UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
MÈTODES NUMÈRICS, ENGINYERIA QUÍMICA

Llista 6: Edos lineals i sistemes

1. Resoleu les equacions següents:

(i) $y''' - 8y = 0$.
(ii) $y^{5)} + 8y''' + 16y' = 0$.
(iii) $y^{8)} - y = 0$.

2. Resoleu les equacions següents:

(i) $y''' - y'' + y' - y = x\sin(x)$.
(ii) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$.
(iii) $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$.
(iv) $y'' + 4y = \sin(3x)$.
(v) $y'' + 3y' - 4y = \sin(2x)$.

3. Resoleu els problemes de valors inicials següents:

(i) $y''' - 4y' = \cos^2(x)\,; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.
(ii) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}\,; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
(iii) $y^{4)} = 0\,; \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 4,\ y'''(0) = 5$.

4. Siguin $y_1(x), \ldots y_n(x)$ funcions linealment independents. Comproveu que l'equació

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ y_1''(x) & & & y_n''(x) & y''(x) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ y_1^{n)}(x) & & & y_n^{n)}(x) & y^{n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

defineix una edo lineal homogènea d'ordre n que té per solucions el subespai amb base $y_1, \ldots, y_n$.

Com a aplicació, trobeu l'equació diferencial lineal i homogènea d'ordre mínim que té com a solucions

(i) $y_1(x) = x, y_2(x) = 1/x\,; \quad x > 0$.
(ii) $y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cosh(x), y_3 = \sinh(x)\,; \quad x \in \mathbb{R}$.

5. *(canvi de variable independent)* Comproveu amb la regla de la cadena que si feu un canvi de variable $x = x(t)$ en una funció $y(x)$, la relació entre les derivades de y respecte de x i respecte de t és:

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - \frac{dy}{dt}\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$.

6. Les equacions de la forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0\,, \quad x > 0$$

amb $a, b, c \in \mathbb{R}$, reben el nom genèric d'*equacions de Cauchy-Euler*. Comproveu que el canvi de variable independent $x = e^t$ les transforma en equacions a coeficients constants

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Apliqueu aquest canvi a la resolució de les equacions

(i) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

(ii) $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$.

(iii) $x^2y'' - (2a-1)xy' + a^2y = 0\,, \quad a \in \mathbb{R}$.

7. Proveu que l'equació diferencial de l'*oscil·lador harmònic*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

té solució general de la forma

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

amb paràmetres reals A, l'*amplitud*, i φ, la *fase* de la solució.

Resoleu el PVI $\ddot{x} + 4x = 0$, $x(0) = \sqrt{3}$, $\dot{x}(0) = 2$ i deixeu la solució en el format d'amplitud i fase. Dibuixeu el graf de la solució i interpreteu A, φ.

Indicació: Per posar una solució $x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$ en format d'amplitud i fase definiu $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, trieu φ tal que $\cos\varphi = c_1/A, \sin\varphi = c_2/A$, i apliqueu la fòrmula del sinus de la suma d'angles.

8. Resoleu l'equació de l'*oscil·lador harmònic esmorteït*

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

amb el *fregament* $k > 0$. Discutiu les solucions segons els valors de k, ω, i dibuixeu el graf de les solucions quan les arrels del polinomi característic són reals simples, real doble o complexes conjugades.

9. Apliqueu el mètode de coeficients indeterminats per a resoldre l'equació de l'*oscil·lador forçat*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g(t)$$

Resoleu l'equació en el cas $\omega = 1, g(t) = \sin(t)$. Quin és el límit de $x(t)$ quan $t \to +\infty$?

10. Resoleu en funció del paràmetre α l'equació
$$y'' - y' - \alpha(\alpha+1)y = e^{-x}.$$

11. Transformeu l'equació diferencial $y''' - y'' + y' - y = 0$ en un sistema d'ordre 1, feu-lo anar per resoldre el PVI amb $y(0) = 0.1, y'(0) = 1.1, y''(0) = 0.1$, trobant la solució i les seves dues primeres derivades.

12. Trobeu la solució general dels següents sistemes d'equacions:

(i) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t).$

(ii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t).$

(iii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t).$

(iv) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t).$

13. Resoleu els següents problemes de valors inicials:

(i) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t), \quad \overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(ii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t), \quad \overrightarrow{x}(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(iii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t), \quad \overrightarrow{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

14. Trobeu la solució general pel mètode de variació de paràmetres de les següents equacions:

(i) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(ii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$

(iii) $\overrightarrow{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}(t) + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t.$

15. Feu una funció de Matlab que

- rebi com a arguments una matriu 2×2 A, un vector inicial $v \in \mathbb{R}^2$ en columna, dos margens d'error $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i un temps $t > 0$,

- calculi numèricament amb l'exponencial de tA les 4 solucions $\overrightarrow{x_1}(t), \ldots, \overrightarrow{x_4}(t)$ dels PVI amb equació $\overrightarrow{x}'(t) = A\overrightarrow{x}$ i condicions inicials $v+(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2), v+(\varepsilon_1, -\varepsilon_2), v+(-\varepsilon_1, \varepsilon_2), v+(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ respectivament,
- dibuixi en pantalla el paral·lelògram R_t format per les 4 solucions calculades,
- i finalment retorni aquestes 4 solucions.

Com evoluciona l'àrea del paral·lelògram R_t amb el temps?

Com a exemple, feu un bucle cridant la funció en un vector de valors de t creixents, i insertant la comanda `pause` per veure els dibuixos successius com una animació. Useu aquest bucle en els PVI $y'' - 0.1y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$ i $y'' - 0.1y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ són els margens d'error amb els que coneixeu les components de la condició inicial, que podeu dir de la posició de la solució en temps t?

16. Volem estudiar com evoluciona la concentració d'un contaminant en els llacs Erie i Ontario, connectats per un riu que flueix d'Erie a Ontario. Farem la hipòtesi que el contaminant es dissol uniformement a l'aigua.

(i) Siguin $x_1(t), x_2(t)$ les concentracions de contaminant als llacs Erie i Ontario respectivament, a l'instant t. Justifiqueu el sistema d'equacions diferencials ordinàries següent

$$\begin{cases} x_1' = \frac{r_1(e_1 - x_1)}{V_1} \\ x_2' = \frac{r_1 x_1 + (r_2 - r_1)e_2 - r_2 x_2}{V_2} \end{cases}$$

on

- V_1, V_2 són els volums dels dos llacs, en km^3,
- r_1, r_2 són les velocitats d'entrada i sortida d'aigua, en km^3/any, i $r_2 > r_1$,
- e_1, e_2 són les concentracions de contaminant que entren a cada llac des de l'exterior.

(ii) Poseu $V_1/r_1 = 2.6, V_2/r_2 = 7.8, r_1 = \frac{5}{6}r_2$. Suposant que ha cessat la contaminació externa ($e_1 = e_2 = 0$), trobeu una matriu fonamental del sistema i resoleu-lo amb les condicions inicials $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$.

(iii) Resoleu ara el sistema amb constants e_1, e_2 qualsevols, i amb les condicions inicials $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0$. Quin és el límit de les concentracions $x_1(t), x_2(t)$ quan $t \to +\infty$?

(iv) Torneu al cas en que no hi ha contaminació externa ($e_1 = e_2 = 0$), i suposeu que inicialment la concentració de contaminant al llac Erie és el doble que al llac Ontario. Quant temps ha de passar per a que la concentració al llac Ontario sigui el 5 % de la inicial?

Indicació: Pel darrer apartat heu de resoldre $x_2(t) = 0.05x_2^0$ en la solució de (ii). Useu `fsolve`.