

ÚS DE L'Octave/Matlab COM A CALCULADORA CIENTÍFICA

[capítol 1 del llibre]

1. Accés a Octave i Matlab

- Coneixerem Octave i Matlab, que són dos paquets de càlcul científic i anàlisi de dades, molt usats en enginyeria.
 - Octave és programari lliure (es pot instal·lar i usar lliurement)
 - Matlab és un paquet comercial (requereix llicència)

En aquestes pràctiques, podrem usar indistintament Octave o Matlab.

- Informació sobre les pràctiques:
 - * Atenea (*Taller de Matemàtiques*): calendari i aules, exàmens, normativa
 - * web Taller: <http://www.ma1.upc.edu/~taller/>
 - Llibre de Joaquim Puig, “*Taller de Matemàtiques: pràctiques en Matlab/Octave*”
 - Instal·lació d'Octave
 - * aules amb PC's lliures: <http://www.etseib.upc.edu/disponibilitat/disponibilitat.html>

2. Inici i canvi de directori

- Per entrar al programa,
 - càrrega de Windows 7
 - Ctrl+Alt+Supr
 - *username@est* / *password*
 - Inici → Tots els programes → Progr. Docència → Mat. Apl. I → Geometria → Octave (o Matlab)
- En Matlab s'obre una finestra amb 5 parts: ens fixarem principalment en la del centre, anomenada consola o línia d'ordres (>>). En Octave, s'obre una única finestra amb la línia d'ordres.
- Per defecte, ens trobem en un directori temporal, en el qual tenim permís d'escriptura. Si cal, podem canviar de directori.
 - `pwd` (comprovar directori)
 - `dir` (fitxers del directori)
 - `cd C:\nou_directori` (canvi de directori)
- Sortir del programa: `quit` (o `exit`)

3. Càlcul d'expressions numèriques

- Exemples: $2 + 2$, $\frac{3}{\left(1 + \frac{5}{13}\right)^2}$, $\frac{3}{1 + \frac{5}{13^2}}$.
- Podem recuperar instruccions anteriors amb $\boxed{\uparrow}$ (si primer escrivim una mica, recuperem instruccions anteriors que comencen amb allò que hem escrit).

- És important tenir en compte la jerarquia d'operacions: $\boxed{\wedge}$ $\boxed{* /}$ $\boxed{+ -}$

Per trencar aquesta jerarquia, usarem parèntesis.

Si concatenem dues operacions amb la mateixa jerarquia, s'executen en l'ordre en què apareixen escrites:

Exemple: $3/7*8$ ens dona $\frac{3}{7} \cdot 8$, en canvi $3/(7*8)$ (o bé $3/7/8$) ens dona $\frac{3}{7 \cdot 8}$.

Exemple: $5^3 \cdot 2$ ens dona $(5^3)^2$, en canvi $5^3 \cdot 2$ ens dona 5^{3^2} .

- els decimals s'expressen amb un punt (.)
- Notació exponencial per a nombres molt grans: $1.5e6$ ens dona $1.5 \cdot 10^6 = 1\,500\,000$; o molt petits: $3e-6$ ens dona $3 \cdot 10^{-6} = 0.000\,003$.
- `format short` (per defecte, mostra 4 decimals)
`format long` (mostra 16 decimals): l'usarem habitualment
- El valor numèric de π ens ve donat per la constant interna `pi`.
Per obtenir el nombre e , podem escriure `exp(1)`.
- Funcions incorporades: `sqrt()`, `abs()`, `exp()`, `log()`, `log10()`, `sin()`, `cos()`, `tan()`,
`asin()`, `acos()`, `atan()`, `sinh()`, `cosh()`, ...

Exemple: calculem $\cos(\sqrt{7\pi} + \ln(3 \arcsin(e^{-2})))$

- Podem obtenir informació d'alguna funció: `help asin`; o de qualsevol altra instrucció: `help format`.

4. Assignació de variables

- Podem assignar variables, per guardar valors que després usarem en altres càlculs:

`a=expressió` (mostra el resultat)

`a=expressió;` (no mostra el resultat, útil amb resultats vectorials o per a càlculs intermedis)

Exemple: Donats els valors $a = -7$ i $b = 3$, calculem $z = a + e^{c-a} \cos(b + \ln c)$ essent $c = \frac{a^2}{b^4 + 1}$. Després, ho calculem amb els valors $a = 5$ i $b = -2$.

- `clear a` (neteja la variable `a`)
`clear all` (neteja totes les variables)

5. Precisió de càlcul, missatges d'error

- Internament, els càlculs es realitzen amb precisió alta, però limitada, és a dir, considerant un cert nombre de xifres significatives. Ho podem conèixer amb la constant interna `eps`, que ens dona la diferència més petita possible (en termes relatius) entre dos nombres. Per exemple, el resultat de $1+1e-16$ és 1. Observem també el resultat de la diferència: $10\,000\,000\,000\,000\,001 - 10\,000\,000\,000\,000\,000$.
- Les constants internes `realmax` i `realmin` ens donen el nombre més gran i el més petit que podem considerar (en termes absoluts).
- Si intentem càlculs com $1/0$, $0/0$, $\log(0)$ obtenim missatges d'error: `Inf`, `NaN`.

6. Nombres complexos

- Certs càlculs, com `sqrt(-2)`, ens donen com a resultat nombres complexos, que s'expressen en la forma `a+b*i`.
- Per operar amb nombres complexos, les funcions `abs()`, `angle()`, `real()`, `imag()`, `conj()` ens donen, respectivament, el mòdul, l'argument, les parts real i imaginària, i el conjugat d'un nombre complex.
Com a exemple, apliquem aquestes funcions al nombre $3 + 2i$.

1. Vectors

- $v=[4,1,6,7,1]$ un vector fila (també: $v=[4 \ 1 \ 6 \ 7 \ 1]$)
 $w=[4;3;3;-2;-1]$ un vector columna
 De fet, podem considerar els vectors com a matrius, d'una sola fila o columna respectivament.
- Podem accedir a un terme concret, posant el seu índex entre parèntesis:
 per exemple $v(3)$, o també $w(4)$.
 Obtindrem un missatge d'error si demanem un terme inexistent: $v(0)$, $w(7)$.
- Operacions com a espai vectorial: suma i producte per escalar.
 Per exemple, definint també $u=[3,2,-5,1,-3]$, podem calcular $v+u$ i també $5*v$.
 Obtindrem missatges d'error si intentem sumar vectors de diferents dimensions, o un vector fila amb un vector columna; per exemple, si definim $z=[-1,3,0]$ i intentem fer $v+z$ o bé $v*w$.
- Podem convertir un vector fila en un vector columna, o al revés, fent v'
- Producte escalar: $\text{dot}(v,u)$
 Producte vectorial: $\text{cross}(v,u)$, si els vectors tenen dimensió 3
- Operacions “terme a terme”: $\boxed{.*}$ $\boxed{./}$ $\boxed{.^}$
 Exemples: $v.*u$, $v./u$, $1./v$, $v.^2$
 També podem aplicar qualsevol funció a tots els termes d'un vector, per exemple $\text{sqrt}(v)$, $\text{cos}(v)$.
- Altres funcions sobre vectors:
 - $\text{length}()$ dimensió d'un vector
 - $\text{sort}()$ ordena un vector en ordre creixent
 - $\text{sum}()$ suma de tots els termes
 - $\text{prod}()$ producte de tots els termes
 - $\text{cumsum}()$ sumes acumulades
 - $\text{cumprod}()$ productes acumulats
- Rangs de valors: ens seran molt útils per a la representació gràfica de funcions.
 La forma general és $v=\text{inici}:\text{increment}:\text{final}$ i ens dona el vector format pels termes inici , $\text{inici}+\text{increment}$, $\text{inici}+2*\text{increment}$, ... mentre siguin $\leq \text{final}$.
 Per exemple, $v=0:0.1:2$ (equival a $v=[0, 0.1, 0.2, \dots, 1.9, 2]$).
 L'increment pot ser negatiu: $v=2:-0.1:0$
 L'increment és 1 si no l'especifiquem: $v=3:50$ (equival a $v=3:1:50$).

2. Matrius

- Una matriu 4×5 :
 $A=[-1,-2,-6,-9,4; \ 9,1,4,4,-5; \ 7,-7,-5,4,1; \ -3,9,-7,3,-6]$
- Podem accedir a un terme concret, una fila o columna, o una “submatriu”:
 - $c=A(2,3)$ (un terme)
 - $v=A(3,:)$ (la 3^a fila)
 - $w=A(:,4)$ (la 4^a columna)
 - $B=A(2:3,1:4)$ (submatriu)
 - $D=A(:,3:4)$ (submatriu formada per algunes columnes)
 També podem modificar una matriu, redefinint-ne algun terme, fila, columna o submatriu (les dimensions han de ser coherents):
 - $A(3,1)=3$
 - $A(2,:)=[3,7,0,7,-2]$
 - $A(3:4,4:5)=[1,1; \ 1,1]$
- Podem ampliar una matriu afegint-li files o columnes:
 - $u=[-4;1;7;5]$ (columna que volem afegir)
 - $Aamp=[A,u]$ (matriu ampliada)

3. Operacions amb matrius

- Dimensions d'una matriu: `size(A)`
- Suma i producte per escalar: igual que en el cas de vectors.
- Transposada: A' (o també `transpose(A)`), s'intercanvien files i columnes
- Producte de matriu per vector:
`v=[-3;5;-8;6;5]` vector columna
`A*v` (el nombre de columnes de `A` ha de coincidir amb la dimensió de `v`)
- Producte matricial i potències:
`A*B` (el nombre de columnes de `A` ha de coincidir amb el nombre de files de `B`)
`A^3` (la matriu `A` ha de ser quadrada)
- Determinant i inversa d'una matriu quadrada: `det(A)`, `inv(A)`.
- Divisió matricial:
`A/B` divisió per la dreta ($A B^{-1}$),
`B\A` divisió per l'esquerra ($B^{-1}A$).
- Operacions "terme a terme": igual que en el cas de vectors.

4. Matrius especials

`eye(n)` matriu identitat
`diag(v)` matriu diagonal, amb la diagonal principal formada pel vector `v`
`diag(v,±k)` matriu amb una diagonal secundària formada pel vector `v`
`blkdiag(A,B,...)` matriu diagonal per blocs, a partir de les matrius `A`, `B`, ...
`zeros(n,m)`
`ones(n,m)`
`rand(n,m)` matriu de termes aleatoris, escollits a l'interval $(0, 1)$

* **Exercicis:** 5.1, 5.3 i 5.4 (pàg. 83–84 del llibre).

POLINOMIS

[capítol 2 del llibre]

1. Polinomis com a vectors, i les seves arrels

- Representem un polinomi com un vector que conté els seus coeficients, en ordre decreixent de grau:
`p=[1,0,0,0,0,3,0,-1]` correspon al polinomi $p(x) = x^7 + 3x^2 - 1$.
- Avaluació d'un polinomi, en un punt x o en els termes d'un vector o rang de valors:
`polyval(p,0.5)` ens dóna el valor de $p(0.5)$,
`polyval(p,0:0.1:2)` avalua el polinomi p en $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 2$.
- Arrels d'un polinomi:
`r=roots(p)` crea un vector columna `r`, amb una aproximació numèrica de les arrels reals i complexes de $p(x)$.
En alguns casos l'aproximació numèrica que s'obté és poc precisa, com veiem per exemple amb el polinomi $q(x) = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1 = (x + 1)^7$, que hauria de tenir $x = -1$ com a arrel de multiplicitat 7.

2. Operacions amb polinomis

- Per sumar dos polinomis, si són del mateix grau sumarem directament els vectors que els representen. Però si són de diferents graus, haurem d'afegir zeros a les primeres posicions d'un dels vectors perquè siguin de la mateixa dimensió:

```
p=[1,0,0,0,0,3,0,-1] (grau 7)
q=[1,2,1,0] (grau 3)
suma=p+[zeros(1,4),q]
```

- El producte de polinomis s'efectua a través d'una operació amb els seus coeficients anomenada convolució:
`prod=conv(p,q)`
- Divisió entera de dos polinomis: $p(x) = u(x)q(x) + r(x)$, amb $\text{gr } r(x) < \text{gr } q(x)$.
`u=deconv(p,q)` (obtenim només el quocient $u(x)$)
`[u,r]=deconv(p,q)` (obtenim el quocient $u(x)$ i la resta $r(x)$)

3. Derivació i integració de polinomis

- `polyder(p)` coeficients de la derivada $p'(x)$;
`polyint(p)` coeficients de la primitiva $F(x) = \int p(x)dx$ que compleix $F(0) = 0$.
- Descomposició en fraccions simples: donats $p(x)$ i $q(x)$ amb $\text{gr } p(x) < \text{gr } q(x)$, escrivint
`[c,z]=residue(p,q)`
obtenim un vector **c** amb els numeradors de la descomposició, i un altre vector **z** amb les arrels del denominador (repetides si són múltiples). En el cas d'arrels complexes conjugades, obtenim una fracció (complexa) per a cada arrel.

* Exercicis

- 2.1 i 2.4 (pàg. 38–39 del llibre).
- Calculeu la integral definida $\int_{-2}^3 p(x)^2 dx$ per al polinomi $p(x) = 4x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 1$.

SISTEMES LINEALS, VALORS I VECTORS PROPIS

[capítols 6 i 10 del llibre]

1. Resolució de sistemes quadrats invertibles

- Volem resoldre el sistema $Ax = b$, on A és una matriu $n \times n$ invertible, i b és un vector columna de n components. Per exemple, considerem

```
A=vander(1:4) (matriu de Vandermonde associada als nombres 1,2,3,4),
b=rand(4,1) (un vector columna qualsevol).
```

Per resoldre el sistema, escriurem:

```
x=A\b
```

També podríem calcular la solució escrivint `x=inv(A)*b`, però això comportarà molt més temps de càlcul si la dimensió de la matriu A és gran, ja que per a resoldre el sistema no és necessari calcular tota la matriu inversa A^{-1} .

- Si la matriu A és no invertible ($\det A = 0$), en intentar resoldre el sistema $Ax = b$ apareixerà un missatge d'error, però en Octave obtindrem igualment un resultat. Si el sistema es compatible ($b \in \text{Im } A$) obtindrem una de les infinites solucions, i si és incompatible ($b \notin \text{Im } A$) la solució obtinguda no serà vàlida (de fet, s'intenta minimitzar $\|Ax - b\|$).
Exemple: `A=[1,2; 2,4]`, provem de resoldre el sistema amb `b=[3;6]` i amb `b=[3;7]`.

2. Imatge i nucli d'una matriu

- Considerem per exemple la matriu 3×5 ,
 $A = [1, 0, 1, 0, 3; 1, 0, 3, 6, 7; 2, 0, 4, 6, 10]$
Escrivint `rank(A)` podem deduir la dimensió de la imatge i el nucli de A :
 $\dim \text{Im } A = \text{rang } A = 2, \quad \dim \text{Nuc } A = 5 - \text{rang } A = 3.$
- Per obtenir una base del nucli de A , escrivim
`nucliA=null(A)`
que ens dóna una matriu 5×3 , les columnes de la qual formen una base del nucli de A . Podem comprovar que el producte $A * \text{nucliA}$ és 0, o molt petit.
- Per obtenir una base de la imatge de A , podem usar una funció que ens dóna la forma esglaonada reduïda de la matriu:
`[R,col]=rref(A)`
i aprofitar que `col` és un vector que conté els índexs de columnes independents. Així, escrivint
`imatgeA=A(:,col)`
obtenim com a columnes una base de la imatge de A .

3. Discussió de sistemes lineals

- Donat un sistema $Ax = b$, on la matriu A és $m \times n$, considerem la matriu ampliada $\bar{A}$, que té el vector b com a columna addicional. Aleshores:
 - si $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n$, el sistema és compatible determinat (una única solució);
 - si $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < n$, el sistema és compatible indeterminat (infinites solucions);
 - si $\text{rang } A < \text{rang } \bar{A}$, el sistema és incompatible (no existeix solució).
- Ho podem discutir definint la matriu ampliada $A_{\text{amp}} = [A, b]$ i calculant `rank(A)` i `rank(Aamp)`.
Per trobar la solució, quan $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = n = m$ podem aplicar directament $x = A \backslash b$.
En altres casos, podem usar la forma esglaonada reduïda de la matriu ampliada:
`Ramp=rref(Aamp)`
la qual és la matriu ampliada d'un sistema $Rx = c$, que té les mateixes solucions que l'original, les quals ara es poden trobar de manera immediata.

4. Valors i vectors propis

- Donada una matriu A , de dimensions $n \times n$ (quadrada), un vector v és vector propi de valor propi λ si $Av = \lambda v$. Els valors propis són les arrels del polinomi característic $p(x) = \det(xI - A)$ (de grau n).
- Per calcular els valors propis (*eigenvalues*) de la matriu A , podem fer
`vaps=eig(A)`
i obtenim un vector columna format pels valors propis (reals o complexos, i repetits si són múltiples).
- L'espai propi (els vectors propis) d'un valor propi λ donat ve donat pel nucli de la matriu $\lambda I - A$,
`lambda=vaps(j)` (triem un valor propi)
`esppropi=null(lambda*eye(n)-A)`
- De fet, amb la mateixa funció `eig()` podem trobar vectors propis per a tots els valors propis,
`[veps,diagvaps]=eig(A)`
que ens dóna els valors propis en una matriu diagonal, i una altra matriu amb els vectors propis com a columnes. Es compleix que les matrius $A * \text{veps}$ i $\text{veps} * \text{diagvaps}$ són (quasi) iguals.
- La matriu A és diagonalitzable si té una base de vectors propis. En cas contrari, alguns dels vectors propis trobats a la matriu `veps` apareixeran repetits. Per esbrinar-ho, podem calcular `rank(veps)` i si és màxim ($= n$) llavors A és diagonalitzable, i en cas contrari ($< n$) no ho és.
- Altres funcions:
 - `poly(A)` (dóna el polinomi característic de A , que té com a arrels els valors propis)
 - `compan(p)` (per a un polinomi $p(x)$, donat pel vector dels seus coeficients, dóna una matriu de forma especial que té com a valors propis les arrels del polinomi)

* **Exercicis:** 6.1, 6.2, 6.3 (pàg. 101 del llibre), 10.1 i 10.2 (pàg. 140 del llibre).

Pràctiques (ÀLGEBRA LINEAL)

1. Aplicació lineal en un espai de polinomis

Considerem, sobre l'espai vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ dels polinomis de grau $\leq n$, l'aplicació $f : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ definida per

$$f(p(x)) = x p'(x) + (x^2 - 1) p''(x) + p(1).$$

Aquesta és una aplicació lineal, i ens proposem trobar la seva matriu en la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formada pels monomis $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$.

- (a) Editem una funció `sumapolinomi.m` per dur a terme la suma de dos polinomis. Recordem que un polinomi de grau n es guarda en Octave/Matlab com un vector de dimensió $n + 1$, que conté els seus coeficients. Dos polinomis només es podran sumar directament si són del mateix grau, però si són de graus diferents haurem d'afegir zeros al davant d'un d'ells per igualar-ne les dimensions.

```
function suma=sumapolinomi(p,q)
n=length(p); m=length(q);
if n<m
    p=[zeros(1,m-n),p];
elseif n>m
    q=[zeros(1,n-m),q];
end
suma=p+q;
```

- (b) Editeu una funció `Imf.m` per a calcular la imatge d'un polinomi $p(x)$, per l'aplicació f .

```
function imatge=Imf(p)
(...)
```

Comprovem el resultat d'aplicar la funció f als monomis x^3, x^2, x i 1 .

- (c) Editeu una funció `Matriuf.m` que, donat n , ens retorni la matriu A de l'aplicació f , en la base $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$. Aquesta matriu és $(n + 1) \times (n + 1)$.

Per a $k = 1, \dots, n + 1$, la columna k -èsima de la matriu A ha de contenir els coeficients de la imatge del polinomi x^{n-k+1} , en forma de vector columna. Com que aquesta columna ha de tenir $n + 1$ termes, afegirem un nombre adequat de zeros a les primeres posicions.

```
function A=Matriuf(n)
for k=1:n+1
    monomi=[1,zeros(1,n-k+1)];
    imatge=(imatge del monomi  $x^{n-k+1}$ );
    A(:,k)=(... afegim a imatge els zeros que falten)
end
```

- (d) Fixeu un valor de n (per exemple $n = 7$). Trobeu la matriu A , i mostreu que existeix un únic polinomi mònic $p(x)$, de grau exactament n , tal que $f(p(x)) = \lambda p(x)$, per algun $\lambda \in \mathbb{R}$. Quin és el polinomi $p(x)$ i quin és el valor de λ ?

2. Polinomis de Legendre

Els polinomis de Legendre venen definits per la recurrència següent:

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1, \\P_1(x) &= x, \\P_k(x) &= \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x), \quad k \geq 2.\end{aligned}$$

- (a) Editeu una funció `leg.m` que calculi el vector de coeficients del polinomi de Legendre $P_n(x)$ per a un n donat. A cada iteració, calculeu el polinomi a partir dels dos anteriors, que guardem en variables `ultim` i `penultim`, i reassignem aquestes variables per a la iteració següent. Per sumar polinomis, usarem la funció `sumapolinomi.m` ja descrita.

```
function p=leg(n)
ultim=[1,0];
penultim=1;
for k=2:n
    p=(càlcul de  $P_k(x)$  a partir de ultim i penultim);
    (reassignació de penultim i ultim)
end
```

- (b) Calculeu els polinomis de Legendre $P_n(x)$, per a $n = 2, 3, 4, 5, 6$, i les seves arrels. Observeu que cada $P_n(x)$ és de grau n , i que totes les arrels són reals i contingudes a l'interval $(-1, 1)$.

Feu simultàniament la gràfica dels polinomis anteriors, a l'interval $[-1, 1]$. Observeu les propietats següents:

- es compleix que $|P_n(x)| \leq 1$ sempre que $|x| \leq 1$ (gràfiques contingudes a la finestra $[-1, 1] \times [-1, 1]$);
- el polinomi $P_n(x)$ és funció parella si n és parell, i és funció senar si n és senar;
- valors als extrems: $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_n(1) = 1$;
- arrels entrelaçades: entre cada dues arrels de $P_n(x)$ hi ha una única arrel de $P_{n+1}(x)$.