

EDOs i sistemes d'EDOs lineals

Sistemes d'EDOs lineals de primer ordre

1. (a) Sigui $A(t)$ una matriu $n \times n$ dependent de t i sigui $\lambda(t)$ un valor propi de $A(t)$ que compleix la propietat que admet un vector propi $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que no depèn de t . Això és, v compleix la relació $A(t)v = \lambda(t)v$. Llavors, demostreu que

$$X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} v,$$

és una solució del sistema d'EDOs lineals homogeni $X' = A(t)X$.

- (b) Trobeu la solució general del sistema d'EDOs següents:

i. $X' = t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X$.

ii. $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} X$, si $t > 0$.

iii. $X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix} X$, si $t > 0$.

iv. $X' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

v. $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$.

◁ **Solució.** (a) És una comprovació directa. En efecte, si $X(t) = e^{\int \lambda(t) dt} v$, derivant:

$$X'(t) = \lambda(t) e^{\int \lambda(t) dt} v = e^{\int \lambda(t) dt} \lambda(t) v \underset{A(t)v = \lambda(t)v}{=} e^{\int \lambda(t) dt} A(t) v = A(t) e^{\int \lambda(t) dt} v = A(t) X(t)$$

on, com s'assenyala, tenim en compte al segon pas que $\lambda = \lambda(t)$ és un VAP de la matriu $A(t)$ i v és un VEP associat, i.e., que: $A(t)v = \lambda(t)v$.

(b)-i. En aquest cas, la matriu del sistema $X' = A(t)X$, és:

$$A(t) = t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & -t \\ 4t & -3t \end{pmatrix} \quad (1)$$

té per polinomi característic

$$p_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_2) \lambda^2 + t\lambda - 2t^2 = (\lambda + 2t)(\lambda - t), \quad (2)$$

on denotem per $I_n = \text{diag}[1, 1, \dots, 1] \in M_n(\mathbb{R})$ la matriu identitat $n \times n$ (en aquest cas $n = 2$). Els VAPs vénen donats per les arrels de (2), i són en aquest cas:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = -2t, \quad \lambda_2 = \lambda_2(t) = t.$$

Remarca 1.1. Quan la matriu A és 2×2 , el polinomi característic ve donat per la fórmula:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A), \quad (3)$$

on $\text{Tr}(A)$ i $\det(A)$ són, respectivament, la traça i el determinant de A .

Per buscar els VEPs associats, calculem:

- Per $\lambda_1 = \lambda_1(t) = -2t$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t)I_2) = \text{Nuc}(A(t) + 2tI_2) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 4t & -t \\ 4t & -t \end{pmatrix} = \langle (1, 4)^\top \rangle.$$

- Idènticament, per $\lambda_2 = \lambda_2(t) = t$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \text{Nuc}(A(t) - tI_2) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} t & -t \\ 4t & -4t \end{pmatrix} = \langle (1, 1)^\top \rangle.$$

Així doncs, els VAPs i els VEPs trobats per la matriu (1) són els que es mostren a la taula 1. Tanmateix, veiem que cap dels dos VEPs depenen de t i aleshores del resultat de l'apartat (a) es deriven les dues solucions següents:

VAPs	VEPs	$X_1 = X_1(t) = e^{\int \lambda_1(t) dt} v_1 = e^{-\int 2t dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$	(4)
$\lambda_1(t) = -2t$	$v_1 = (1, 4)^\top$	$X_2 = X_2(t) = e^{\int \lambda_2(t) dt} v_2 = e^{\int t dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{t^2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	(5)

Taula 1

definides per a $t \in I = \mathbb{R}$. A més, aquestes solucions són linealment independents (d'ara endavant, \underline{li}), ja que la corresponent solució matricial (i. e., la matriu que té per columnes les solucions $X_1 = X_1(t)$ i $X_2 = X_2(t)$ donades per (4) i (5) respectivament), $\Phi = \Phi(t)$, és

$$\Phi(t) := (X_1(t)|X_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & e^{t^2/2} \\ 4e^{-t^2} & e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \quad \text{tenim: } \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^{-t^2} & e^{t^2/2} \\ 4e^{-t^2} & e^{t^2/2} \end{vmatrix} = -3e^{-t^2/2} < 0$$

i per tant $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Notem que en virtut del següent resultat:

Proposció 1.2. Si $X_1 = X_1(t), X_2 = X_2(t), \dots, X_n = X_n(t)$ són n solucions del sistema lineal homogeni $X' = A(t)X$, definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, i $\Phi(t) := (X_1(t)|X_2(t)|\dots|X_n(t))$ és la corresponent solució matricial, llavors:

$$X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t) \text{ són } \underline{li} \text{ en } I \Leftrightarrow \det \Phi(t) \neq 0, \text{ per a tot } t \in I \Leftrightarrow \exists t_0 \in I \text{ t.q.: } \det \Phi(t_0) \neq 0,$$

En aquest cas, direm que les solucions $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ formen un conjunt fonamental de solucions, CFS, i la solució matricial, $\Phi(t)$, s'anomena solució matricial fonamental o matriu fonamental.

és suficient comprovar que $\det \Phi(t_0) \neq 0$ per a algun $t_0 \in I$ ($= \mathbb{R}$ en aquest cas); per exemple, per a $t_0 = 0$, tenim $\det \Phi(0) = -3 \neq 0$.

Finalment, la solució general del sistema és combinació lineal (cl) d'aquestes dues solucions. Així:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{t^2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per a $t \in I = \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). Aquesta solució es pot expressar en forma matricial, fent servir la matriu fonamental $\Phi = \Phi(t)$, i. e.:

$$X(t) = \Phi(t)c = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & e^{t^2/2} \\ 4e^{-t^2} & e^{t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t^2} + c_2 e^{t^2/2} \\ 4c_1 e^{-t^2} + c_2 e^{t^2/2} \end{pmatrix},$$

per a $t \in I = \mathbb{R}$ i $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-ii. A partir de la matriu del sistema,

$$A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & 3/t \\ -2/t & -4/t \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad (6)$$

busquem el polinomi característic (veure remarca 1.1):

$$p_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_2) = \lambda^2 - \text{Tr } A(t)\lambda + \det A(t) = \lambda^2 + \frac{3}{t}\lambda + \frac{2}{t^2} = \left(\lambda + \frac{1}{t}\right) \left(\lambda + \frac{2}{t}\right)$$

i les seves arrels; d'on tenim que els VAPs són, per aquest sistema:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = -\frac{1}{t}, \quad \lambda_2 = \lambda_2(t) = -\frac{2}{t}.$$

Per trobar els VEPs associats, calculem els vectors que generen $\text{Nuc}(A(t) - \lambda_i(t)I_2)$ per $i = 1, 2$. Això dóna:

- Per $\lambda_1 = \lambda_1(t) = -1/t$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t)I_2) = \text{Nuc}\left(A(t) + \frac{1}{t}I_2\right) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 2/t & 3/t \\ -2/t & -3/t \end{pmatrix} = \left\langle (3, -2)^\top \right\rangle.$$

- Per $\lambda_2 = \lambda_2(t) = -2/t$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \text{Nuc}\left(A(t) + \frac{2}{t}I_2\right) = \text{Nuc}\begin{pmatrix} 3/t & 3/t \\ -2/t & -2/t \end{pmatrix} = \left\langle (1, -1)^\top \right\rangle.$$

Els VAPs de la matriu (6) i els seus VEPs associats són els que es relacionen a la taula 2. Com que cap dels dos VEPs depenen de t , podem calcular dues solucions del sistema a partir dels resultats de l'apartat (a). En concret, per a $t > 0$ tenim les solucions:

VAPs	VEPs
$\lambda_1(t) = -1/t$	$v_1 = (3, -2)^\top$
$\lambda_2(t) = -2/t$	$v_2 = (1, -1)^\top$

Taula 2

$$X_1 = X_1(t) = e^{\int \lambda_1(t) dt} v_1 = e^{-\int dt/t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = e^{-\ln t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$X_2 = X_2(t) = e^{\int \lambda_2(t) dt} v_2 = e^{-\int 2dt/t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-2\ln t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A més aquestes solucions són *li* en $I = (0, +\infty)$. En efecte, si construïm una solució matricial, $\Phi = \Phi(t)$, amb les solucions $X_1(t)$ i $X_2(t)$ donades per (7) i (8), i. e., la matriu

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

definida per a $t \in I = (0, +\infty)$; veiem que el seu el determinant és

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{t^3} < 0,$$

amb la qual cosa $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t > 0$ (equivalentment, $\Phi(t)$ està definida per a tot $t > 0$ i, per exemple, $\det \Phi(1) = -1 \neq 0$, veure proposició 1.2), i llavors (9) defineix una matriu fonamental. La solució general s'obté com cl del CFS obtingut:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3/t \\ -2/t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). En notació matricial, podem escriure la solució a partir de la matriu fonamental, $\Phi = \Phi(t)$, com:

$$X(t) = \Phi(t)c = \begin{pmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1/t + c_2/t^2 \\ -2c_1/t - c_2/t^2 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-iii. La matriu $A(t)$ del sistema és, en aquest apartat:

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

definida per a $t > 0$. El seu polinomi característic ve donat per,

$$\begin{aligned} p_{A(t)}(t) &= \det(A(t) - \lambda I_2) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \\ &= \lambda^2 - (\ln t + 1)\lambda + \frac{1}{4}((\ln t + 1)^2 - (\ln t - 1)^2) = \lambda^2 - (\ln t + 1)\lambda + \ln t = (\lambda - \ln t)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

(veure remarca 1.1) i les seves arrels donen els VAPs, que són:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_2(t) = \ln t$$

per a $t > 0$. Pel càlcul dels VEPs associats, fem

- Per $\lambda_1(1) = 1$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t)I_2) = \text{Nuc}(A(t) - I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} \frac{\ln t - 1}{2} & \frac{\ln t - 1}{2} \\ \frac{\ln t - 1}{2} & \frac{\ln t - 1}{2} \end{pmatrix} = \langle (1, -1)^\top \rangle.$$

- Per $\lambda_2(t) = \ln t$:

$$\text{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \text{Nuc}(A(t) - \ln t I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} \frac{1 - \ln t}{2} & \frac{\ln t - 1}{2} \\ \frac{\ln t - 1}{2} & \frac{1 - \ln t}{2} \end{pmatrix} = \langle (1, 1)^\top \rangle.$$

D'aquesta manera els VAPs i els VEPs associats de la matriu (10) són els que apareixen a la taula 3; a partir dels quals —usant els resultats de l'apartat (a)— es deriven les solucions $X_1 = X_1(t)$ i $X_2 = X_2(t)$ donades per (11) i (12) respectivament, i. e.,

VAPs	VEPs		(11)
$\lambda_1(t) = 1$	$v_1 = (1, -1)^\top$	$X_1 = X_1(t) = e^{\int \lambda_1(t) dt} v_1 = e^{\int dt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$	
$\lambda_2(t) = \ln t$	$v_2 = (1, 1)^\top$	$X_2 = X_2(t) = e^{\int \lambda_2(t) dt} v_2 = e^{\int \ln t dt} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{t \ln t - t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$	(12)

Taula 3

Aquestes dues solucions formen un CFS definit en l'interval $I = (0, +\infty)$, ja que si considerem la corresponent solució matricial

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{t \ln t - t} \\ -e^t & e^{t \ln t - t} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

el seu determinant és

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{t \ln t - t} \\ -e^t & e^{t \ln t - t} \end{vmatrix} = 2e^{t \ln t} > 0$$

i aleshores $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t \in I = (0, +\infty)$. En particular (13) és una matriu fonamental, amb la qual cosa la solució general del sistema $X' = A(t)X$ —amb $A(t)$ donada per (10)— s'escriu doncs com *cl* de les dues solucions *li* obtingudes $X_1(t)$ i $X_2(t)$, i. e.:

$$X(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t \ln t - t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). Alternativament, utilitzant la matriu fonamental (13), també podem expressar la solució general com

$$X(t) = \Phi(t)c = \begin{pmatrix} e^t & e^{t \ln t - t} \\ -e^t & e^{t \ln t - t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{t \ln t - t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{t \ln t - t} \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-iv. El sistema és no homogeni amb terme independent $b(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sabem que la solució general, $X(t)$, ve donada per la suma $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$, on $X_h(t)$ és la solució general del sistema homogeni associat, i. e.:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X \quad (14)$$

i $X_p(t)$ és una solució qualsevol, que anomenarem *solució particular*, del sistema no homogeni (veure proposició 1.5 més avall). A més, en aquest cas, la matriu del sistema (14) no depèn de t (i. e., els seus coeficients són constants), per tant, per calcular la solució general, $X_h(t)$, de (14), podem fer servir els resultats següents:

Proposició 1.3. Si $v \in \mathbb{R}^n$ és un VEP de la matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, associat al VAP $\lambda \in \mathbb{R}$, i. e.: $Av = \lambda v$; aleshores $X(t) = e^{\lambda t} v$ és solució del sistema $X' = AX$, definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostració: $X^t(t) = e^{\lambda t} v$ està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i del resultat de l'apartat (a) és dedueix que és solució del sistema homogeni. \square

Proposició 1.4. Si $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ són una base de \mathbb{R}^n formada per VEPs de la matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, essent $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ els corresponents VAPs (és a dir: $Av_i = \lambda_i v_i$, per $i = 1, 2, \dots, n$); aleshores:

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, X_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, X_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

formen un CFS (i. e., n solucions *li*) del sistema $X' = AX$, definides per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Demostració: Per la proposició 1.3, cadascuna de les $X_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$, són solució del sistema $X' = AX$, definides per a tot $t \in \mathbb{R}$. D'altra banda, la solució matricial

$$\Phi(t) = (X_1(t)|X_2(t)|\dots|X_n(t)) = (e^{\lambda_1 t} v_1 | e^{\lambda_2 t} v_2 | \dots | e^{\lambda_n t} v_n)$$

verifica, per a $t = 0$:

$$\det \Phi(0) = \det(X_1(0)|X_2(0)|\dots|X_n(0)) = \det(v_1|v_2|\dots|v_n) \neq 0$$

atès que v_1, v_2, \dots, v_n formen una base de \mathbb{R}^n (i per tant són n vectors *li*). Aleshores, de la proposició 1.2 tenim que

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, X_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, X_n(t) = e^{\lambda_n t} v_n$$

formen un CFS del sistema $X' = AX$. \square

Els VAPs de la matriu A són les arrels del seu polinomi característic:

$$p_A(t) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1), \quad \text{arrels: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

on, com la matriu A és 2×2 , fem servir la fórmula (3) (fórmula “traça-determinant”) que apareix a la remarca 1.1. Es comprova que $v_1 = (3, 2)^\top$ i $v_2 = (1, 1)^\top$ són VEPs associats als VAPs $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$ respectivament. En efecte:

- Per $\lambda_1 = 1$: $\text{Nuc}(A - \lambda_1 I_2) = \text{Nuc}(A - I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \langle (3, 2)^\top \rangle$.
- Per $\lambda_2 = 0$: $\text{Nuc}(A - \lambda_2 I_2) = \text{Nuc}(A - 0I) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1, 1)^\top \rangle$.

D'acord amb la proposició 1.4,

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definides per a tot $t \in \mathbb{R}$, formen un CFS del sistema (14). La matriu fonamental corresponent a aquestes solucions és:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$. Per calcular $X_p = X_p(t)$, la solució particular del sistema no homogeni, utilitzarem la fórmula de variació de les constants:

Proposició 1.5 (Variació de les constants). *Donat el sistema lineal:*

$$X' = A(t)X + b(t) \quad (16)$$

amb $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínues, essent $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, sigui:

$$X' = A(t)X \quad (17)$$

el sistema homogeni associat. Aleshores:

(1) Si $\Phi = \Phi(t)$, $t \in I$ és una matriu fonamental de (17). És a dir, si $\Phi(t)$ satisfà:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

per a tot $t \in I$, llavors:

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt \quad (18)$$

és una solució particular del sistema lineal no homogeni (16) definida per a tot $t \in I$. La fórmula (18) es coneix com fórmula de variació de les constants o fórmula de variació dels paràmetres.

(2) La solució general de (16), $X = X(t)$, ve donada per la suma

$$X(t) = X_h(t) + X_{nh}(t),$$

on $X_h = X_h(t)$ és la de la solució general del sistema homogeni (17), i. e.:

$$X_h(t) = \Phi(t)c,$$

$t \in I$, amb $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ arbitrari (lliure), mentre que $X_{nh} = X_{nh}(t)$ és una solució qualsevol del sistema no homogeni (16). Per exemple, podem agafar $X_{nh} = X_p(t)$, i llavors la solució general de (16) s'escriu com:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt, \quad (19)$$

$t \in I$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ arbitrari (lliure).

(3) Donats $t_0 \in I$ i $X_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds, \quad (20)$$

$t \in I$, és (l'única!) solució del sistema (16) que satisfà la condició inicial (ci) $X(t_0) = X_0$, (i. e., (20) és l'única solució del PVI donat pel sistema (16) i la ci $X(t_0) = X_0$, amb $t_0 \in I$).

Demostració. (1) Es comprova directament derivant. En efecte:

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= \Phi'(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)\Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt + b(t) = A(t)X_p(t) + b(t) \end{aligned}$$

per a tot $t \in I$; i llavors $X_p = X_p(t)$, $t \in I$, donada per (18) és solució del sistema no homogeni (16). (3) és una comprovació directa del mateix tipus, mentre que la unicitat és segueix del teorema d'existència i unicitat per sistemes lineals. Finalment, (2) es dedueix de (3) (es deixen els detalls al lector). \square

Remarca 1.6. La integral

$$\int \Phi^{-1}(t)b(t) dt,$$

que apareix en (18) denota una primitiva qualsevol. En particular es pot fer servir una funció integral. Així per exemple, per a $t_0 \in I$ arbitrari, la fórmula de variació dels paràmetres es pot escriure com

$$X_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds, \quad (21)$$

$t \in I$. En particular, notem que aquesta solució satisfà $X_p(t_0) = 0$.

Aplicant la fórmula de variació de les constants (18) al cas que ens ocupa; és a dir, amb la matriu fonamental $\Phi = \Phi(t)$ i amb el terme independent, $b = b(t)$, donats respectivament per:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

obtenim com solució particular,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix} \int e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2e^t & 3e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 5e^{-t} \\ -11 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5e^{-t} \\ -11t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 - 11t \\ -10 - 11t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarca 1.7. Per invertir matrius 2×2 , $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ (ó $M_2(\mathbb{C})$), resulta útil la fórmula:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Finalment, la solució general $X = X(t)$ s'obté afegint la solució general de l'homogènia $X_h(t) = \Phi(t)c$. Així:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & 1 \\ 2e^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 - 11t \\ -10 - 11t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1e^t + c_2 - 15 - 11t \\ 2c_1e^t + c_2 - 10 - 11t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-v. De nou el sistema és no homogeni, amb el corresponent sistema homogeni associat $X' = AX$ a coeficients constants, amb la matriu A donada per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Per calcular els seus VAPs, busquem les arrels del polinomi característic:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

i per tant: $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Per calcular els VEPs, fem:

- Per $\lambda_1 = 1$: $\text{Nuc}(A - \lambda_1 I_2) = \text{Nuc}(A - I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \langle (2, 1)^\top \rangle \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ VEP.
- Per $\lambda_2 = 2$: $\text{Nuc}(A - \lambda_2 I_2) = \text{Nuc}(A - 2I_2) = \text{Nuc} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1, 1)^\top \rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ VEP.

Aleshores, segons la proposició 1.4,

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formen un CFS del sistema. A aquestes solucions li correspon la matriu fonamental següent:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix},$$

amb la qual podem trobar la solució particular $X_p = X_p(t)$ donada per la fórmula de variació de les constants (18):

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t) dt \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt = \Phi(t) \int e^{-3t} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 2 \\ -3e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalment, podem escriure la solució general del sistema no homogeni com

$$X(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4te^t + 3e^t \\ 2te^t + 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1e^t + c_2e^{2t} + 4te^t + 3e^t \\ c_1e^t + c_2e^{2t} + 2te^t + 3e^t \end{pmatrix}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (i. e., amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures). \triangleright

2. Trobeu la solució general dels següents sistemes d'EDO's lineals no homogenis pel mètode de variació de les constants, tot comprovant prèviament que la matriu $\Phi(t)$ donada en cada cas és una matriu fonamental del corresponent sistema homogeni.

Resoleu també el problema de valors inicials $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(a) \quad X' = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad X' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad X' = \frac{1}{1+e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix}.$$

\triangleleft **Solució.** (a) Comprovem primer que $\Phi(t)$ és una solució matricial del sistema homogeni associat. És a dir, que les seves columnes són solució de:

$$X' = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X. \quad (23)$$

En efecte, ja que:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(t)\Phi(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

i per tant $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, per a tot $t \in \mathbb{R}$. A més,

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$, i llavors (per la proposició 1.2), les columnes de $\Phi(t)$ són *li*. Aleshores $\Phi = \Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat (23).

Per trobar la solució particular del sistema no homogeni aplicarem la fórmula de variació de les constants (21) —remarca 1.6— amb $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$. Aleshores, la solució general del sistema no homogeni ve donada per:

$$X(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t - c_2 + t^2 \\ c_1 + c_2 t + t \end{pmatrix},$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

Per últim, la solució del PVI amb la *ci* $X(0) = (0, 0)^\top$ l'obtenim aplicant (20) amb $t_0 = 0$ i $X_0 = (0, 0)^\top$, i. e.:

$$\begin{aligned} X(t) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i veiem que, en aquest cas, òbviament coincideix amb la solució particular (24) prèviament obtinguda (veure remarca 1.6).

(b) D'una banda tenim que:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & -e^t \end{pmatrix}, \quad A(t)\Phi(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^t & 0 \\ 0 & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

i per tant, $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Les columnes són doncs solució del sistema homogeni associat, i a més són *li* en \mathbb{R} , perquè

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$ (vegeu proposició 1.2). Aleshores $\Phi = \Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat $X' = A(t)X$.

D'altra banda, per trobar una solució particular del sistema no homogeni, $X_p = X_p(t)$, fem servir la fórmula de variació de les constants (21) (remarca 1.6) amb $t_0 = 0$. Fent els càlculs, obtenim:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} & 1 \\ -1 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2s} \\ e^{-2s} \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^s + e^{-2s} \\ -e^{2s} + e^{-s} \end{pmatrix} ds \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t - e^{-2t}/2 - 1/2 \\ -e^{2t}/2 - e^{-t} + 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^t + e^{-t} - 3 \\ -3e^{-2t} + e^t + 3e^{-t} - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Ara, podem escriure la solució general com la suma de la del sistema homogeni associat, $X_h(t) = \Phi(t)c$, $c \in \mathbb{R}^2$ arbitrari, i la solució particular $X_p(t)$ que tot just hem obtingut, i. e.:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_h(t) + X_p(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 1 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^t + e^{-t} - 3 \\ -3e^{-2t} + e^t + 3e^{-t} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t - c_2 + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{3}{4} \\ c_1 + c_2 e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

per a $t \in \mathbb{R}$, $c = (c_1, c_2)^\top$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Finalment, per trobar la solució $X = X(t)$ que satisfà la *ci* $X(0) = (0, 0)^\top$, aplicariem la fórmula (20) amb $t_0 = 0$ i $X_0 = (0, 0)^\top$. En aquest cas però, com a l'apartat (a), es comprova d'immediat que coincideix amb la solució particular (25) trobada dalt, i. e.,

$$X(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^t + e^{-t} - 3 \\ -3e^{-2t} + e^t + 3e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Comprovem que $\Phi(t)$ és una solució matricial del sistema homogeni associat. Derivant d'una banda i substituint per l'altra s'obté:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{1+e^{2t}} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+e^{2t}} \begin{pmatrix} e^t(1+e^{2t}) & 0 \\ 0 & e^t(1+e^{2t}) \end{pmatrix}$$

i llavors $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$; és a dir, les columnes de $\Phi(t)$ són solució del sistema homogeni associat. A més,

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} + 1 \neq 0$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$; per tant, en virtut de la proposició 1.2, les columnes de $\Phi(t)$ són *li* en \mathbb{R} i llavors $\Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat.

A continuació calculem la solució particular donada per la fórmula (21), amb $t_0 = 0$; d'on resulta:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} e^s & 1 \\ -1 & e^s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \Phi(t) \int_0^t \frac{1}{1+e^{2s}} \begin{pmatrix} e^s & -1 \\ 1 & e^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds = \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ te^t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

$t \in \mathbb{R}$. La solució general es pot escriure doncs com la suma:

$$X(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 + t \\ -c_1 + c_2 e^t + te^t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$. Per últim, és evident que la solució particular (26) satisfà la *ci* $X(0) = (0, 0)^\top$, per tant és la solució (única) del PVI que es proposa a l'enunciat. \triangleright

EDOs lineals d'ordre n

3. Trobeu la solució general de les següents EDOs lineals no homogènies, sabent que en cada cas $y_1(t)$ és una solució de l'EDO homogènia associada. Useu el mètode de reducció de l'ordre per obtenir una segona solució independent i el mètode de variació de les constants per calcular una solució particular de l'EDO completa.

(a) $t^2 y'' - ty' + y = 4t \ln t$, $y_1(t) = t$, $t > 0$.

(b) $ty'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = t^2 + t$, $y_1(t) = e^t$, $t > 0$.

(c) $ty'' + 2y' + ty = t$, $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$, $t > 0$. (Indicació: $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t$.)

(d) $t^2 y'' + ty' + y = \frac{1}{\cos^3(\ln(t))}$, $y_1(t) = \cos(\ln(t))$, $t > 0$.

(e) $t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3$, $y_1(t) = t^2$, $t > 0$.

(f) $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}$, $y_1(t) = 1$.

(g) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2t}}{\cos t}$, $y_1(t) = e^{2t} \cos t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

\triangleleft **Solució.** (a) Enunciarem, sense demostrar-ho, el resultat següent, conegut com *mètode de reducció de l'ordre*:

Proposició 2.1 (Mètode de reducció de l'ordre). *Sigui l'EDO homogènia de 2^{on} ordre:*

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (1)$$

amb $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ funcions contínues definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Sigui $y_1 = y_1(t)$, $t \in I$, una solució no trivial (i. e., no idènticament igual a zero). Suposem a més que $a_2(t)$ i $y_1(t)$ no s'anul·len en I . Aleshores,

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt \quad (2)$$

és una segona solució de (1), *li* amb $y_1(t)$. Ens referirem a l'equació (2) com la *fórmula de reducció de l'ordre*.

Per l'EDO de l'apartat (a), tenim $a_0(t) = 1, a_1(t) = -t, a_2(t) = t^2$ i $y_1(t) = t$ és una solució particular de l'EDO homogènia associada. En efecte, derivant tenim $y_1'(t) = 1, y_1''(t) = 0$ i substituint després a l'EDO es veu que

$$t^2 y_1''(t) - t y_1'(t) + y_1(t) = -t + t = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$, en particular per a $t > 0$. Per obtenir una segona solució, $y_2 = y_2(t)$ *li* amb $y_1(t)$, apliquem (2),

$$y_2(t) = t \int \frac{1}{t^2} \exp\left(\int \frac{dt}{t}\right) dt = t \int \frac{1}{t^2} e^{\ln t} dt = t \int \frac{t}{t^2} dt = t \int \frac{dt}{t} = t \ln t,$$

per a $t > 0$. Sabem que la solució general de l'homogènia associada, $y_h = y_h(t)$, s'escriu com *cl* a coeficients constants (arbitraris) d'un CFS; per tant

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t \ln t, \quad (3)$$

definida per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

El mètode de *variació de les constants* o *mètode de variació dels paràmetres* ens permet obtenir una solució particular de l'EDO no homogènia. Aquest és el resultat que s'estableix a la proposició 2.2.

Proposició 2.2 (Mètode de variació de les constants). *Donada l'EDO lineal d'ordre n*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \quad (4)$$

on suposem:

(H1) $a_0, a_1, \dots, a_n, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínues, amb $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.

(H2) $a_n(t)$ no s'anul·la en cap punt de I .

Si coneixem un CFS: $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t)$, definit per a $t \in I$, de l'EDO homogènia associada a (4),

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (5)$$

Aleshores una solució particular, $y_p = y_p(t)$ de l'EDO no homogènia (4) ve donada per la cl:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \dots + u_n(t)y_n(t), \quad (6)$$

$t \in I$; on $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_n = u_n(t)$ són funcions de classe \mathcal{C}^1 en l'interval I , que satisfan el sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) & \dots & y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & y_3^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$t \in I$.

El sistema (7) es pot resoldre, per exemple pel mètode de Cramer, obtenint-se així les derivades $u_1'(t), u_2'(t), \dots, u_n'(t)$ per posteriorment primitivitzar i trobar cadascuna de les $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$. Finalment, la cl (6) ens dona una solució particular.

Pels exercicis d'aquesta secció, resultarà particularment útil disposar de fórmules explícites per EDOs de 2^{on} ordre, com les que es donen en el corollari 2.3.

Corollari 2.3 (Variació de les constants per EDOs lineals de 2^{on} ordre). *En el c. p. $n = 2$; i. e., per EDOs de 2^{on} ordre de la forma:*

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (8)$$

amb $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ i $f(t)$ satisfent les hipòtesis (H1) i (H2) de la proposició 2.2; és fàcil comprovar (exercici!) que:

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt \quad (9)$$

on $W(t)$ és el wronskià del CFS $y_1(t), y_2(t)$ donat, és a dir, el determinant

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix};$$

i llavors la solució pel mètode de variació de les constants resulta:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt \quad (10)$$

En aquest apartat, el CFS és: $y_1(t) = t, y_2(t) = t \ln t, t > 0$. Llavors,

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t \ln t \\ 1 & \ln t + 1 \end{vmatrix} = t$$

és el wronskià corresponent (notem que $W(t) = t \neq 0$ per a $t > 0$), mentre que $a_2(t) = t^2$ (com ja hem dit dalt) i el terme independent és $f(t) = 4t \ln t$. Aleshores tenim, segons (9):

$$u_1(t) = -4 \int \frac{(\ln t)^2}{t} dt = -\frac{4}{3}(\ln t)^3, \quad u_2(t) = 4 \int \frac{\ln t}{t} dt = 2(\ln t)^2;$$

amb la qual cosa, la solució particular donada per la fórmula de variació de les constants (10) és

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{4}{3}t(\ln t)^3 + 2t(\ln t)^3 = \frac{2}{3}t(\ln t)^3. \quad (11)$$

Finalment, la solució general de l'EDO completa la podem escriure com la solució general (3) de l'homogènia associada i la solució particular obtinguda (11) de l'EDO no homogènia. Això és:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 t + c_2 t \ln t + \frac{2}{3}t(\ln t)^3,$$

per a $t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

(b) Comparant coeficients amb (8) tenim que per l'EDO,

$$ty'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = t^2 + t, \quad (12)$$

és: $a_0(t) = t + 2, a_1(t) = -2(1+t), a_2(t) = t (\neq 0, \text{ en particular per a } t > 0)$ i $f(t) = t^2 + t$. Comprovem primer que $y_1(t) = e^t$ és una solució de l'homogènia associada:

$$ty_1''(t) - 2(1+t)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) = (t - 2(1+t) + t + 2)e^t = (t - 2 - 2t + t + 2)e^t = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. La segona solució *li* la trobem amb la fórmula (2):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt \\ &= e^t \int e^{-2t} \exp\left(\int \left(2 + \frac{2}{t}\right) dt\right) dt = e^t \int e^{-2t} e^{2t + \ln t^2} dt = e^t \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} e^t, \end{aligned}$$

per a $t > 0$. Nota: si $y_1(t), y_2(t)$ són un CFS, també ho són $y_1(t), \alpha y_2(t)$, per a qualsevol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Amb aquesta consideració present, agafarem com CFS de l'homogènia associada a l'EDO (12), les solucions

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t^3 e^t. \quad (13)$$

El seu wronskià resulta:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & t^3 e^t \\ e^t & 3t^2 e^t + t^3 e^t \end{vmatrix} = 3t^2 e^{2t} \neq 0,$$

per a tot $t \neq 0$, en particular per a $t > 0$. La solució general, $y_h = y_h(t)$ de l'EDO homogènia associada és *cl* del CFS (13):

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = (c_1 e^t + c_2 t^3) e^t, \quad (14)$$

$t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Per trobar la solució particular de (12) donada pel mètode de variació de les constants, calculem primer $u_1(t), u_2(t)$ tal com resulten de (9). En aquest cas, integrant per parts:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{1}{3} \int (t^2 + t)e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = t^2 + t \Rightarrow u'(t) = 2t + 1, \\ v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} (t^2 + t)e^{-t} - \frac{1}{3} \int (2t + 1)e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = 2t + 1 \Rightarrow u'(t) = 2, \\ v'(t) = e^{-t} \Rightarrow v(t) = -e^{-t} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} (t^2 + t)e^{-t} + \frac{1}{3} (2t + 1)e^{-t} - \frac{2}{3} \int e^{-t} dt = \frac{1}{3} (t^2 + t + 2t + 1 + 2)e^{-t} = \frac{1}{3} (t^2 + 3t + 3)e^{-t}, \\ u_2(t) &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right) e^{-t} dt = \frac{1}{3} \int \frac{e^{-t}}{t} dt + \frac{1}{3} \int \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = e^{-t} \Rightarrow u'(t) = -e^{-t}, \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{e^{-t}}{t} dt - \frac{e^{-t}}{3t} - \frac{1}{3} \int \frac{e^{-t}}{t} dt = -\frac{e^{-t}}{3t}, \end{aligned}$$

o a la segona suposem $t \neq 0$, per exemple $t > 0$. Així, la solució particular buscada (veure fórmula (10)) és:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \frac{1}{3}(t^2 + 3t + 3) - \frac{1}{3}t^2 = t + 1, \quad (15)$$

per a $t > 0$.

Remarca 2.4. Tot i que per poder aplicar la fórmula de reducció de l'ordre (2) i la fórmula de variació de les constants (10), hem suposat $t > 0$; tant les solucions (13) de l'homogènia com la solució particular (15) estan definides per a tot $t \in \mathbb{R}$, com es pot comprovar derivant i substituint a les EDOs corresponents (exercici!). A més $y_1(t) = e^t$ i $y_2(t) = t^3 e^t$ són *li* en \mathbb{R} en el sentit següent: si busquem una *cl* d'aquestes funcions amb coeficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants, que sigui idènticament zero per a tot $t \in \mathbb{R}$; llavors necessàriament $c_1 = c_2 = 0$. Dit d'altra manera:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \text{ per a tot } t \in \mathbb{R}, \text{ amb } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants} \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Exercici: comproveu que, efectivament, això és cert per les solucions de l'homogènia que hem calculat: $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t^3 e^t$; i aleshores (13) és un CFS de l'EDO homogènia per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Per concloure, la solució general de (12) l'escriurem com la suma de la solució general de l'homogènia (14) i la solució particular de l'EDO completa (15):

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 e^t + c_2 t^3 e^t + t + 1,$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ (vegeu la remarca 2.4 dalt) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(c) Comparant coeficients amb (8), per l'EDO

$$ty'' + 2y' + ty = t, \quad (16)$$

tenim que $a_0(t) = t, a_1(t) = 2, a_2(t) = t$, per tant $a_2(t) \neq 0$ per a $t > 0$ i el terme independent és $f(t) = t$. Comprovem primer que $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$, $t > 0$, és solució de l'EDO homogènia associada a (16). En efecte, derivant

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\frac{t \sin t + \cos t}{t^2}, \\ y_1''(t) &= \frac{t^2(-\sin t - t \cos t + \sin t) - 2t(-t \sin t - \cos t)}{t^4} = \frac{-t^3 \cos t + 2t^2 \sin t + 2t \cos t}{t^4} \end{aligned}$$

i després substituïnt en l'EDO, tenim:

$$\begin{aligned} ty_1''(t) + 2y_1'(t) + ty_1(t) &= \frac{1}{t^3} (2t^2 \sin t - t^3 \cos t + 2t \cos t) - \frac{2}{t^2} (t \sin t + \cos t) + \cos t \\ &= 2 \frac{\sin t}{t} - \cos t + 2 \frac{\cos t}{t^2} - 2 \frac{\sin t}{t} - 2 \frac{\cos t}{t^2} + \cos t = 0, \end{aligned}$$

per a tot $t > 0$. Si volem ara una segona solució de l'EDO homogènia associada

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad (17)$$

li amb $y_1(t)$, apliquem la fórmula de reducció de l'ordre (2):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt = \frac{\cos t}{t} \int \frac{1}{\frac{\cos^2 t}{t^2}} \exp\left(-\int \frac{2}{t} dt\right) dt \\ &= \frac{\cos t}{t} \int \frac{t^2 e^{-\ln t^2}}{\cos^2 t} dt = \frac{\cos t}{t} \int \frac{t^2}{\cos^2 t} \times \frac{dt}{t^2} = \frac{\cos t}{t} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{\cos t}{t} \tan t = \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

Tenim així un CFS de l'EDO (17) donat per:

$$y_1(t) = \frac{\cos t}{t}, \quad y_2(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (18)$$

i definit per a $t > 0$. El seu wronskià és:

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\cos t}{t} & \frac{\sin t}{t} \\ -\frac{t \sin t - \cos t}{t^2} & \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cos t}{t^3} (t \cos t - \sin t) + \frac{\sin t}{t^3} (t \sin t + \cos t) = \frac{1}{t^2} (\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{1}{t^2} \neq 0, \end{aligned}$$

per a $t > 0$. La solució general de l'EDO homogènia associada (17) és la *cl*:

$$y_h(t) = c_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t}, \quad (19)$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Per buscar la solució particular donada pel mètode de variació de les constants de l'EDO completa (16), calculem primer les funcions $u_1(t)$, $u_2(t)$ donades per les integrals (9) que, al igual que en l'apartat (b) també surten primitivitzant per parts:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = -\int t \sin t dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1, \\ v'(t) = -\sin t \Rightarrow v(t) = \cos t \end{array} \right\} = t \cos t - \int \cos t dt \\ &= t \cos t - \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int t \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1, \\ v'(t) = \cos t \Rightarrow v(t) = \sin t \end{array} \right\} = t \sin t + \int \sin t dt \\ &= t \sin t - \cos t. \end{aligned}$$

Ara, podem escriure la solució particular de l'EDO no homogènia formant la *cl* (10) amb el CFS (18) i les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ trobades dalt. És a dir:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = (t \cos t - \sin t) \frac{\cos t}{t} + (t \sin t - \cos t) \frac{\sin t}{t} = 1, \quad (20)$$

que és una solució constant, òbviament definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Finalment, la solució general de l'EDO no homogènia (16) s'obté com la suma de la solució (19) de l'homogènia associada i la solució particular de l'EDO completa (20), i. e.:

$$y(t) = c_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t} + 1,$$

per a $t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(d) En aquest cas, les funcions $a_0(t) = 1$, $a_1(t) = t$, $a_2(t) = t^2$ i el terme independent,

$$f(t) = \frac{1}{\cos^3(\ln t)}$$

estan definides i són contínues en qualsevol interval de la forma

$$I_k = \left[e^{-\pi/2+k\pi}, e^{\pi/2+k\pi} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (21)$$

on a més $a_2(t) = t^2$ no s'anul·la. La funció $y_1(t) = \cos(\ln(t))$, $t > 0$, és solució de l'EDO homogènia. En efecte, derivant tenim:

$$y_1'(t) = -\frac{\sin(\ln t)}{t}, \quad y_1''(t) = \frac{\sin(\ln t) - \cos(\ln t)}{t^2}$$

i substituint a continuació en l'EDO es comprova que:

$$t^2 y_1''(t) + t y_1'(t) + y_1(t) = \sin(\ln t) - \cos(\ln t) - \sin(\ln t) + \cos(\ln t) = 0,$$

per a tot $t > 0$. La fórmula de reducció de l'ordre (2) ens proporciona una segona solució l_2 de l'EDO homogènia associada:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt = \cos(\ln t) \int \frac{1}{\cos^2(\ln t)} \exp\left(-\int \frac{dt}{t}\right) dt \\ &= \cos(\ln t) \int \frac{dt}{t \cos^2(\ln t)} = \cos(\ln t) \tan(\ln t) = \sin(\ln t), \end{aligned}$$

definida per a $t > 0$. Tenim doncs el CFS de l'EDO homogènia associada següent:

$$y_1(t) = \cos(\ln t), \quad y_2(t) = \sin(\ln t) \quad (22)$$

amb la corresponent solució general:

$$y_h(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t), \quad (23)$$

per a $t > 0$.

Per obtenir la solució particular donada pel mètode de variació de les constants, calculem primer les integrals (9), on $W(t)$ és el wronskià del CFS (22),

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\ln t) & \sin(\ln t) \\ -\frac{\sin(\ln t)}{t} & \frac{\cos(\ln t)}{t} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln t)}{t} + \frac{\sin^2(\ln t)}{t} = \frac{1}{t} \neq 0$$

per a $t > 0$. Així:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = -\int \frac{\tan(\ln t)}{t \cos^2(\ln t)} dt = -\frac{1}{2} \tan^2(\ln t),$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{dt}{t \cos^2(\ln t)} = \tan(\ln t).$$

La solució particular de l'EDO completa s'obté per la cl (10). Aleshores:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \\ &= -\frac{1}{2} \tan^2(\ln t) \cos(\ln t) + \tan(\ln t) \sin(\ln t) = -\frac{\sin^2(\ln t)}{2 \cos(\ln t)} + \frac{\sin^2(\ln t)}{\cos(\ln t)} = \frac{\sin^2(\ln t)}{2 \cos(\ln t)} \end{aligned} \quad (24)$$

que està definida als intervals I_k amb $k \in \mathbb{Z}$ de la forma (21). La solució general de l'EDO no homogènia la donem com la suma de (23) —solució general de l'homogènia associada— i (24) —solució particular de l'EDO lineal completa:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t) + \frac{\sin^2(\ln t)}{2 \cos(\ln t)},$$

definida per a $t \in I_k, k \in \mathbb{Z}$, on I_k són els els intervals (21) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(e) Comparant coeficients amb (8), tenim per l'EDO lineal:

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3, \quad (25)$$

$t > 0$, és:

$$a_0(t) = 4, \quad a_1(t) = -3t, \quad a_2(t) = t^2, \quad f(t) = t^2.$$

A més, $a_2(t) = t^2$ no s'anul·la per a $t > 0$. Abans de calcular una segona solució de l'homogènia associada a (25), i.e., de l'EDO:

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad (26)$$

$t > 0$, comprovem que en efecte, $y_1(t) = t^2$, és solució. En efecte, derivant: $y_1'(t) = 2t$, $y_1''(t) = 2$ i substituint després en (26)

$$t^2 y_1''(t) - 3ty_1'(t) + 4y_1(t) = 2t^2 - 3t \times 2t + 4t^2 = 2t^2 - 6t^2 + 4t^2 = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. A continuació, mitjançant la fórmula (2):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt \\ &= t^2 \int \frac{1}{t^4} \exp\left(\int \frac{3}{t} dt\right) dt = t^2 \int \frac{e^{\ln t^3}}{t^4} dt = t^2 \int \frac{t^3}{t^4} dt = t^2 \int \frac{dt}{t} = t^2 \ln t, \end{aligned}$$

$t > 0$, obtenim una segona solució li amb $y_1(t)$ i aleshores,

$$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^2 \ln t \quad (27)$$

formen un CFS de l'EDO homogènia associada (26). El seu wronskià és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \ln t \\ 2t & 2t \ln t + t \end{vmatrix} = t^3 \neq 0,$$

per a $t > 0$; i la solució general de l'EDO homogènia (26) ve donada per la cl del CFS (27), i.e.:

$$y_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t, \quad (28)$$

definida per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per trobar una solució particular de l'EDO no homogènia (25) fem ús de la fórmula de variació de les constants, calculant primer les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ amb les fórmules (9), i.e.,

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = -\int \frac{t^2 t^3 \ln t}{t^2 t^3} dt = -\int \ln t dt = -t \ln t + t,$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{t^5}{t^2 t^3} dt = \int 1 dt = t$$

i a continuació fem la cl (10) amb el CFS trobat (27), per obtenir:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = (-t \ln t + t)t^2 + t^3 \ln t = t^3, \quad (29)$$

definida, com es pot comprovar, per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Ara, per tenir la solució general de l'EDO no homogènia, sumem la solució general (28) de l'EDO homogènia associada (26) i la solució particular (29) de l'EDO completa (25) que hem trobat dalt. Així:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t + t^3 = (t + c_1 + c_2 \ln t)t^2,$$

$t > 0$, i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

(f) En aquest cas, comparant amb (8) resulten els coeficients: $a_0(t) = 0, a_1(t) = a_2(t) = 1$ i el terme independent $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$. Es comprova d'immediat que la funció constant $y_1(t) = 1$ és solució de l'EDO homogènia associada. La segona solució *li* es troba amb la fórmula de reducció de l'ordre (2),

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt = \int \exp\left(-\int dt\right) dt = -e^{-t}$$

i tenim el CFS:

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = -e^{-t} \quad (30)$$

definit per a $t \in \mathbb{R}$. A aquest CFS li correspon el wronskià,

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. La solució general de l'homogènia, $y_h = y_h(t)$ s'escriu doncs com *cl* del CFS:

$$y_h(t) = c_1 - c_1 e^{-t}, \quad (31)$$

definida per a $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per trobar la solució particular, calculem d'una banda les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ a partir de les fórmules (9). Explícitament:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{dt}{1+e^t} = \int \frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} dt = \int \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt = t - \ln(1+e^t),$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{e^t}{1+e^t} dt = \ln(1+e^t)$$

i la solució particular, $y_p = y_p(t)$, donada pel mètode de variació de les constants és *cl* d'aquestes funcions i el CFS (30). Això és:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = t - \ln(1+e^t) - e^{-t} \ln(1+e^t) = t - (1+e^{-t}) \ln(1+e^t). \quad (32)$$

La solució general de l'EDO lineal completa (no homogènia) ve donada per la suma:

$$y_p(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 - c_2 e^{-t} + t - (1+e^{-t}) \ln(1+e^t),$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

(g) Tenim els coeficients: $a_0(t) = 5, a_1(t) = -4, a_2(t) = 1$ i el terme independent és: $f(t) = \frac{e^{2t}}{\cos t}$, definit i continu per a $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Es comprova que

$$y_1(t) = e^{2t} \cos t,$$

és una solució de l'homogènia associada. En efecte, derivant:

$$y_1'(t) = 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t, \quad y_1''(t) = 3e^{2t} \cos t - 4e^{2t} \sin t$$

i després substituint,

$$\begin{aligned} y_1''(t) - 4y_1'(t) + 5y_1(t) &= 3e^{2t} \cos t - 4e^{2t} \sin t - 4(2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t) + 5e^{2t} \cos t \\ &= 3e^{2t} \cos t - 4e^{2t} \sin t - 8e^{2t} \cos t + 4e^{2t} \sin t + 5e^{2t} \cos t = 0 \end{aligned}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. La segona solució *li* amb $y_1(t)$ es deriva de la fórmula de reducció de l'ordre, que en aquest cas dóna:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt\right) dt = e^{2t} \cos t \int \frac{1}{e^{4t} \cos^2 t} \exp\left(\int 4 dt\right) dt \\ &= e^{2t} \cos t \int \frac{e^{4t}}{e^{4t} \cos^2 t} dt = e^{2t} \cos t \int \frac{dt}{\cos^2 t} dt = e^{2t} \cos t \tan t = e^{2t} \sin t. \end{aligned}$$

Tenim així el CFS de l'EDO homogènia següent:

$$y_1(t) = e^{2t} \cos t, \quad y_2(t) = e^{2t} \sin t; \quad (33)$$

al qual li correspon el wronskià:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} \cos t & e^{2t} \sin t \\ 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t & 2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t \end{vmatrix} = e^{4t}.$$

La solució general de l'EDO homogènia associada és *cl* del CFS (33) que hem trobat, i. e.,

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t, \quad (34)$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per tenir una solució particular de l'EDO no homogènia, necessitem primer calcular les funcions $u_1(t)$, $u_2(t)$ d'acord amb les fórmules (9) del mètode de variació de les constants (corol·lari 2.3). Fent els càlculs s'obté:

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = - \int \frac{e^{2t}e^{2t} \sin t}{e^{4t} \cos t} dt = \ln(\cos t),$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{e^{2t}e^{2t} \cos t}{e^{4t} \cos t} dt = t$$

i la solució particular resulta:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = e^{2t} \ln(\cos t) \cos t + te^{2t} \sin t, \quad (35)$$

definida, per exemple, a l'interval: $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Aleshores, la solució general de l'EDO no homogènia és la suma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t + e^{2t} \ln(\cos t) \cos t + te^{2t} \sin t,$$

definida per a $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (de fet, en qualsevol interval de la forma $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (paràmetres lliures). \triangleright

4. Considereu l'EDO lineal de segon ordre

$$(2t + 3)ty'' + 2(2t^2 - 3)y' - 12(t + 1)y = (2t + 3)^2.$$

- Trobeu el valor de λ que fa que $y_1(t) = t^\lambda$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.
- Trobeu el valor de m que fa que $y_2(t) = e^{mt}$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.
- Useu el mètode de variació de les constants per calcular una solució particular de l'EDO completa.
- Resoleu el problema de valors inicials $y(-1) = -1$, $y'(-1) = \frac{5}{2}$.

\triangleleft **Solució.** (a) Busquem solucions de l'EDO homogènia de la forma $y_1(t) = t^\lambda$, ajustant $\lambda \in \mathbb{R}$ convenientment. Derivant primer tenim: $y_1'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, $y_1''(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$; i substituint després en l'EDO es veu que:

$$\begin{aligned} (2t + 3)ty_1''(t) + 2(2t^2 - 3)y_1'(t) - 12(t + 1)y_1(t) &= \\ &= (2t + 3)\lambda(\lambda - 1)t^{\lambda-1} + 2(2t^2 - 3)\lambda t^{\lambda-1} - 12(t + 1)t^\lambda \\ &= 2\lambda(\lambda - 1)t^\lambda + 3\lambda(\lambda - 1)t^{\lambda-1} + 4\lambda t^{\lambda+1} - 6\lambda t^{\lambda-1} - 12t^{\lambda+1} - 12t^\lambda \\ &= (4\lambda - 12)t^{\lambda+1} + (2\lambda(\lambda - 1) - 12)t^\lambda + (3\lambda(\lambda - 1) - 6\lambda)t^{\lambda-1} \\ &= (4\lambda - 12)t^{\lambda+1} + 2(\lambda + 2)(\lambda - 3)t^\lambda + 3\lambda(\lambda - 3)t^{\lambda-1} = 0 \end{aligned}$$

per a tot $t > 0$ sii (si i només si),

$$4\lambda - 12 = 0, \quad (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0, \quad \lambda(\lambda - 3) = 0$$

simultàniament. La primera es verifica per $\lambda = 3$, la segona per $\lambda = -2$ i $\lambda = 3$ i la tercera per $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$; per tant l'únic valor de λ que satisfà totes tres equacions alhora és $\lambda = 3$. La solució per l'EDO lineal homogènia de la forma proposada és doncs

$$y_1(t) = t^3,$$

i està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

(b) Busquem ara solucions de la forma $y_2(t) = e^{mt}$, ajustant $m \in \mathbb{R}$. Com a l'apartat anterior, es deriva i, en substituir a l'EDO homogènia es té que

$$\begin{aligned} (2t+3)ty_2''(t) + 2(2t^2-3)y_2'(t) - 12(t+1)y_2(t) &= [m^2(2t+3)t + 2m(2t^2-3) - 12(t+1)] e^{mt} \\ &= (2m^2t^2 + 3m^2t + 4mt^2 - 6m - 12t - 12)e^{mt} \\ &= [2m(m+2)t^2 + 3(m-2)(m+2)t - 6(m+2)] e^{mt} = 0 \end{aligned}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$ si les equacions,

$$m(m+2) = 0, \quad (m-2)(m+2) = 0, \quad m+2 = 0$$

es satisfan simultàniament, i això succeeix si $m = -2$ (en efecte, la primera equació es satisfà per $m = 0$ i $m = -2$, la segona per $m = 2$ i $m = -2$ i la tercera, per $m = -2$). D'aquesta manera és clar que

$$y_2(t) = e^{-2t},$$

és una altra solució de l'EDO homogènia, definida per a $t \in \mathbb{R}$. A més $y_1(t) = t^3$ i $y_2(t) = e^{-2t}$ són li en tot \mathbb{R} , en el sentit esmentat en la remarca 2.4, i. e.: l'única cl que satisfà $c_1t^3 + c_2e^{-2t} = 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants és la cl trivial, i. e., la corresponent a $c_1 = c_2 = 0$ (exercici: comproveu-ho!). Tenim així que

$$y_1(t) = t^3, \quad y_2(t) = e^{-2t} \quad (36)$$

formen un CFS de l'EDO homogènia associada, definit per a $t \in \mathbb{R}$.

(c) El wronskià del CFS (36) format per les solucions de l'EDO homogènia trobades als apartats (a) i (b) és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & e^{-2t} \\ 3t^2 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2t^3e^{-2t} - 3t^2e^{-2t} = -t^2(2t+3)e^{-2t}.$$

Per aplicar el mètode de variació de les constants, calculem les funcions $u_1(t)$, $u_2(t)$ donades per les fórmules (9), amb

$$a_2(t) = (2t+3)t, \quad f(t) = (2t+3)^2$$

i el wronskià donat dalt; llavors resulta,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= - \int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = - \int \frac{e^{-2t}(2t+3)^2}{-t^3(2t+3)^2e^{-2t}} dt = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2}, \\ u_2(t) &= \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)} dt = \int \frac{t^3(2t+3)^2}{-t^3(2t+3)^2e^{-2t}} dt = - \int e^{2t} dt = -\frac{1}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$

La solució particular, $y_p = y_p(t)$, s'obté ara de la cl d'aquestes funcions amb el CFS (36) de l'EDO homogènia segons (10). En el cas que ens ocupa, això dona:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{1}{2t^2}t^3 - \frac{1}{2}e^{2t}e^{-2t} = -\frac{1}{2}(t+1). \quad (37)$$

Aleshores, la solució general de l'EDO no homogènia és la suma d'una combinació lineal del CFS (36) amb constants reals arbitràries, i una solució particular qualsevol de l'EDO no homogènia, com la que hem trobat pel mètode de variació de les constants (37), i. e.:

$$y(t) = c_1t^3 + c_2e^{-2t} - \frac{1}{2}(t+1) \quad (38)$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

(d) Per trobar la solució del PVI, imposem les ci a la solució general (37). S'obté llavors el sistema lineal

$$\left. \begin{aligned} y(-1) &= -c_1 + e^2 c_2 = -1, \\ y'(-1) &= 3c_1 - 2e^2 c_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & -e^2 \\ 3 & -2e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

el qual és compatible i determinat (el determinant és el wronskià del CFS (36) en $t = -1$). La seva solució ens permet fixar les constants c_1, c_2 . Es comprova d'immediat que aquesta que és:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

i així

$$y(t) = t^3 - \frac{1}{2}(t+1),$$

és la solució del PVI que correspon a les ci de l'enunciat. \triangleright

5. Considereu les funcions $y_1(t) = t$ i $y_2(t) = \frac{1}{t}$ per a $t > 0$.

(a) Calculeu el wronskià $W(t)$ i vegeu que $W(t) \neq 0$.

(b) Trobeu l'EDO homogènia de la forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ que les té com a conjunt fonamental de solucions.

\triangleleft **Solució.** (a) El wronskià de les funcions $y_1(t), y_2(t)$ donades és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t} = -\frac{2}{t},$$

el qual està definit per a tot $t \neq 0$ i és diferent de zero, en particular, per a $t > 0$.

(b) Imposant que $y_1(t) = t, y_2(t) = 1/t$ siguin solució d'aquesta EDO homogènia, obtenim el següent sistema lineal:

$$\left. \begin{aligned} y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) &= 0 + p(t) + q(t)t = 0, \\ y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) &= \frac{2}{t^3} - \frac{p(t)}{t^2} + \frac{q(t)}{t} = 0 \end{aligned} \right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/t \end{pmatrix},$$

que han de satisfer $p(t), q(t)$ per a tot $t > 0$. Resolent-ho —per exemple, per Cramer—, s'obté:

$$p(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t \\ 2/t & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2t} = \frac{1}{t}, \quad q(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2/t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{vmatrix}} = \frac{2/t}{-2t} = -\frac{1}{t^2}.$$

Aleshores, l'EDO que satisfan les funcions donades és:

$$y'' + \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = 0, \quad t > 0. \quad \triangleright$$