Transformada Discreta de Fourier

Lali Barrière

Octubre 2011

1 DFT y FFT

Una señal discreta $\{x_n\}_{0\leq n\leq N}$, se puede representar como combinación de funciones exponenciales complejas con periodo N:

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\mathrm{j}\frac{2\pi nk}{N}},\ \text{para } 0 \leq n \leq N-1.$$

El conjunto de coeficientes $\{X_k\}_{0\leq k\leq N-1}$ es la transformada discreta de Fourier de la señal discreta $\{x_n\}_{0\leq n\leq N}$. Estos coeficientes se pueden calcular a partir de la expresión:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi nk}{N}},\ \text{para } 0 \leq k \leq N-1.$$

El algoritmo que permite calcular el espectro de la señal se llama FFT (*Fast Fourier Transform*). Es una versión optimizada (y, por lo tanto, más complicada) de la DFT (*Discrete Fourier Transform*).

2 DFT y espectro de una señal discreta

Suponemos :

- Frecuencia de muestreo: F_m. Por lo tanto, una muestra cada $t = \dfrac{1}{F_m}$ segundos.
- Para cada n, $x_n = x(t \cdot n)$. Es decir, x_n es el valor de amplitud de la señal en el instante $t \cdot n$.

La transformada discreta de Fourier nos permite expresar la señal de N puntos en términos de N frecuencias (parciales). Al aplicar la DFT al conjunto $\{x_n\}_{0\leq n\leq N}$, para obtener los coeficientes $\{X_k\}_{0\leq k\leq N-1}$. Se cumplirá:

- Hemos analizado N muestras de audio, y hemos obtenido N valores de frecuencia y fase, es decir, el espectro de la señal.
- Cada coeficiente nos da los valores de amplitud correspondientes al parcial de frecuencia de una banda del espectro de frecuencias de ancho $f = \dfrac{F_m}{N}$.
- Combinando los coeficientes X_k y X_{N-k} obtenemos los valores de amplitud A_k y fase Φ_k del parcial de frecuencia $f_k = f \cdot k$.

3 Transformación inversa

Si se conocen los coeficientes $\{X_k\}_{0\leq k\leq N-1}$, se puede reconstruir la señal discreta $\{x_n\}_{0\leq n\leq N}$.

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi nk}{N}},\ \text{para } 0 \leq n \leq N-1.$$

Esta expresión se llama IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) y tiene también una versión optimizada, la IFFT.

4 Convolución

Si $x = \{x_n\}_{0\leq n\leq N}$ y $h = \{h_n\}_{0\leq n\leq N}$ son dos señales discretas, la convolución de x y h se define como:

$$(x * h)_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot h_{n-k}$$

con $0 \leq n \leq N$, y suponiendo las señales x y h cíclicas.

Propiedades

- La convolución de señales (ondas) es equivalente a la multiplicación de espectros, es decir, si $y = x * h$, entonces:

  $$Y[n] = X[n] \cdot H[n]$$

  Esta propiedad permite calcular la convolución entre dos ondas en tres pasos: (1) calcular el espectro de las ondas, mediante la FFT, (2) multiplicar los espectros, y (3) calcular la onda correspondiente al producto de espectros, mediante la IFFT.

- La convolución espectral es equivalente a la multiplicación de señales.

- Algunos efectos, como la reverberación, se pueden implementar mediante la operación de convolución.