathbf{w}^{(1)} - \sin \beta t \cdot \mathbf{w}^{(2)}]$$

$$\mathbf{Y}^{(2)}(t) = e^{\alpha t} [\sin \beta t \cdot \mathbf{w}^{(1)} + \cos \beta t \cdot \mathbf{w}^{(2)}]$$

(notem que $\mathbf{Y}^{(1)}(0) = \mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{Y}^{(2)}(0) = \mathbf{w}^{(2)}$)

- Les òrbites recorregudes per les solucions $\mathbf{Y}^{(1)}(t)$, $\mathbf{Y}^{(2)}(t)$ es troben sobre el pla generat pels vectors $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$. Aquest pla és:
 - ★ atractor si $\alpha < 0$
 - ★ repulsor si $\alpha > 0$
 - ★ format per òrbites periòdiques si $\alpha = 0$ (de període $2\pi/\beta$).

● Cas no diagonalitzable

Com que no tenim una base de VEPs, no tenim prou solucions pròpies per formar un conjunt fonamental, i cal completar-lo amb altres tipus de solucions, que s'obtenen a partir de la forma de Jordan de la matriu.

Per simplificar, ho veurem només per a $n=2$:

$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, essent A matriu 2×2 amb λ com a VAP doble, i que no diagonalitza.

- Podem escollir vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tals que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Notem que $\mathbf{v}$ és VEP però $\mathbf{u}$ no ho és. Canviant a la base $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, obtenim $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, forma de Jordan de A .

- Aleshores, un conjunt fonamental de solucions ve donat per

$$\mathbf{X}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{u} + t\mathbf{v}), \quad \mathbf{X}^{(2)}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}.$$

- **Cas d'una EDO lineal de segon ordre** (homogènia i a coeficients constants),

$$a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Considerem el *polinomi característic* de l'EDO $p(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ i en trobem les arrels (que coincideixen amb els VAPs de la matriu si passem a sistema 2×2):

- ▶ Arrels reals simples $\lambda_1, \lambda_2 \implies x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$
- ▶ Arrel real doble $\lambda \implies x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$
- ▶ Arrels complexos $\alpha \pm i\beta \implies x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$

Es generalitza fàcilment al cas d'una EDO lineal d'ordre n , considerant un polinomi característic de grau n i les seves arrels (amb multiplicitat).

Resolució de sistemes lineals no homogenis

(NH) $\mathbf{X}' = A(t) \mathbf{X} + \mathbf{B}(t)$ (de dimensió n)

- Comencem resolent (si podem) el sistema lineal homogeni associat,

(H) $\mathbf{X}' = A(t) \mathbf{X}$

Solució: $\mathbf{X}_h(t) = c_1 \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{X}^{(n)}(t) = \Phi(t) \mathbf{C}$

- Si coneixem una solució particular $\mathbf{X}_p(t)$ de (NH), llavors

$$\underbrace{\mathbf{X}(t)}_{\text{sol. gen. (NH)}} = \underbrace{\mathbf{X}_p(t)}_{\text{sol. partic. (NH)}} + \underbrace{\mathbf{X}_h(t)}_{\text{sol. gen. (H)}}$$

- Podem trobar una solució particular $\mathbf{X}_p(t)$ de (NH), usant el mètode de variació de constants,

$$\mathbf{X}_p(t) = u_1(t) \mathbf{X}^{(1)}(t) + \dots + u_n(t) \mathbf{X}^{(n)}(t) = \Phi(t) \mathbf{U}(t)$$

Tenim la fórmula

$$\boxed{\mathbf{U}(t) = \int \Phi(t)^{-1} \mathbf{B}(t) dt} \quad \text{però, a la pràctica:}$$

- ▶ resollem el sistema $\Phi(t) \mathbf{U}'(t) = \mathbf{B}(t)$ ($n \times n$, amb t paràmetre)
- ▶ integrem $\mathbf{U}(t) = \int \mathbf{U}'(t) dt$

Sistemes lineals: estabilitat

Sistema lineal homogeni a coeficients constants: $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ($n \times n$)

- ▶ **estudi qualitatiu:** conèixer propietats de les solucions (cap a on tendeixen, òrbites periòdiques...) sense resoldre'l explícitament.

- *Obs.:* El sistema és autònom, donat pel camp vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
- *Obs.:* L'origen sempre és punt d'equilibri.
- Si $\det A \neq 0$, direm que el sistema és no degenerat, i llavors l'origen és l'únic punt d'equilibri.
- Si $\det A = 0$, direm que el sistema és degenerat, i llavors hi ha infinits punts d'equilibri que omplen tot el subspai $\text{Nuc } A$ (recta per l'origen, pla per l'origen...).

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \quad (n \times n)$$

- *Obs.:* El comportament de les solucions és el mateix lluny que prop de l'origen, ja que

$$\mathbf{X}(t) \text{ és solució} \iff \tilde{\mathbf{X}}(t) = c\mathbf{X}(t) \text{ també és solució } (c \neq 0)$$

Per tant, podem parlar de:

- ▶ *Sistema estable*, si tota solució és fitada per a $t \geq 0$
- ▶ *Sistema atractor*, si tota solució tendeix a **0** quan $t \rightarrow \infty$
- ▶ etc
- *Obs.:* Un sistema degenerat pot ser 'E no A' o bé 'I no R', però mai no serà A ni R.
- *Obs.:* En un sistema degenerat, el comportament de les solucions respecte qualsevol punt d'equilibri $\mathbf{X}^0$ és el mateix que respecte l'origen, ja que

$$\mathbf{X}(t) \text{ és solució} \iff \tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}^0 + \mathbf{X}(t) \text{ també és solució}$$

Classificació dels sistemes lineals 2D

(homogenis i a coeficients constants)

- Fent un canvi lineal podem reduir-nos al cas d'una matriu diagonal o bé en forma de Jordan real:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Casos:

- (1) Sistema no degenerat amb VAPs reals, i diagonalitza
- (2) Sistema no degenerat amb VAP doble (real), i no diagonalitza
- (3) Sistema no degenerat amb VAPs complexos
- (4) Sistema degenerat

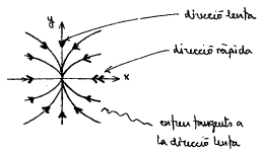
[1] Sistema no degenerat amb VAPs reals, i diagonalitza: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, suposem $\lambda_1 \leq \lambda_2$)

- ▶ Equacions $x' = \lambda_1 x$, $y' = \lambda_2 y$
- ▶ Solucions $x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}$, $y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$
- ▶ Direccions pròpies: els eixos x , y
- ▶ Òrbites del 1^{er} quadrant: $y = c x^{\lambda_2/\lambda_1}$ (per simetria als altres)

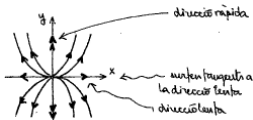
(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

node propi atractor



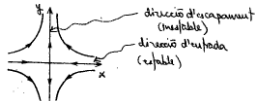
(b) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

node propi repulsor



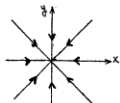
(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

sella



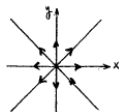
(d) $\lambda < 0$ doble

**node propi atractor
(estel·lar)**



(e) $\lambda > 0$ doble

**node propi repulsor
(estel·lar)**



(d,e) totes les solucions són pròpies

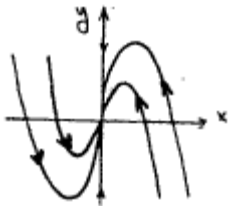
[2] Sistema no degenerat amb VAP doble (real), i no diagonalitza:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

- ▶ Equacions $x' = \lambda x$, $y' = x + \lambda y$
- ▶ Solucions $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $y(t) = (x_0 t + y_0) e^{\lambda t}$
- ▶ Direccions pròpies: només l'eix y
- ▶ Òrbites al semiplà dret: $y = \frac{x}{\lambda} \ln \frac{x}{c}$ (per simetria a l'esquerre)

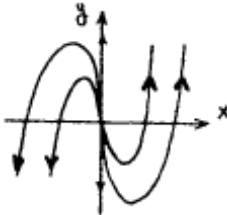
(a) $\lambda < 0$

node impropri atractor



(b) $\lambda > 0$

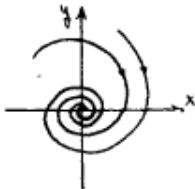
node impropri repulsor



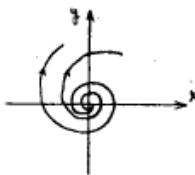
[3] Sistema no degenerat amb VAPs complexos: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$
(suposem $\beta > 0$)

- ▶ Equacions $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = -\beta x + \alpha y$
- ▶ Solucions $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
- ▶ Direccions pròpies: no n'hi ha

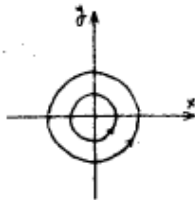
(a) $\alpha < 0$
focus atractor



(b) $\alpha > 0$
focus repulsor



(c) $\alpha = 0$
centre

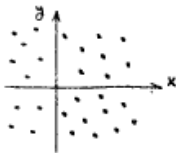


- El 0 és VAP doble,
i diagonalitza:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ★ Equacions $x' = 0, y' = 0$
- ★ Solucions
 $x(t) = x_0, y(t) = y_0$
(tots els punts de $\mathbb{R}^2$ són d'equilibri)
- ★ Òrbites: cada punt de $\mathbb{R}^2$

(c)

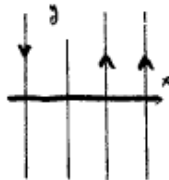


- El 0 és VAP doble,
i no diagonalitza:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

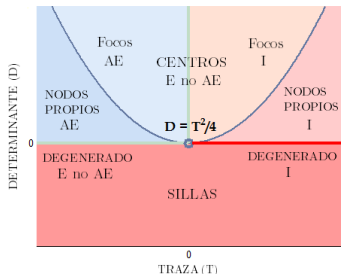
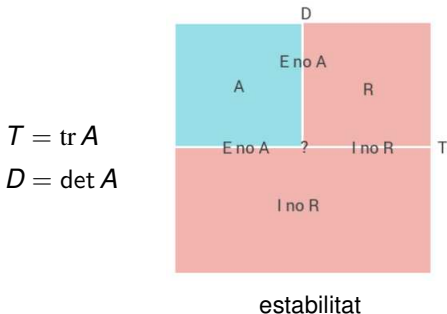
- ★ Equacions $x' = 0, y' = x$
- ★ Solucions
 $x(t) = x_0, y(t) = y_0 + x_0 t$
- ★ Direccions pròpies:
l'eix y (format per punts d'equilibri)
- ★ Òrbites: rectes verticals,
i cada punt de l'eix y

(d)



Estabilitat dels sistemes lineals 2D

- Podem agrupar els sistemes lineals 2D segons l'estabilitat de l'origen (o de qualsevol altre punt d'equilibri, si n'hi ha):
 - ▶ Atractors: node atractor, focus atractor
 - ▶ Estables no atractors: centre, degenerats (a,c)
 - ▶ Inestables no repulsors: sella, degenerats (b,d)
 - ▶ Repulsors: node repulsor, focus repulsor
- **Criteri traça–determinant** (només vàlid en el cas 2D)



classificació

Teorema (estabilitat de sistemes lineals)

$\mathbf{X}' = A \mathbf{X}$, essent A matriu $n \times n$ constant

- (a) Si tots els VAPs λ de A compleixen $\operatorname{Re} \lambda < 0$
 $\implies$ el sistema és atractor
- (b) Si algun VAP λ de A compleix $\operatorname{Re} \lambda > 0$
 $\implies$ el sistema és inestable
- (b') Si tots els VAPs λ de A compleixen $\operatorname{Re} \lambda > 0$
 $\implies$ el sistema és repulsor
- (b'') Si algun VAP λ de A compleix $\operatorname{Re} \lambda > 0$ i algun $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$
 $\implies$ el sistema és inestable no repulsor
- (c) Si tots els VAPs λ de A compleixen $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ i algun té $\operatorname{Re} \lambda = 0$, aleshores:
 - ★ si tots els VAPs amb $\operatorname{Re} \lambda = 0$ són semi-simples
 $\implies$ el sistema és estable no atractor
 - ★ si algun VAP amb $\operatorname{Re} \lambda = 0$ no és semi-simple
 $\implies$ el sistema és inestable no repulsor

- *Def.:* Un VAP λ de A és *semi-simple* si la seva multiplicitat geomètrica coincideix amb la multiplicitat algebraica

Aplicació: oscil·lacions harmòniques i esmorteïdes

(1) *Oscil·lacions mecàniques*

$$m x'' = -k x - \beta x' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sense fricció si } \beta = 0 \\ \text{amb fricció si } \beta > 0 \end{array} \right.$$
$$x'' = -a x - b x', \quad \text{on } a = k/m > 0, \quad b = \beta/m \geq 0$$

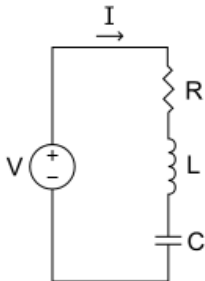
Matriu del sistema associat: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}$,

amb $T = -b$, $D = a$, $\Delta = T^2 - 4D = b^2 - 4a$.

- ▶ si $b = 0 \rightarrow E \text{ no } A \rightarrow \text{centre (osc. harmòniques)}$
- ▶ si $b > 0 \rightarrow A$
 - ★ si $0 < b < 2\sqrt{a} \rightarrow \text{focus atractor (osc. sub-esmorteïdes)}$
 - ★ si $b = 2\sqrt{a} \rightarrow \text{node impropri atractor (osc. críticament esmorteïdes)}$
 - ★ si $b > 2\sqrt{a} \rightarrow \text{node propi atractor (osc. sobre-esmorteïdes)}$

(2) *Oscil·lacions elèctriques*

Circuit RLC:



$I(t)$: intensitat de corrent

R : resistència

L : inductància d'una bobina

C : capacitat d'un condensador

V : tensió subministrada (suposem constant)

Per la *Llei del voltatge de Kirchhoff* (o *segona Llei de Kirchhoff*), tenim l'equació "integro-diferencial"

$$L I'(t) + R I(t) + \frac{1}{C} \int_0^t I(s) = V,$$

i derivant respecte t obtenim una EDO lineal de segon ordre,

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0$$

(del mateix tipus que amb les oscil·lacions mecàniques).

Sistemes no lineals

- Sistema autònom $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$,
donat per un camp vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (de classe $\mathcal{C}^1$)
 - ▶ En general no es poden resoldre explícitament, però podem estudiar l'estabilitat de punts d'equilibri, l'existència de quantitats conservades, etc.
- Un punt $\mathbf{X}^0 \in \mathcal{U}$ és punt d'equilibri si $\mathbf{F}(\mathbf{X}^0) = \mathbf{0}$
 - ▶ En un sistema no lineal, les nocions de punt d'equilibri E, I, A, R són locals (referides a cada punt d'equilibri i no a tot el sistema)

● Evolució d'àrees/volums

(àrees en sistemes 2D, volums en sistemes 3D ...).

Donat $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ sistema autònom, $\mathbf{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definim la seva divergència:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \operatorname{tr} D\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

(és una funció escalar). Tenim:

- ▶ a les zones de $\mathcal{U}$ on $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) > 0$, el sistema expandeix àrees;
- ▶ a les zones de $\mathcal{U}$ on $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) < 0$, el sistema contrau àrees;
- ▶ si $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \equiv 0$, el sistema conserva àrees.

Obs.: En el cas d'un sistema autònom 2D, deduïm que si $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) > 0$ per a tot $\mathbf{X} \in \mathcal{U}$, o bé $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{X}) < 0$ per a tot $\mathbf{X} \in \mathcal{U}$, aleshores no podem tenir cap òrbita periòdica (llevat que sigui un punt d'equilibri) que tanqui una regió continguda en $\mathcal{U}$.

● Mètode de linealització

$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ sistema autònom, $\mathbf{X}^0$ punt d'equilibri

- Def.: El sistema linealitzat de $\mathbf{F}$ en el punt d'equilibri $\mathbf{X}^0$ és

$$\mathbf{X}' = D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$$

on $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ és la *matriu jacobiana* de $\mathbf{F}$ en el punt $\mathbf{X}^0$.

- Cas 2D: escrivint $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = (P(x, y), Q(x, y))$, $\mathbf{X}^0 = (x_0, y_0)$, el sistema linealitzat és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x(x_0, y_0) & P_y(x_0, y_0) \\ Q_x(x_0, y_0) & Q_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

essent $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$, etc.

(Nota: es tracta d'un sistema lineal “centrat en el punt (x_0, y_0) ”.)

Teorema (mètode de linealització)

$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, amb $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$

$\mathbf{X}^0 \in \mathcal{U}$ punt d'equilibri

- (a) Si tots els VAPs λ de $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ compleixen $\operatorname{Re}\lambda < 0$
 $\implies$ el punt $\mathbf{X}^0$ és atractor
- (b) Si algun VAP λ de $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ compleix $\operatorname{Re}\lambda > 0$
 $\implies$ el punt $\mathbf{X}^0$ és inestable
- (b') Si tots els VAPs λ de $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ compleixen $\operatorname{Re}\lambda > 0$
 $\implies$ el punt $\mathbf{X}^0$ és repulsor
- (b'') Si algun VAP λ de $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ compleix $\operatorname{Re}\lambda > 0$ i algun $\operatorname{Re}\lambda < 0$
 $\implies$ el punt $\mathbf{X}^0$ és inestable no repulsor

- A la resta de casos (és a dir, si tots els VAPs λ de $D\mathbf{F}(\mathbf{X}^0)$ compleixen $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ i algun té $\operatorname{Re}\lambda = 0$) el mètode de linealització no decideix

● Mètode de Lyapunov

Podem *intentar* aplicar-lo quan el mètode de linealització no decideix.

$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ sistema autònom, $\mathbf{X}^0$ punt d'equilibri

- ▶ Considerem una funció $V(\mathbf{X})$ que doni “una mesura de la distància a $\mathbf{X}^0$ ”, p.ex.:

- ★ $V(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\|^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2$

- ★ $V(\mathbf{X}) = a_1 (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + a_n (x_n - x_n^0)^2$ amb $a_1, \dots, a_n > 0$
(no podem considerar $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^0\| = \sqrt{\dots}$ perquè no és $\mathcal{C}^1$)

- ▶ Donada una trajectòria $\mathbf{X}(t)$, per saber si s'apropa o s'allunya de $\mathbf{X}^0$, derivem la funció $V(\mathbf{X}(t))$ usant la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}[V(\mathbf{X}(t))] = \langle \nabla V(\mathbf{X}(t)), \mathbf{X}'(t) \rangle = \langle \nabla V(\mathbf{X}(t)), \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \rangle$$

- ▶ Ara considerem la funció $W(\mathbf{X}) = \langle \nabla V(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle$
(la “derivada temporal” de $V(\mathbf{X})$ al llarg de les trajectòries)
 - ★ en els punts on $W(\mathbf{X}) < 0$, les trajectòries s'apropen a $\mathbf{X}^0$
 - ★ en els punts on $W(\mathbf{X}) > 0$, les trajectòries s'allunyen de $\mathbf{X}^0$(des del punt de vista de la distància $V(\mathbf{X})$ considerada)

- ▶ *Def.* : Considerem una funció escalar $W : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i un punt $\mathbf{X}^0 \in \mathcal{U}$ tal que $W(\mathbf{X}^0) = 0$,
 - ★ W és *definida positiva* en $\mathbf{X}^0$ si té un mínim relatiu estricta en $\mathbf{X}^0$
 - ★ W és *definida negativa* en $\mathbf{X}^0$ si té un màxim relatiu estricta en $\mathbf{X}^0$
 - ★ W és *semi-definida positiva* en $\mathbf{X}^0$ si té un mínim relatiu en $\mathbf{X}^0$ (no necessàriament estricta)
 - ★ W és *semi-definida negativa* en $\mathbf{X}^0$ si té un màxim relatiu en $\mathbf{X}^0$ (no necessàriament estricta)
- ▶ Exemples:
 - ★ $W(x, y) = x^2 + y^2$ és definida positiva a l'origen
 - ★ $W(x, y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x - y)^2$ és semi-definida negativa a l'origen

Teorema de Lyapunov

$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, amb $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$

$\mathbf{X}^0 \in \mathcal{U}$ punt d'equilibri

$V(\mathbf{X})$ de classe $\mathcal{C}^2$, definida positiva en $\mathbf{X}^0$ (“funció de Lyapunov”)

$W(\mathbf{X}) = \langle \nabla V(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle$ (ho calculem)

- (a) si W és definida negativa en $\mathbf{X}^0 \implies \mathbf{X}^0$ és atractor
- (b) si W és definida positiva en $\mathbf{X}^0 \implies \mathbf{X}^0$ és repulsor
- (c) si W és semi-definida negativa en $\mathbf{X}^0 \implies \mathbf{X}^0$ és estable
- (d) si W és semi-definida positiva en $\mathbf{X}^0 \implies \mathbf{X}^0$ no és atractor
- (e) si $W \equiv 0 \implies \mathbf{X}^0$ és estable no atractor

- *Nota*: Com escollim una funció de Lyapunov $V(\mathbf{X})$ adequada?
En general és difícil, però en problemes de mecànica l'energia total (cinètica + potencial) ens pot ser útil.

- ▶ *Def.* : Una funció $V(\mathbf{X})$ s'anomena una quantitat conservada (o *integral primera*) si és constant sobre les trajectòries, és a dir, si $W(\mathbf{X}) = \langle \nabla V(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle \equiv 0$.
- ▶ En un sistema 2D ($n = 2$), si $V(\mathbf{X})$ és una quantitat conservada llavors les òrbites estan contingudes en corbes de nivell de $V(\mathbf{X})$.
- ▶ *Def.* : Un sistema no lineal 2D amb un punt d'equilibri $\mathbf{X}^0$ tal que el sistema linealitzat en $\mathbf{X}^0$ és un centre, i que té quantitat conservada $V(\mathbf{X})$, direm que té un *centre no lineal* en $\mathbf{X}^0$.

Aplicació: equació del pèndol

$x(t)$: angle respecte la posició vertical

$x'(t)$: velocitat angular

$x''(t)$: acceleració angular

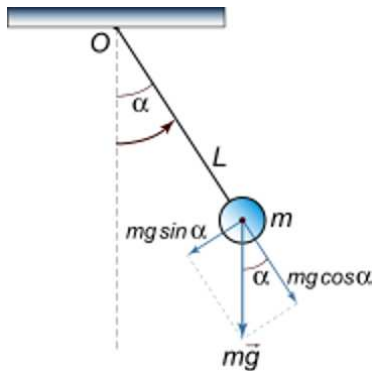
EDO:

$$m \ell x'' = -mg \sin x - \beta \ell x'$$

$$x'' = -a \sin x - b x'$$

$$a = g/\ell > 0, \quad b = \beta/m \geq 0$$

- ▶ $b = 0$ sense fricció
- ▶ $b > 0$ amb fricció

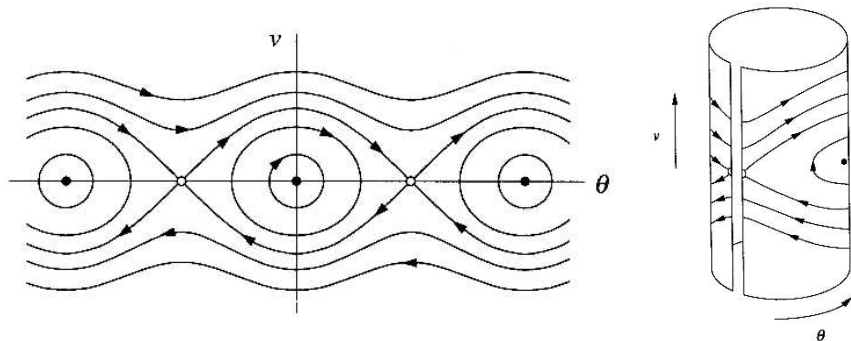


- Passant a sistema (amb $x(t)$ i $y(t) = x'(t)$ com a funcions incògnites), el camp vectorial és $\mathbf{F}(x, y) = (y, -a \sin x - by)$.
- Punts d'equilibri: $(0, 0)$ i $(\pm\pi, 0)$ (posicions inferior i superior d'equilibri)
Nota: també ho són tots els $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, però són equivalents als anteriors per la periodicitat en x .
- Estabilitat per linealització:
 - ▶ $(\pm\pi, 0)$ és I no R (el sistema linealitzat és sella)
 - ▶ si $b > 0$, el $(0, 0)$ és A (el sistema linealitzat és focus atractor / node impropri/propri atractor)
 - ▶ si $b = 0$, per al $(0, 0)$ no decideix (el sistema linealitzat és centre)
- Si $b = 0$, al $(0, 0)$, podem aplicar el mètode de Lyapunov amb

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + a(1 - \cos x) = \frac{y^2}{2} + 2a \sin^2 \frac{x}{2}$$

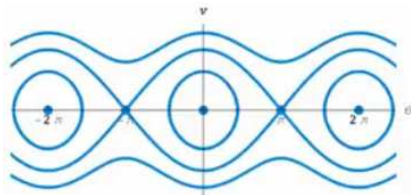
(ve de l'energia total : $E = \frac{1}{2} m(\ell x')^2 + mg\ell(1 - \cos x)$). Notem que V és definida positiva al $(0, 0)$ ja que hi té un mínim estricte. Obtenim $W \equiv 0$ i per tant el $(0, 0)$ és E no A, amb la funció V com a quantitat conservada.

- En el cas del pèndol sense fricció ($b = 0$), obtenim les òrbites a partir de les corbes de nivell de la funció V . Per la periodicitat, podem restringir-nos a la franja $-\pi \leq x \leq \pi$. De fet, identificant les rectes $x = \pm\pi$ podríem dibuixar el retrat de fase sobre un cilindre.

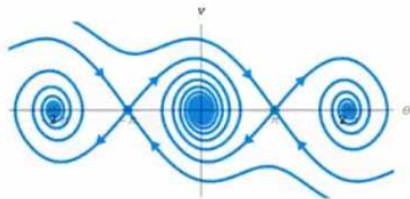


Sobre el nivell $V = 2a$ tenim les corbes $y = \pm 2\sqrt{a} \cos(x/2)$, que corresponen a òrbites que tendeixen a $(\pm\pi, 0)$ quan $t \rightarrow \pm\infty$. Aquestes òrbites separen dos tipus diferents d'òrbites periòdiques.

- Per al pèndol amb fricció ($b > 0$), p.ex. l'òrbita que prové de $(-\pi, 0)$ per a $t \rightarrow -\infty$, ja no tendeix al punt $(\pi, 0)$ quan $t \rightarrow \infty$, sinó al punt d'equilibri atractor $(0, 0)$.



$$b = 0$$



$$b > 0$$

Fonts de les figures:

<https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEproj/sp15/EthanRetherford/paper.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator

<https://mat-web.upc.edu/etseib/ed/classifSL.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

<https://www.math24.net/nonlinear-pendulum/>

<http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/precourse/leok-26sep02.pdf>