# Serie de Fourier

Lali Barrière

Octubre 2011

## 1 Introducción

- Representamos una onda sonora por una función del tiempo

$$t \to s(t).$$

- Una función es periódica, con periodo $T$ si se cumple

$$s(t) = s(t + T)$$

para cualquier valor de $t$, y la igualdad anterior no se cumple con valores más pequeños de $T$.
**Observación** Una función periódica con periodo $T$ cumple

$$s(t) = s(t + T) = s(t + 2T) = s(t + 3T) = \ldots$$

- Una sinusoide es una función que se puede expresar como un seno, con una determinada amplitud, frecuencia y fase:

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi)$$

**Observación 1** En esta igualdad, $A$ es la amplitud, $\omega$ es la frecuencia angular y $\Phi$ es la fase. La frecuencia en ciclos por segundo es $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

**Observación 2** El periodo es $T = \dfrac{1}{f}$. El periodo también se llama longitud de onda.

**Observación 3** Las sinusoides son las funciones oscilatorias más simples.

Representación gráfica de una sinusoide: `http://es.wikipedia.org/wiki/Sinusoide`
Ejemplo de longitud de onda: `http://www.phys.unsw.edu.au/jw/fluteacoustics.html`

## 2 Teorema de Fourier

Cualquier función periódica, con periodo $T$, se puede representar como suma de sinusoides de frecuencias $f$, $2f$, $3f$,..., llamadas *armónicos*. (La relación entre el periodo y la frecuencia es $f = \dfrac{1}{T}$.)

**Observación** Los armónicos también se suelen llamar *parciales*. De hecho, los parciales son componentes frecuenciales de una onda no necesariamente periódica. Por lo tanto, el término *parcial* es más general que el término *armónico*.

## 2.1 Serie de Fourier trigonométrica

Si $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica con periodo $T$, la serie de Fourier de $s$ es

$$s(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n\geq 1} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos\frac{2\pi n t}{T}\,dt \qquad \left(\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^T s(t)\,dt\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin\frac{2\pi n t}{T}\,dt.$$

Estos coeficientes se pueden calcular integrando entre $-T/2$ i $T/2$ o, en general, entre $t_0$ i $t_0 + T$, con $t_0$ un valor real cualquiera.

**Observación** En las ondas sonoras, $a_0 = 0$.

## 2.2 Expresiones alternativas de la serie de Fourier

- La frecuencia angular fundamental es $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

  La frecuencia angular del armónico $n$-ésimo es $n\omega_0 = \dfrac{2\pi n}{T}$

  La serie se puede escribir

  $$s(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n\geq 1} b_n \sin n\omega_0 t$$

- Si $t$ es el tiempo en segundos, la frecuencia fundamental en $Hz$ es $f_0 = \dfrac{1}{T}$.

  La frecuencia en $Hz$ del armónico $n$-ésimo es $f_n = nf_0 = \dfrac{n}{T}$.

  La serie se puede escribir

  $$s(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos 2\pi n f_0 t + \sum_{n\geq 1} b_n \sin 2\pi n f_0 t$$

## 2.3 Forma amplitud-fase de la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n\geq 1} b_n \sin n\omega_0 t = A_0 + \sum_{n\geq 1} A_n \cos(n\omega_0 t + \Phi_n)$$

- $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$ (En las ondas sonoras $A_0 = 0$.)
- Amplitud: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Fase: $\Phi_n = \arctan \dfrac{a_n}{b_n}$

**Observación** La forma amplitud-fase de la serie de Fourier se deduce de la fórmula trigonométrica:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Por lo tanto, la expresión amplitud-fase de la onda $t \to s(t)$ es:

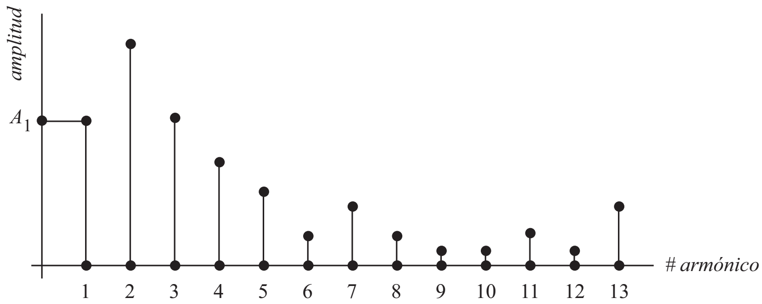
$$\boxed{s(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \Phi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \Phi_2) + A_3 \cos(3\omega_0 t + \Phi_3) + A_4 \cos(4\omega_0 t + \Phi_4) + \dots}$$

## 2.4 Espectro

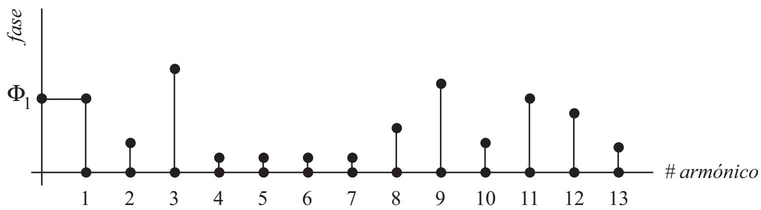
Sabiendo que la frecuencia fundamental de una onda $s(t)$ es $\omega$, únicamente se requieren los valores de amplitud y fase de cada uno de los parciales para reconstruir la onda. El conjunto de estos valores se llama *espectro*.

$$\{(A_1, \Phi_1), (A_2, \Phi_2), (A_3, \Phi_3), \dots\}$$

- **Espectro de amplitud** Representación frecuencia-amplitud.



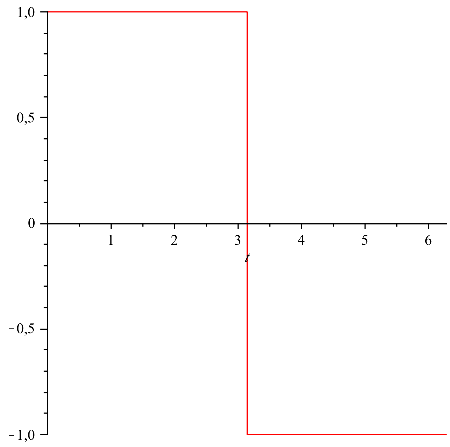

- **Espectro de fase** Representación frecuencia-fase.



# 3 Ejemplo: la onda cuadrada

La onda cuadrada de periodo $2\pi$ es la función definida por

$$s(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \le t < \pi; \\ -1, \text{ si } \pi \le t < 2\pi; \\ \text{extendida con periodo } 2\pi. \end{cases}$$

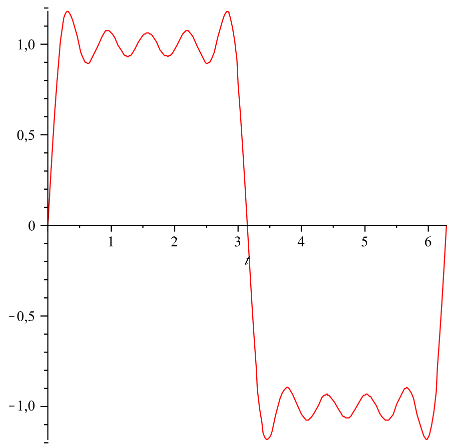



Los coeficientes de Fourier de esta función son

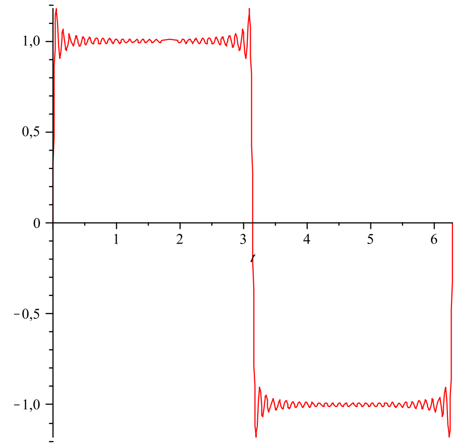
$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin nt\, dt + \int_{0}^{\pi} \sin nt\, dt\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, \text{ si } n \text{ es impar;} \\ 0, \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

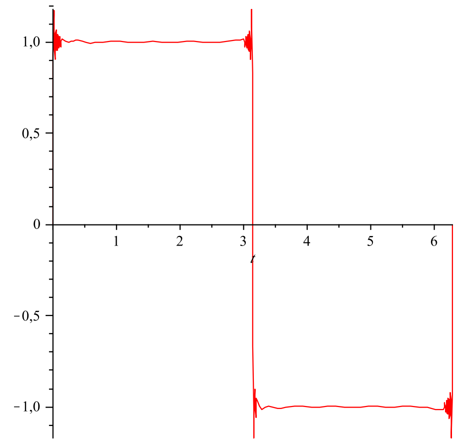
La suma de los primeros 8 parciales es



La suma de los primers 60 parciales es




La suma de los primeros 200 parciales es




Todos los parciales tienen fase 0. Si desfasamos el parcial $n = 5$ en $\dfrac{\pi}{2}$, es decir, en la serie trigonométrica, $a_5 = b_5$ i $b_5 = 0$, obtenemos: