

Càlcul Vectorial (CV)

Pere Gutiérrez

Setembre 2022

Integració sobre corbes

- ▶ Corbes a $\mathbb{R}^n$ (tipus i parametritzacions)
- ▶ Longitud d'una corba: $\text{long}(C) = \int_C d\ell$
- ▶ Integral d'una funció escalar f sobre una corba: $\int_C f d\ell$
- ▶ Circulació d'un camp vectorial $\mathbf{F}$ al llarg d'una corba orientada:
 $\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$

Corbes a $\mathbb{R}^n$

- Nocions (informals):
 - ▶ corba *suau*: sense angles ni punxes
 - ▶ corba *simple*: sense autointerseccions
 - ▶ corba *regular*: suau i simple
 - ▶ corba *tancada*: si els punts inicial i final coincideixen
 - ▶ corba *regular a trossos*: formada per un nombre finit de corbes regulars, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, de manera que el punt final de cada tros C_i és el punt inicial del tros següent C_{i+1}

- Una corba regular $C \subset \mathbb{R}^n$ admet una parametrització regular,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : I = [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

que compleix:

- * $C = \sigma(I) = \{\sigma(t) : t \in I\}$
 - * és de classe $\mathcal{C}^1$
 - * és injectiva (excepte que tindrem $\sigma(a) = \sigma(b)$ si la corba és tancada)
 - * $\sigma'(t) \neq \mathbf{0}$ per a tot $t \in (a, b)$ (admetem que $\sigma'(t)$ tendeixi a 0 si $t \rightarrow a^+$ o $t \rightarrow b^-$)
- En el cas d'una corba regular a trossos, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, usualment considerem, per a cada tros C_i , una parametrització regular $\sigma_i(t)$, $t \in [a_i, b_i]$ (podem fer que $b_i = a_{i+1}$ per a cada i , però no cal)

- En cada punt (regular) $\sigma(t)$ d'una corba C , considerem:
 - $\sigma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$, *vector tangent* (segons la parametrització escollida, n'hi ha infinits possibles tots en la mateixa direcció)
 - $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{x'_1(t)^2 + \dots + x'_n(t)^2}$, *velocitat*
 - $T_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$, *vector tangent unitari* (n'hi ha dos possibles, associats a les dues orientacions de C)
- Dues parametritzacions regulars d'una mateixa corba C ,

$$\sigma(t), t \in I \qquad \gamma(s), s \in J$$

es relacionen per un *canvi de paràmetre* $t = h(s)$

(cal $h : J \rightarrow I$ bijectiva, C^1 i amb $h'(s) \neq 0$ per a tot s).

Aplicant la regla de la cadena a la igualtat $\gamma(s) = \sigma(t)$, amb $t = h(s)$, obtenim:

$$\gamma'(s) = \sigma'(t) \cdot h'(s), \quad \|\gamma'(s)\| = \|\sigma'(t)\| \cdot |h'(s)|, \quad T_\gamma(s) = \pm T_\sigma(t).$$

Longitud d'una corba

- Def.: $C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t)$, $t \in [a, b]$

$$\boxed{\text{long}(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt} = \int_C d\ell$$

- ▶ Notació: $\boxed{d\ell = \|\sigma'(t)\| dt}$ és l'element de longitud (o element escalar de longitud)

- ▶ Obs.: la longitud no depèn de la parametrització escollida

- Si C és corba regular a trossos, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, sumem les

longituds de cada tros: $\text{long}(C) = \sum_{i=1}^r \text{long}(C_i)$

- Cas particular 1: una gràfica a $\mathbb{R}^2$

Considerem la corba C definida per $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

Es pot parametritzar prenent la pròpia coordenada x com a paràmetre:
 $\sigma(x) = (x, f(x))$, $a \leq x \leq b$.

L'element de longitud és $d\ell = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ (i servirà per a d'altres integrals de funcions escalars sobre C), i obtenim

$$\text{long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Obs.: Si $\alpha(x)$ és l'angle que forma (en cada punt) el vector tangent amb la direcció horitzontal, podem escriure: $\text{long}(C) = \int_a^b \frac{dx}{\cos \alpha(x)}$.

- Cas particular 1': gràfica d'una corba a $\mathbb{R}^3$,
definida per $y = f(x)$, $z = g(x)$, $a \leq x \leq b$.

Parametritzant per $\sigma(x) = (x, f(x), g(x))$, $a \leq x \leq b$, obtenim:

$$\text{long}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2} dx.$$

- Cas particular 2: corba de $\mathbb{R}^2$ expressada en coordenades polars

En les coordenades polars (r, θ) de $\mathbb{R}^2$, considerem la corba C definida per $r = g(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$.

Passant a coordenades cartesianes (x, y) , tenim la parametrització

$$\sigma(\theta) = (g(\theta) \cos \theta, g(\theta) \sin \theta), \quad a \leq \theta \leq b.$$

L'element de longitud és

$$d\ell = \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta$$

i obtenim

$$\text{long}(C) = \int_a^b \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2} d\theta$$

Integral d'una funció escalar sobre una corba

- Def.:

$C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$

$f : C \rightarrow \mathbb{R}$ funció escalar, contínua a trossos (pot tenir discontinuïtats, però només evitables o de salt finit)

$$\int_C f \, d\ell = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

- Obs.:

- ▶ si $f \equiv 1$, obtenim la longitud de C
- ▶ la integral d'una funció escalar f sobre C no depèn de la parametrització escollida
- ▶ si C és regular a trossos, $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$, apliquem la definició sobre cada tros i sumem:
$$\int_C f \, d\ell = \sum_{i=1}^r \int_{C_i} f \, d\ell$$

- Interpretació més simple:

En el cas d'una corba plana $C \subset \mathbb{R}^2$, i suposant $f \geq 0$, podem veure la integral $\int_C f \, d\ell$ com l'àrea d'una tanca que té com a base la corba C i alçària en cada punt donada per la funció f .

● Aplicacions de les integrals sobre corbes

Ara veurem la corba $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o 3) com un *filferro* o *cable*, amb una densitat lineal de massa donada per una funció $\rho : C \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$.

Aleshores podem calcular:

► Massa

$$m(C) = \int_C \rho \, d\ell$$

► Mitjana d'una magnitud $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ (p.ex. la temperatura)

$$\bar{f} = \frac{1}{m(C)} \int_C f \rho \, d\ell$$

► Centre de masses

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(C)} \left(\int_C x \rho \, d\ell, \int_C y \rho \, d\ell, \int_C z \rho \, d\ell \right)$$

► Moment d'inèrcia respecte un eix e

$$I_e = \int_C r^2 \rho \, d\ell$$

on $r : C \rightarrow \mathbb{R}$ és la distància de cada punt de C a l'eix e

● Aplicacions en el **cas homogeni** d'un filferro de densitat $\rho \equiv \text{const}$,

▶ Massa

$$m(C) = \rho \text{long}(C)$$

▶ Mitjana d'una magnitud $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{long}(C)} \int_C f \, d\ell$$

▶ Centre geomètric

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\text{long}(C)} \left(\int_C x \, d\ell, \int_C y \, d\ell, \int_C z \, d\ell \right)$$

▶ Moment d'inèrcia respecte un eix e

$$I_e = \rho \int_C r^2 \, d\ell$$

Camps vectorials

- Un *camp vectorial* sobre un domini $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ és simplement una funció vectorial, entenent que a cada punt del domini li assigna un vector,

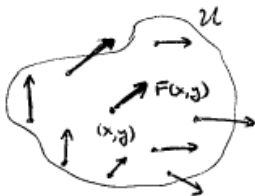
$$\boxed{\mathbf{F} : \underbrace{\mathcal{U}}_{\text{punts}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{vectors}}}$$

(pot ser continu, de classe $\mathcal{C}^1$, etc)

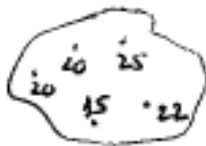
Notacions:

- ▶ $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ per a un camp vectorial a $\mathbb{R}^2$ (c.v. “pla”)
- ▶ $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ per a un camp vectorial a $\mathbb{R}^3$

En canvi, un *camp escalar* assigna a cada punt un escalar (és a dir, un nombre real).



camp vectorial



camp escalar

- Alguns fenòmens físics vénen descrits per camps escalars, i d'altres per camps vectorials.
 - ▶ camps escalars: temperatura, pressió...
 - ▶ camps vectorials:
 - ★ camp de velocitats (p.ex. d'un corrent d'aigua)
 - ★ camp de forces (gravitatori, elèctric...)
 - ★ (etc)
- Segons el context físic, un camp vectorial s'associa a un tipus o altre de sistema d'EDOs,
 - ★ per a una partícula que es mou segons un camp de velocitats:
 $\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ (sistema d'EDOs de primer ordre)
 - ★ per a una partícula de massa m (o càrrega q) sotmesa a un camp de forces: $m\mathbf{X}'' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ (sistema d'EDOs de segon ordre)

Cada solució $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ és una possible trajectòria de la partícula (una corba parametritzada pel temps t).

Circulació d'un camp vectorial al llarg d'una corba

- Def.:

$C \subset \mathbb{R}^n$ corba regular, parametritzada per $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$

$\mathbf{F} : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial, continu a trossos

La circulació de $\mathbf{F}$ al llarg de C , segons la parametrització σ , és

$$\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$$

- ▶ Notació: $d\vec{\ell} = \sigma'(t) dt$ és el vector diferencial de longitud (o element vectorial de longitud)
- ▶ si C és regular a trossos, apliquem la definició sobre cada tros i sumem

• Més notacions:

- ▶ Si C és corba tancada, escrivim $\oint_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$
- ▶ Si $\mathbf{F} = (P, Q)$ camp vectorial a $\mathbb{R}^2$, podem escriure

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle &= \int_{\sigma} P dx + Q dy \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt \end{aligned}$$

on $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, i usem la notació $dx = x'(t) dt$,
 $dy = y'(t) dt$.

- ▶ Anàlogament, si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ camp vectorial a $\mathbb{R}^3$, podem escriure

$$\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{\sigma} P dx + Q dy + R dz$$

- *Interpretació*: Si $\mathbf{F}$ camp de forces, la circulació $\int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$ correspon al treball realitzat per $\mathbf{F}$ sobre una partícula que es mou al llarg de la trajectòria σ :
 - ▶ força favorable al moviment si $\langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle > 0$ (angle agut)
 - ▶ força contrària al moviment si $\langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle < 0$ (angle obtús)

Obs.: Si $\mathbf{F}$ és ortogonal al vector tangent $\sigma'(t)$ per a tot t , el treball o circulació és 0.

● Orientació d'una corba

- ▶ Una corba C entre dos punts A i B té dues possibles orientacions: de A a B , i de B a A (i si la corba és tancada?)
- ▶ Una definició millor: una orientació consisteix en escollir un vector tangent unitari $\mathbf{T}$ en cada punt de C , de manera que el camp $p \mapsto \mathbf{T}(p)$ sigui continu (només hi ha dues possibilitats)
- ▶ Escriurem C^+ i C^- les dues orientacions de la corba (la que “ens interessa” i “l'altra”)
- ▶ En general, no hi ha una manera estàndard d'escollir l'orientació C^+ (només en casos concrets com quan la corba és la vora o frontera d'un domini de $\mathbb{R}^2$ o d'una superfície de $\mathbb{R}^3$)
- ▶ Una parametrització $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, de la corba C s'anomena *compatible* amb l'orientació C^+ si, en cada punt, el vector tangent unitari $\mathbf{T}_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ és el que correspon a C^+

- **Circulació al llarg d'una corba orientada**

Def.: $\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{\sigma} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt$,
 essent $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, parametrització compatible amb C^+

$$\int_{C^-} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = - \int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$$

- Podem escriure:

$$\boxed{\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_C \langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\sigma} \rangle d\ell}$$

per a *qualsevol* parametrització σ compatible amb l'orientació C^+ .
 Notem que $\langle \mathbf{F}, \mathbf{T}_{\sigma} \rangle$ és la component tangencial de $\mathbf{F}$ en cada punt de la corba (és una funció escalar).

- Deduïm de la fórmula anterior que la circulació no depèn de quina parametrització concreta de la corba fem servir, però sí de la seva orientació (només canvia el signe).

Els teoremes integrals I

Operadors diferencials

$f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ camp escalar

$\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial

[Useu el símbol “nabla”: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$]

- ▶ *gradient*: $\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$
- ▶ *divergència*: $\text{div } \mathbf{F} = \langle \nabla, \mathbf{F} \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$
- ▶ *rotacional (3D)*: si $\mathbf{F} = (P, Q, R)$,
 $\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- ▶ *rotacional (2D)*: si $\mathbf{F} = (P, Q)$, $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$
- ▶ *laplaciana*: $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f) = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$

Obs.: $\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \wedge \nabla f \equiv \mathbf{0}$, $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = \langle \nabla, \nabla \wedge \mathbf{F} \rangle \equiv 0$
(si $f, \mathbf{F}$ són $\mathcal{C}^2$)

Els teoremes de Newton–Leibniz i de Green ens donen fórmules alternatives per calcular la circulació d'un camp vectorial al llarg d'una corba, que podrem aplicar en determinants casos.

Camps conservatius

$\mathbf{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ camp vectorial (definit en tot un domini $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$)

- ▶ En general, la circulació de $\mathbf{F}$ entre dos punts depèn de la corba recorreguda entre els punts inicial i final.
- ▶ *Def.: $\mathbf{F}$ és conservatiu* si, donats dos punts $A, B \in \mathcal{U}$, la circulació de $\mathbf{F}$ entre A i B no depèn de la corba recorreguda, dins el domini $\mathcal{U}$.

Def. equivalent: $\mathbf{F}$ és conservatiu si la circulació al llarg de qualsevol corba tancada continguda en $\mathcal{U}$ és 0.

- ▶ *Def.: $\mathbf{F}$ prové d'un potencial escalar* si $\mathbf{F} = \nabla f$ per alguna funció $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que rep el nom de potencial escalar o “primitiva” (si existeix, és únic llevat de constant additiva).

Teorema de Newton–Leibniz (o del gradient)

Un camp vectorial $\mathbf{F} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és conservatiu si i només si prové d'un potencial escalar: $\mathbf{F} = \nabla f$

Llavors, si C^+ corba orientada continguda en $\mathcal{U}$, amb origen al punt A i final al punt B ,

$$\int_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = f(B) - f(A)$$

- *Interpretació física*: Considerem el sistema d'EDOs $m\mathbf{X}'' = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, corresponent al moviment d'una partícula de massa m que es mou sota el camp de forces $\mathbf{F}$.

Suposant que el camp de forces és conservatiu, escrivim

$\mathbf{F} = -\nabla U$ i llavors $U(\mathbf{X})$ és l'energia potencial. Tenim:

- ★ l'energia total $E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{X}'\|^2 + U(\mathbf{X})$ és quantitat conservada;
- ★ el treball realitzat per $\mathbf{F}$ sobre la partícula entre els instants t_0 i t_1 és $U(\mathbf{X}(t_0)) - U(\mathbf{X}(t_1))$.

- Condició necessària (suposant $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$):

$$(\mathbb{R}^2) \quad \text{si } \mathbf{F} = (P, Q) \text{ prové d'un potencial escalar} \implies \boxed{P_y = Q_x}$$

$$(\mathbb{R}^3) \quad \text{si } \mathbf{F} = (P, Q, R) \text{ prové d'un potencial escalar}$$

$$\implies \boxed{P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y}$$

$$\text{és a dir, } \mathbf{F} \text{ és } \underline{\text{irrotacional}}: \boxed{\text{rot } \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}}$$

- Aquesta condició necessària no és suficient,

p.ex. $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ compleix que $P_y = Q_x$

però no prové d'un potencial escalar, ja que no és conservatiu (la circulació al llarg d'una circumferència $x^2 + y^2 = R^2$ és $\neq 0$).

Obs.: El domini $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de $\mathbf{F}$ no és “simplement connex” (té un forat).

- En el cas que el domini $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{F} = (P, Q)$ sigui simplement connex (és a dir, sense forats), la condició és necessària i suficient:

$$\mathbf{F} = (P, Q) \text{ prové d'un potencial escalar} \iff P_y = Q_x$$

Orientació de la frontera d'un domini pla

- ▶ Donat un domini $D \subset \mathbb{R}^2$, la seva *frontera* o *vora* ∂D estarà formada per una o més corbes tancades (regulars a trossos):
 $\partial D = C_1 \cup \dots \cup C_m$
 - ★ si D és *simplement connex*, és a dir sense forats, la frontera és una única corba tancada (frontera exterior);
 - ★ si D no és simplement connex, la frontera estarà per dues o més corbes tancades (frontera exterior i fronteres interiors).
- ▶ Per al domini D , l'orientació estàndard o *compatible* ∂D^+ de la frontera serà aquella per a la qual cada corba C_i es recorri de manera que l'interior del domini D quedi sempre a mà esquerra (correspon a demanar que el vector tangent a C_i i el vector normal interior a D formin una base directa). Això vol dir:
 - ★ la frontera exterior s'orienta en sentit antihorari
 - ★ les fronteres interiors (si n'hi ha) s'orienten en sentit horari
- ▶ Donat un camp vectorial $\mathbf{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial D^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \sum_{i=1}^m \oint_{C_i^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$$

Teorema de Green (o de Green–Riemann, o del rotacional 2D)

$D \subset \mathbb{R}^2$ domini, amb la frontera ∂D^+ orientada de manera compatible.

$\mathbf{F} = (P, Q)$ camp vectorial definit a tot D (de classe $\mathcal{C}^1$).

Aleshores,

$$\oint_{\partial D^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy$$

- ▶ *Obs. 1:* si $\mathbf{F}$ és conservatiu, tindrem $Q_x - P_y \equiv 0$
- ▶ *Obs. 2:* recordem que $\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, Q_x - P_y)$

Aplicació al càlcul de l'àrea d'un domini pla

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D^+} (-y) \, dx + x \, dy = - \oint_{\partial D^+} y \, dx = \oint_{\partial D^+} x \, dy$$

Integració sobre superfícies

- ▶ Superfícies a $\mathbb{R}^3$ (parametritzacions)
- ▶ Àrea d'una superfície: $\text{Area}(S) = \int_S dS$
- ▶ Integral d'una funció escalar f sobre una superfície: $\int_S f dS$
- ▶ Flux d'un camp vectorial $\mathbf{F}$ a través d'una superfície orientada:
 $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$

Superfícies a $\mathbb{R}^3$

- Nocions (informals):

- ▶ superfície *regular*: sense arestes
- ▶ superfície *regular a trossos*: formada per un nombre finit de superfícies regulars, $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$, de manera que cada intersecció $S_i \cap S_j$ (si és no buida) estigui formada per corbes regulars a trossos
- ▶ superfície *tancada*: la frontera $S = \partial W$ d'un sòlid o cos $W \subset \mathbb{R}^3$

- Una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ és regular quan admet una parametrització regular,

$$\begin{aligned}\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

u, v són els paràmetres o coordenades sobre S

que compleix:

- * $D \subset \mathbb{R}^2$ compacte i connex, i tal que la seva frontera ∂D és corba regular a trossos
 - * $S = \Phi(D)$
 - * és de classe $\mathcal{C}^1$
 - * és injectiva (excepte potser a ∂D)
 - * $\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ per a tot $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$ (excepte potser en un nombre finit de punts, anomenats els '*punts singulars*' de la parametrització Φ ; la resta són '*punts regulars*')
- En el cas d'una superfície regular a trossos, $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$, considerem per a cada tros S_i una parametrització regular $\Phi_i(u, v)$, $(u, v) \in D_i$.

- Donada una superfície regular S , parametritzada per $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$, per a cada punt regular $p_0 = \Phi(u_0, v_0)$ considerem:

- les corbes coordenades per p_0 (corresponents a la parametrització Φ), que són les imatges de

$$u \mapsto \Phi(u, v_0), \quad v \mapsto \Phi(u_0, v)$$

- els vectors tangents a les corbes coordenades per p_0 ,

$$\Phi_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0))$$

$$\Phi_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0))$$

que són linealment independents ja que estem suposant $\Phi_u \wedge \Phi_v \neq \mathbf{0}$ (sobre els punts regulars)

- $T_{p_0}S = [\Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0)]$, el pla tangent a S en el punt p_0
- $\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)$, un vector normal a S en el punt p_0
- $N_\Phi(u_0, v_0) = \frac{\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)}{\|\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)\|}$, vector normal unitari en el punt p_0 (n'hi ha dos possibles, associats a les dues orientacions de S)

Exemples de superfícies

- **Cilindre** (de radi R i alçada h):

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Phi(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h]$$

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) = (x, y, 0), \quad \|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = R$$

- **Con** (de radi R i alçada h):

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (Rz/h)^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Phi(\theta, z) = \left(\frac{Rz}{h} \cos \theta, \frac{Rz}{h} \sin \theta, z \right), \quad D = [0, 2\pi] \times [0, h]$$

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_z = \left(\frac{Rz}{h} \cos \theta, \frac{Rz}{h} \sin \theta, -\frac{R^2}{h^2} z \right) = \left(x, y, -\frac{R^2}{h^2} z \right)$$

- **Esfera** (de radi R):

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi),$$

$$D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_z = R \cos \varphi (x, y, z), \quad \|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\| = R^2 \cos \varphi$$

- Altres: cilindre el·líptic, el·lipsoide...

Àrea d'una superfície

- Def.: $S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$

$$\boxed{\text{Area}(S) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du \, dv} = \int_S dS$$

- ▶ Notació: $\boxed{dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du \, dv}$ és l'element de superfície (o element escalar de superfície)
- ▶ Obs.: la fórmula de l'àrea es basa en l'àrea del paral·lelogram generat per dos vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \end{vmatrix}}$$

- ▶ Obs.: l'àrea no depèn de la parametrització escollida
- Si S és superfície regular a trossos, $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$, sumem les

àrees de cada tros:
$$\text{Area}(S) = \sum_{i=1}^r \text{Area}(S_i)$$

- Cas particular 1: una **gràfica** a $\mathbb{R}^3$

Considerem la superfície S definida per $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$

Es pot parametritzar prenent les coordenades x, y com a paràmetres:

$$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

L'element de superfície és $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$ (i servirà per a d'altres integrals de funcions escalars sobre S), i obtenim

$$\text{Area}(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy$$

Obs.: Si $\alpha(x, y)$ és l'angle que forma (en cada punt) el vector normal amb la direcció vertical $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, podem escriure:

$$\text{Area}(S) = \iint_D \frac{dx \, dy}{\cos \alpha(x, y)}.$$

En el cas que S sigui un tros de pla , tindrem $\alpha \equiv \text{const}$ i per tant podem escriure: $\text{Area}(S) = \frac{\text{Area}(D)}{\cos \alpha}$ (el domini D és la projecció de S sobre el pla XY)

● Cas particular 2: **superfície de revolució**

- ▶ Considerem en el pla XZ una corba C , amb una parametrització $\sigma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $a \leq t \leq b$ (en direm corba generatriu o secció), i suposem que C és corba regular i continguda (preferentment) al semiplà $x > 0$,

$$\sigma'(t) = (x'(t), 0, z'(t)) \neq \mathbf{0}, \quad x(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

- ▶ La superfície de revolució S , generada en girar la corba C al voltant de l'eix z , es pot parametritzar per

$$\Phi(\theta, t) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$$

- ▶ Corbes coordenades:

$$t = \text{const} \longrightarrow \text{paral·lels}$$

$$\theta = \text{const} \longrightarrow \text{meridians}$$

- ▶ Tenim $\Phi_\theta \wedge \Phi_t = (x(t)z'(t) \cos \theta, x(t)z'(t) \sin \theta, -x(t)x'(t))$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| = x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}$$

► L'element de superfície, $dS = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} d\theta dt$

► L'àrea,
$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_D x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} d\theta dt \\ &= 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt \end{aligned}$$

és a dir,

$$\boxed{\text{Area}(S) = 2\pi \int_C r d\ell}$$

on r és la distància de cada punt de C a l'eix de gir, i $d\ell$ és l'element de longitud de C .

- ▶ De la fórmula anterior, deduïm el **primer teorema de Guldin** (o de *Pappus–Guldin*): l'àrea d'una superfície de revolució és

$$\text{Area}(S) = \text{long}(C) \cdot 2\pi \bar{r}_C$$

on C és la corba generatriu, i $\bar{r}_C$ és la distància del centre geomètric de C a l'eix de gir.

- ▶ També tenim el **segon teorema de Guldin**, que ens dóna el volum d'un sòlid de revolució W , obtingut en fer girar, al voltant d'un eix, una regió plana D (continguda en un semiplà limitat per l'eix),

$$\text{vol}(W) = \text{Area}(D) \cdot 2\pi \bar{r}_D$$

- ▶ Exemple: Àrea d'un tor (superfície) i volum d'un tor sòlid, generats en girar una circumferència / cercle de radi r , amb el centre situat a distància R de l'eix de gir ($r < R$):

$$\text{Area}(S) = 4\pi^2 rR, \quad \text{vol}(W) = 2\pi^2 r^2 R.$$

Integral d'una funció escalar sobre una superfície

- Def.:

$S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$
 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ funció escalar, contínua a trossos

$$\int_S f \, dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| \, du \, dv$$

- Obs.:

- ▶ si $f \equiv 1$, obtenim l'àrea de S
- ▶ la integral d'una funció escalar f sobre S no depèn de la parametrització escollida
- ▶ si S és regular a trossos, $S = S_1 \cup \dots \cup S_r$, apliquem la definició sobre cada tros i sumem:
$$\int_S f \, dS = \sum_{i=1}^r \int_{S_i} f \, dS$$

● Aplicacions de les integrals sobre superfícies

Veient la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com una *planxa*, amb una densitat superficial de massa donada per una funció $\rho : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, podem calcular:

▶ Massa

$$m(S) = \int_S \rho \, dS$$

▶ Mitjana d'una magnitud $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (p.ex. la temperatura)

$$\bar{f} = \frac{1}{m(S)} \int_S f \rho \, dS$$

▶ Centre de masses

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m(S)} \left(\int_S x \rho \, dS, \int_S y \rho \, dS, \int_S z \rho \, dS \right)$$

▶ Moment d'inèrcia respecte un eix e

$$I_e = \int_S r^2 \rho \, dS$$

on $r : S \longrightarrow \mathbb{R}$ és la distància de cada punt de S a l'eix e

● Aplicacions en el **cas homogeni** d'una planxa de densitat $\rho \equiv \text{const}$,

▶ Massa

$$m(S) = \rho \text{ Area}(S)$$

▶ Mitjana d'una magnitud $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S f \, dS$$

▶ Centre geomètric

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\text{Area}(S)} \left(\int_S x \, dS, \int_S y \, dS, \int_S z \, dS \right)$$

▶ Moment d'inèrcia respecte un eix e

$$I_e = \rho \int_S r^2 \, dS$$

Flux d'un camp vectorial a través d'una superfície

- Def. :

$S \subset \mathbb{R}^3$ superfície regular, parametritzada per $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$

$\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ camp vectorial, continu a trossos

El flux de $\mathbf{F}$ a través de S , segons la parametrització Φ , és

$$\int_{\Phi} \langle \mathbf{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle du dv$$

- ▶ Notació : $d\vec{S} = \Phi_u \wedge \Phi_v du dv$ és el vector diferencial de superfície (o element vectorial de superfície)
- ▶ si S és regular a trossos, apliquem la definició sobre cada tros i sumem

- Una altra notació:

- ▶ Si S és superfície tancada (és a dir, la frontera $S = \partial W$ d'un sòlid $W \subset \mathbb{R}^3$), escrivim $\oint_{\Phi} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$

- Interpretació del flux:

Si $\mathbf{F}$ camp de velocitats d'un fluid, el flux $\int_{\Phi} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$ correspon a la quantitat de fluid que travessa S , per unitat de temps, en el sentit indicat pel vector normal $\Phi_u \wedge \Phi_v$:

- ▶ mateix sentit si $\langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle > 0$ (angle agut)
- ▶ sentit contrari si $\langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle < 0$ (angle obtús)

Obs.: Si $\mathbf{F}$ és tangent a la superfície S (és a dir, ortogonal al vector normal $\Phi_u \wedge \Phi_v$) en tot punt, el flux és 0.

● Orientació d'una superfície

- ▶ Una superfície S té (si és orientable) dues possibles orientacions, que corresponen als dos sentits amb què podem travessar S
- ▶ Per definir-ho, escollim (si és possible) un vector normal unitari $\mathbf{N}$ en cada punt de S , de manera que el camp $p \mapsto \mathbf{N}(p)$ sigui continu:
 - ★ S és orientable si podem escollir $\mathbf{N}$ de manera contínua a tota la superfície, i en aquest cas només hi ha dues possibilitats, que ens donen les dues possibles orientacions de la superfície; escriurem S^+ i S^- les dues orientacions de la superfície (la que “ens interessa” i “l'altra”)
 - ★ S és no orientable si no podem escollir $\mathbf{N}$ de manera contínua a tota la superfície (exemple: la cinta de Möbius)

- ▶ Si S és orientable, en general no hi ha una manera estàndard d'escollir l'orientació S^+ (només en casos concrets com quan la superfície és tancada)
- ▶ Quan hem escollit una orientació S^+ , també hem definit altres conceptes:
 - ★ la cara superior i inferior de la superfície
 - ★ un sentit de gir positiu sobre la superfície
- ▶ Una parametrització $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$, de la superfície S s'anomena *compatible* amb l'orientació S^+ si, en cada punt, el vector normal unitari $\mathbf{N}_\Phi(u, v) = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$ és el que correspon a S^+

- **Flux a través d'una superfície orientada**

Def.: $\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = \int_{\Phi} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = \iint_D \langle \mathbf{F}(\Phi(u, v)), \Phi_u \wedge \Phi_v \rangle du dv$,
 essent $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in D$, parametrització compatible amb S^+

$$\int_{S^-} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = - \int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$$

- Podem escriure:

$$\int_{S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = \int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\Phi} \rangle dS$$

per a *qualsevol* parametrització Φ compatible amb l'orientació S^+ .
 Notem que $\langle \mathbf{F}, \mathbf{N}_{\Phi} \rangle$ és la component normal de $\mathbf{F}$ en cada punt de la superfície (és una funció escalar).

- Deduïm de la fórmula anterior que el flux no depèn de quina parametrització concreta de la superfície fem servir, però sí de la seva orientació (només canvia el signe).

Els teoremes integrals II

Els teoremes de Gauss i de Stokes, com el teorema de Green, estableixen igualtats entre integrals de diferents tipus, proporcionant fórmules alternatives per a calcular-les.

Orientació de la frontera d'un sòlid

- ▶ Donat un sòlid o cos $W \subset \mathbb{R}^3$, la seva *frontera* ∂W estarà formada per una o més superfícies tancades (regulars a trossos): $\partial W = S_1 \cup \dots \cup S_m$.
- ▶ Per al sòlid W , l'orientació estàndard $\boxed{\partial W^+}$ de la frontera serà la que ve donada pel vector normal exterior a W .
- ▶ Donat un camp vectorial $\mathbf{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = \sum_{i=1}^m \oint_{S_i^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$$

(és el *flux sortint* de W).

Camps solenoidals

- ▶ En general, el flux de $\mathbf{F}$ a través d'una superfície tancada no és 0, és a dir, la sortida de flux pot ser superior o inferior a l'entrada.
- ▶ *Def.:* Un camp vectorial $\mathbf{F}$ definit en una regió $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ és solenoidal si $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$.
- ▶ Si $\mathbf{F}$ és solenoidal, el teorema de Gauss ens dirà que el flux a través de qualsevol superfície tancada $S = \partial W$ (amb $W \subset \mathcal{U}$) és 0, és a dir, la sortida de flux s'equilibra amb l'entrada. En el cas d'un camp de velocitats, estem parlant d'un fluid incompressible.
- ▶ De manera equivalent, per a un fluid incompressible que circula dins un tub (sense flux a les parets), el flux a través de dues seccions orientades en el mateix sentit coincideix.

Teorema de Gauss (o de la divergència)

$W \subset \mathbb{R}^3$ sòlid, amb la frontera ∂W^+ orientada per la normal exterior.
 $\mathbf{F}$ camp vectorial definit a W (de classe $\mathcal{C}^1$).

Aleshores,

$$\oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

- *Obs. 1:* si $\mathbf{F}$ és solenoidal, deduïm $\oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = 0$.
- *Obs. 2:* si $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv k$ (const.), deduïm $\oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle = k \operatorname{vol}(W)$.

Aplicació al càlcul del volum d'un sòlid

$$\operatorname{vol}(W) = \frac{1}{3} \oint_{\partial W^+} \langle \mathbf{r}, d\vec{\mathbf{S}} \rangle$$

Ho deduïm del fet que el camp $\mathbf{r} = (x, y, z)$ té divergència constant:
 $\operatorname{div} \mathbf{r} \equiv 3$. També podem usar qualsevol dels camps $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$,
 $(0, 0, z)$, que tenen divergència constant $\equiv 1$.

Orientació de la vora d'una superfície

- ▶ Donada una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ (no tancada), la seva vora (o *frontera*) ∂S estarà formada per una o més corbes tancades (regulars a trossos): $\partial S = C_1 \cup \dots \cup C_m$
- ▶ Suposem donada una orientació S^+ de la superfície (és a dir, un vector normal unitari $\mathbf{N}$ en cada punt). L'orientació de la vora compatible amb S^+ , que escriurem ∂S^+ , serà aquella per a la qual, situant-nos a la cara de S determinada per $\mathbf{N}$ (la “cara superior”), cada corba C_i es recorri de manera que la superfície quedi sempre a mà esquerra.
- ▶ Recíprocament, una orientació ∂S^+ de la vora determina una orientació compatible S^+ de la superfície.
- ▶ Donat un camp vectorial $\mathbf{F}$, escriurem:

$$\oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \sum_{i=1}^m \oint_{C_i^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle$$

Teorema de Stokes (o del rotacional 3D)

Considerem a $\mathbb{R}^3$ una superfície orientada S^+ , amb la seva vora ∂S^+ orientada de manera compatible.

$\mathbf{F}$ camp vectorial definit a S (de classe $\mathcal{C}^1$).

Aleshores,

$$\oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_{S^+} \langle \text{rot } \mathbf{F}, d\vec{S} \rangle$$

- *Obs. 1:* si el camp $\mathbf{F}$ és irrotacional ($\text{rot } \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$), deduïm que $\oint_{C^+} \langle \mathbf{F}, d\vec{\ell} \rangle = 0$ per a qualsevol corba tancada C que sigui vora d'una superfície continguda al domini de $\mathbf{F}$.
- *Obs. 2:* En el cas particular d'un camp vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ i una superfície donada per un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ sobre el pla $z = 0$ (orientat per $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$), obtenim el teorema de Green.

● Càlcul d'un flux a partir d'un potencial vector

- ▶ El teorema de Stokes ens permet calcular una circulació a partir d'un flux. Ara ens preguntem si és possible el procés invers: calcular el flux d'un camp vectorial $\mathbf{G}$ a través d'una superfície orientada S^+ , com una circulació al llarg de la seva vora ∂S^+ .
- ▶ *Def.:* Un camp $\mathbf{G}$ definit a $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ prové d'un potencial vector si $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{H}$ per algun camp vectorial $\mathbf{H}$ (definit a tot $\mathcal{U}$), que rep el nom de potencial vector (si existeix, no és únic ja que podem sumar-hi qualsevol camp irrotacional).
- ▶ Si $\mathbf{G}$ té un potencial vector $\mathbf{H}$, pel teorema de Stokes podem escriure:
$$\int_{S^+} \langle \mathbf{G}, d\vec{S} \rangle = \oint_{\partial S^+} \langle \mathbf{H}, d\vec{\ell} \rangle.$$
- ▶ No tot camp vectorial $\mathbf{G}$ admet un potencial vector: una *condició necessària* és que $\mathbf{G}$ sigui solenoidal ($\text{div } \mathbf{G} \equiv 0$), com a conseqüència de la identitat $\text{div}(\text{rot } \mathbf{H}) \equiv 0$ (si $\mathbf{H}$ és $\mathcal{C}^2$).
- ▶ Exemple:
Un camp vectorial constant $\mathbf{G} \equiv \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ té com a potencial vector $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{G} \wedge \mathbf{r} = \frac{1}{2}(v_2 z - v_3 y, v_3 x - v_1 z, v_1 y - v_2 x)$.