

Problemes de MÈTODES QUALITATIUS I QUANTITATIUS EN SISTEMES DINÀMICS

1 Formes normals hamiltonianes

1.1. Sigui $\Phi(\cdot, \varepsilon) = (\Phi^{(1)}(\cdot, \varepsilon), \dots, \Phi^{(2n)}(\cdot, \varepsilon))$ la transformació simplèctica associada al hamiltonià generador no autònom $W(x, \varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} W_{m+1}(x)$. Trobeu els desenvolupaments $\Phi^{(j)}(x, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} \Phi_m^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, 2n$, fins a ordre $m = 2$.

1.2. Considereu una transformació simplèctica $(Q, P) = \Phi(q, p, \varepsilon)$ generada de 2 maneres diferents: com a flux temps ε d'un hamiltonià no autònom $W(q, p, \varepsilon)$, i a partir d'una funció generatriu $S(q, P, \varepsilon) = \langle q, P \rangle + \varepsilon S_1(q, P, \varepsilon)$. Proveu que es compleix la relació següent entre W i S_1 (consulteu [Gia72, p. 37]):

$$W\left(q, P + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, P, \varepsilon)\right) = S_1(q, P, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varepsilon}(q, P, \varepsilon) + f(\varepsilon),$$

essent $f(\varepsilon)$ qualsevol funció (independent de q, P).

1.3. Donat un hamiltonià no autònom $W(x, \tau)$, considereu $\widehat{W}(x, s) = \varepsilon^3 W\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon s\right)$ i proveu que els seus fluxos a temps $\tau = \varepsilon$ i $s = 1$ respectivament, venen relacionats per $\widehat{\varphi}_{0,s}(x) = \varepsilon \varphi_{0,\varepsilon s}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

1.4. Considereu un hamiltonià $H(q, p)$ amb 2 graus de llibertat, amb un punt d'equilibri a l'origen i part quadràtica $H_0(q, p) = \gamma(q_1 p_1 + q_2 p_2) + \delta(q_2 p_1 - q_1 p_2)$, la qual té com a exponents característics $\pm\gamma \pm i\delta$ (*sella complexa*).

- Trobeu el canvi lineal (complex) que passa a la forma $H_0(x, y) = (\gamma + i\delta)x_1 y_1 + (\gamma - i\delta)x_2 y_2$, i doneu les condicions perquè un punt (x, y) sigui “real” (és a dir, correspongui a un (q, p) real), i perquè una funció $F(x, y) = \sum f_{k,l} x^k y^l$ sigui “real” (és a dir, sobre punts “reals” prengui valors reals).
- Per a la part quadràtica H_0 , trobeu dues integrals primeres “reals” i independents de H_0 . Expressen-les en funció de (q, p) i doneu-ne una interpretació.
- Plantegeu l'equació homològica associada a H_0 i estudieu la seva resolució. Hi ha petits divisors? Com són els termes de la forma normal en funció de (q, p) ?

1.5. Considerem un hamiltonià $H(q, p)$ amb 1 grau de llibertat, amb un punt d'equilibri a l'origen, i suposem que la part quadràtica ve donada per $H_0(q, p) = p^2/2$ (observeu que la matriu $B = J D^2 H(0, 0)$ no és diagonalitzable). Estudieu quin tipus de forma normal es pot obtenir per al hamiltonià H .

Ind.: estudieu la solució de l'equació homològica.

1.6. Donat un hamiltonià $H = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m H_m$, doneu una estimació del nombre de parèntesis de Poisson

necessaris per a calcular la seva forma normal fins a ordre N , és a dir, $H^{(N)} = \sum_{m=0}^N \varepsilon^m \Gamma_m +$

$\sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon^m R_m^{(N)}$, i digueu també quants d'aquests parèntesis són del tipus $\{\Gamma_m, F\}$ (els quals es calculen més ràpidament), si fem servir:

- (a) triangle de Lie (un únic hamiltonià generador no autònom),
- (b) algorisme lineal (N hamiltonians generadors autònoms, d'ordres $1, 2, 3, \dots, N$),
- (c) algorisme quadràtic (M hamiltonians generadors autònoms, d'ordres $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{M-1}$, si $N = 2^M - 1$).

2 Aplicacions de les formes normals: punts d'equilibri, estabilitat efectiva, teoria KAM

- 2.1. Considereu l'equació de Duffing $\ddot{q} = -q - \gamma q^3$, on γ és un paràmetre, i escriviu-la com un hamiltonià $H(q, p)$. Trobeu la seva forma normal en un entorn de l'origen, fins a grau 6 en (q, p) . Vegeu com deduir-ne una aproximació del període de l'òrbita periòdica que passa per un punt $(\alpha, 0)$, per a valors de α petits.
- 2.2. Sigui H un hamiltonià amb un punt d'equilibri a l'origen, amb part quadràtica de la forma $H_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$, on el vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és no ressonant. Proveu que si F_1 i F_2 són integrals primeres, amb parts quadràtiques $F_{l,0} = \sum_{j=1}^n \beta_{l,j} x_j y_j$, $l = 1, 2$, llavors $\{F_1, F_2\} \equiv 0$ (consulteu [Ito89]).
- 2.3. Sigui $H = \sum_{j=1}^n H_m$ amb $H_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$, amb $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ no ressonant. Si la transformació a forma normal de Birkhoff $(x, y) = \Phi(\xi, \eta)$ és convergent, llavors tota integral primera de H es pot escriure com una sèrie de potències en $\rho_1, \dots, \rho_n$, essent $\rho_j = x_j y_j$ (consulteu [SM71, §30]).
- 2.4. Mostreu amb un exemple que la forma normal de Gustavson d'un hamiltonià, en un entorn de l'origen, pot no ésser única.
Ind.: en 2 graus de llibertat, trobeu dos hamiltonians en forma normal de Gustavson respecte el mateix mòdul, relacionats per una transformació simplèctica propera a la identitat.
- 2.5. Sigui H un hamiltonià amb l'origen com a punt d'equilibri el·líptic, amb part quadràtica $H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \omega_j (q_j^2 + p_j^2)$. Sigui Γ forma normal de Gustavson, respecte el mòdul de ressonàncies $\mathcal{M}_\omega = \{k \in \mathbf{Z}^n : \langle k, \omega \rangle = 0\}$. Suposem que es compleix: $\langle k, \omega \rangle \neq 0$ per a tot $k \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}$ amb $k_1, \dots, k_n \geq 0$.
- (a) Proveu que existeix algun vector $\beta \in \mathbf{R}^n$, $\beta_1, \dots, \beta_n > 0$, tal que $\langle k, \beta \rangle = 0$ per a tot $k \in \mathcal{M}_\omega$.
 - (b) Suposant que la transformació a la forma normal Γ és convergent, deduiu que l'origen és un punt d'equilibri estable de H .
Nota: En el cas divergent es pot parlar de “quasi-estabilitat”, ja que no és possible detectar la inestabilitat coneixent el hamiltonià fins a un ordre finit (vegeu [Mos58a]).
- 2.6. Sigui H un hamiltonià en un entorn d'un punt d'equilibri, amb part quadràtica $H_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j y_j$. Suposem que (λ_1, λ_2) és no ressonant i que, a més, es satisfà la condició de no ressonància $\lambda_j \neq k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$ per a tot $3 \leq j \leq n$, i $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.
- (a) Proveu que existeix una transformació simplèctica formal $(x, y) = \Phi(\xi, \eta)$, amb $\Phi = \text{id} + \mathcal{O}_2$, tal que $H \circ \Phi = Z(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) + R(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, amb $R = \mathcal{O}_2(\xi_3, \dots, \xi_n, \eta_3, \dots, \eta_n)$.

- (b) Suposant que la transformació simplèctica de (a) és convergent, deduiu que H té una superfície invariant 4-dimensional que a l'origen és tangent al pla $\xi_3 = \dots = \xi_n = \eta_3 = \dots = \eta_n = 0$, i que la restricció de H sobre aquesta superfície és un hamiltonià integrable (de 2 graus de llibertat).

Nota: Només es pot garantir la convergència de la transformació de (a) si (λ_1, λ_2) corresponen a una sella-centre o una sella complexa (vegeu [Gio01]).

- 2.7. Donades constants $\tau > 1$, $\gamma > 0$, definim els conjunts $\tilde{\Omega}(\tau) = \{\alpha \in \mathbf{R} : (\alpha, 1) \in \Omega(\tau)\}$, $\tilde{\Omega}(\tau, \gamma) = \{\alpha \in \mathbf{R} : (\alpha, 1) \in \Omega(\tau, \gamma)\}$. Proveu que $\tilde{\Omega}(\tau) = \Delta(\tau)$. Esbrineu si es satisfan incusions del tipus $\Delta(\tau, \gamma) \subset \tilde{\Omega}(\tau, \gamma) \subset \Delta(\tau, \gamma')$ i, si això és cert, trobeu la relació entre γ i γ' .
- 2.8. Proveu que el vector $\omega = (\alpha, 1)$, essent $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ (*nombre d'or*), és diofàntic amb exponent $\tau = 1$.
- 2.9. Proveu que el vector $\omega = (\sqrt{2}, 1)$ és diofàntic amb exponent $\tau = 1$.
- 2.10. Mostreu amb un exemple que l'equació homològica $\left\langle \omega, \frac{\partial W}{\partial \phi} \right\rangle = F$, amb $\omega \in \mathbf{R}^2$ no ressonant i F analítica sobre $\mathbf{T}^2$ i de mitjana nul·la, pot no tenir solució analítica sobre $\mathbf{T}^2$ (podeu consultar [SM71, §36]).
- 2.11. Donada una funció $h(I)$, $I \in G \subset \mathbf{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^2$, tal que ∇h no s'anul·la sobre G , considereu el següent determinant $(n+1) \times (n+1)$:

$$\Delta(I) = \det \begin{pmatrix} D^2 h(I) & \nabla h(I) \\ \nabla h(I)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si $n = 2$, proveu que h és quasiconvexa sobre G si i només si $\Delta(I) \neq 0$ per a tot $I \in G$ (és a dir, si $\omega(I) = \nabla h(I)$ satisfà la condició d'Arnold o isoenergètica).
- (b) Si $n = 3$, proveu que h és quasiconvexa sobre G si i només si $\Delta(I) < 0$ per a tot $I \in G$ (vegeu [LM88, ap. 9]).
- 2.12. Condidereu el hamiltonià quasi-integrable $H = h(I) + \varepsilon f(\phi, I)$, essent $h(I) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2^2)$, $f(\phi, I) = \sin(\phi_1 - \phi_2)$.
- (a) Proveu que $h(I)$ és una funció quasiconvexa a tot $\mathbf{R}^2$, excepte sobre les rectes $I_1 = \pm I_2$.
- (b) Proveu que $F = I_1 + I_2$ és integral primera de H per a tot ε , i trobeu les trajectòries $(\phi_1(t), \phi_2(t), I_1(t), I_2(t))$ per a qualsevol condició inicial $(\phi_1^0, \phi_2^0, I_1^0, I_2^0)$.
- (c) Verifiqueu que les fites del teorema de Nekhoroshev són vàlides sobre qualsevol domini compacte que no contingui $I_1 = \pm I_2$, i que no són vàlides sobre aquestes rectes.
- 2.13. Donat un hamiltonià H , amb 3 graus de llibertat, amb l'origen com a punt d'equilibri el·líptic, suposem que n'hem calculat una forma normal de Gustavson $H = \Gamma + R$, amb Γ en forma normal respecte el mòdul $\mathcal{M} = \langle (1, 0, -1) \rangle$, i que hem obtingut una fita molt petita per a R . Vegeu com deduir un resultat d'estabilitat efectiva per a l'origen.

Ind.: passant a variables acció-angle, trobeu combinacions de la forma $F = \sum_{j=1}^3 \beta_j I_j$ que siguin “quasi-integrals primeres” i permetin fitar $I_1(t)$, $j = 1, 2, 3$ (podeu consultar [GDF⁺89]).

- 2.14. Trobeu un exemple de hamiltonià quasi-integrable $H = h(I) + \varepsilon f(\phi, I)$, $(\phi, I) \in \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$, tal que l'aplicació freqüència $\omega(I) = \nabla h(I)$ satisfà la condició d'Arnold o isoenergètica, però els tors invariants no tenen, si $\varepsilon \neq 0$, el mateix vector de freqüències que els de $h(I)$.
- 2.15. Donat un hamiltonià integrable $h(I)$, considereu l'aplicació freqüència

$$\omega(I) = \nabla h(I) = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I)),$$

amb $\omega_n(I^0) \neq 0$, i sigui $I_n = g(\hat{I})$ la funció implícita definida per l'equació $h(I) - h(I^0) = 0$, en un entorn del punt I^0 . Definint

$$\Omega(\hat{I}) = \frac{\hat{\omega}(\hat{I}, g(\hat{I}))}{\omega_n(\hat{I}, g(\hat{I}))},$$

proveu que $\omega(I)$ satisfà la condició d'Arnold o isoenergètica si i només si $\Omega(\hat{I})$ té jacobià no nul en tots els punts.

Notació: $\hat{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ per a qualsevol vector $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$.